Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007032**

ID профиля: **381310**

Вариант 11

Чистовик 1

Задача №3

1) Начнем с опред. координаты точки B:

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+4 \;|:a$, если $a=0$, то $0=4 \Rightarrow a\neq 0$, можем на него делить

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=(x-a)^2+\frac{4}{a}$. Отсюда видно, что ~~...~~ верш. параболы находится в $(a;\frac{4}{a})$, т.к. мы должны найти y_{min}, а y будет минимальным, когда выраж. слева будет мин. $\Rightarrow$ ~~при этом~~ $(x-a)^2$ должно быть мин, т.е. $=0$, т.е. $x=a$ и тогда $y=\frac{4}{a}$.

Итого, $B=(a;\frac{4}{a})$.

2) Опред. коорд. т. A:

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$(6a^2-a^2)+12ax+4ay+(6x^2+2x^2)+8xy+(-4y^2+8y^2)=0$

$(6a^2+12ax+6x^2)+(-a^2+4ay-4y^2)+(2x^2+8xy+8y^2)=0$

$6(x+a)^2-(2y-a)^2+2(2y+x)^2=0$

Сделаем замену: $\begin{cases} a'=x+a \\ b'=2y-a \end{cases}$. Тогда $a'+b'=2y+x$ и тогда:

$6a'^2-b'^2+2(a'+b')^2=0$

$8a'^2+b'^2+4a'b'=0$

~~$8+\frac{b'^2}{a'^2}+4\frac{b'}{a'}=0$, $t=\frac{b'}{a'}$~~

~~$t^2+4t+8=0$~~

$(4a'^2+4a'b'+b'^2)+4a'^2=(2a'+b')^2+4a'^2=0$

Т.к. $\forall n, n \in \mathbb{R}$ $n^2 \geq 0$, то

② Чистовик

$\begin{cases}(2a'+b')^2=0 \\ 4a'^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b'=0 \\ a'=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y-a=0 \\ x+a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\frac{a}{2} \\ x=-a\end{cases} \Rightarrow A=(-a;\frac{a}{2})$.

3) Слова „и ~~находящийся под~~ лежит под/над какой-то прямой" означают, что при данном x у точки, y у данной прямой больше/меньше, чем у данной точки. Тогда имеем:

прямая $-(y=3x+4$, т.е. $y=4+3x)$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A\text{ - под прямой} \\ B\text{ - над прямой}\end{cases} \\ \begin{cases}B\text{ - под прямой} \\ A\text{ - над прямой}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4+3(-a)>\frac{a}{2} \\ 4+3(a)<\frac{4}{a}\end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases}4+3(-a)<\frac{a}{2} \\ 4+3(a)>\frac{4}{a}\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$ $(a\neq 0)$

(1):

$\begin{cases}4-3a>\frac{a}{2} \\ 4+3a<\frac{4}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<\frac{8}{7} \\ 4+3a<\frac{4}{a} \Leftarrow (3)\end{cases}$

(3):

по т. Виета

$\left[\begin{array}{l}4+3a<\frac{4}{a} \mid \cdot a, a<0 \\ 4+3a<\frac{4}{a} \mid \cdot a, a>0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4a+3a^2>4, a<0 \\ 4a+3a^2<4, a>0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a+2)(3a-2)>0, a<0 \\ (a+2)(3a-2)<0, a>0\end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-\infty;-2)\cup(\frac{2}{3};+\infty), a<0 \Rightarrow \underline{a\in(-\infty;-2)} \\ a\in(-2;\frac{2}{3}); a>0 \Rightarrow \underline{a\in(0;\frac{2}{3})}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}a<\frac{8}{7} \\ \left[\begin{array}{l}a\in(-\infty;-2) \\ a\in(0;\frac{2}{3})\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<\frac{8}{7} \\ a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})}$

(2):

$\begin{cases}4-3a<\frac{a}{2} \\ 4+3a>\frac{4}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>\frac{8}{7} \\ 4+3a>\frac{4}{a} \Leftarrow (4)\end{cases}$

(4):

$\left[\begin{array}{l}4+3a>\frac{4}{a} \mid \cdot a, a>0 \\ 4+3a>\frac{4}{a} \mid \cdot a, a<0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4a+3a^2-4>0, a>0 \\ 4a+3a^2-4<0, a<0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a+2)(3a-2)>0, a>0 \\ (a+2)(3a-2)<0, a<0\end{array}\right.$

$\Rightarrow$

211007032 (U381310 M1274620)

③ Чистовик

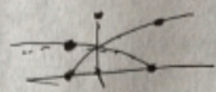
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (-\infty;-2) \cup (\frac{2}{3};+\infty),\ a \geq 0 \\ a \in (-2;\frac{2}{3}),\ a < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in (\frac{2}{3};+\infty) \\ a \in (-2;0) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ \left[\begin{array}{l} a \in (\frac{2}{3};+\infty) \\ a \in (-2;0) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ a \in (-2;0) \cup (\frac{2}{3};+\infty) \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (\frac{8}{7};+\infty).}$$

Учитывая, что по итогу $a \in (1) \cup (2) \Rightarrow$

Ответ: $a \in (-\infty;-2) \cup [0;\frac{2}{3}) \cup (\frac{8}{7};+\infty)$.

Черновик



$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6-x-x^2} = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b + 3 - 2ab = 0$

$a - 2ab - b + 3 = 0$

$\cancel{(a + \frac{1}{2})(-2b + 1) + 2{,}5 = 0}$

$\cancel{a - b + 3ab = 2}$

$\cancel{a - b + 3ab - 2 = 0}$

$\cancel{(a \quad)(b \quad) = 0}$

$\cancel{\sqrt{x+2} \quad + 3 = 2\sqrt{6}}$

$\sqrt{a} + 3 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$

$a + 6\sqrt{a} + 9 = 4ab + b + 4\sqrt{ab^2}$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

A

$y - 3x = 4$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$

B

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{4}{a} = (x-a)^2 + \frac{4}{a}$

$B = (a; \frac{4}{a})$

$5a^2 + 12ax + 4ay + \overset{-4x^2}{8x^2} + 8xy + 4y^2 = 0$

$\cancel{(3a^2 + 12ax + 12x^2)} +$

$\cancel{4x^2 + 4(x+y)^2 = 0}$

$\cancel{8xy + y^2 + y^2 + 2y^2}$

$(4ay + 2a^2) + (3a^2 + 12ax + 4x^2) + (4x^2 + 4y^2 + 8xy) = 0$

$2a(a + 2y) + \{$

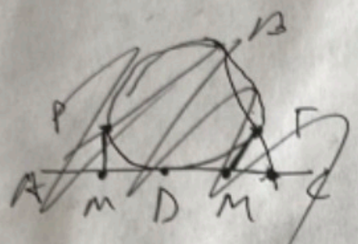
Черновик

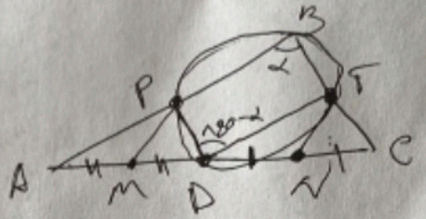
$$\begin{cases} a < \frac{8}{7} \\ 4a+3a^2-4<0 \end{cases}$$

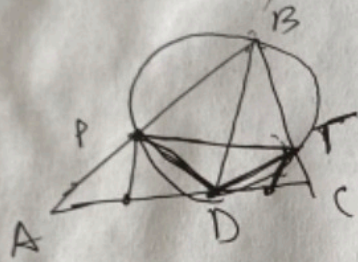
$3a^2+4a-4<0$

$D=16+16\cdot 3=16\cdot 4$

$a=\frac{-4\pm 8}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\\ -2\end{array}\right.$ $\quad -2<a<\frac{2}{3}$

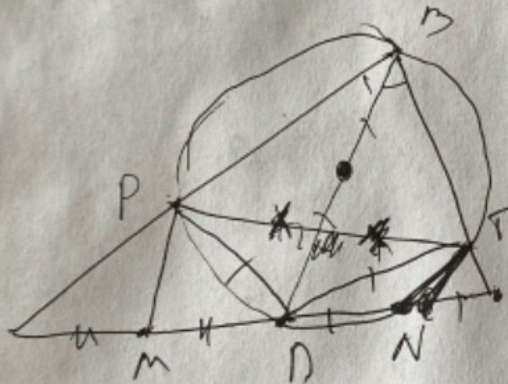






$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{\ldots}$

$$\begin{cases} a-b-2ab+3=0 \\ a^2-b^2+3ab=0 \end{cases}$$



$a-b-2ab$

$(2a+1)(\frac{1}{2}-b)=$

$=\frac{1}{2}(2a+1)(1-2b)+\frac{5}{2}=0$

$\sqrt{t}-\sqrt{5-t}+3=2\sqrt{5t-t^2}$

$(2a+1)(1-2b)=-5$

$(2\sqrt{x+2}+1)(1-2\sqrt{3-x})=-5$

$\cancel{t}+5-\cancel{t}-2\sqrt{5t-t^2}=4(5t-t^2)-12\sqrt{5t-t^2}+9$

$10\sqrt{5t-t^2}=-4t^2+20t+4=-4(t^2-5t-1)$

черновик

$$(by+ca)^2+(kx+ma)^2+(dx+ly)^2=0$$

$$(b^2+l^2)y^2+(bc)ay+(c^2+m^2)a^2+(k^2+d^2)x^2+(km)ax+$$
$$+(dl)xy=0$$

$$\begin{cases} b^2+l^2=4 \\ bc=4 \\ c^2+m^2=5 \\ k^2+d^2=8 \end{cases}$$

$km=12$

$dl=8$

$$(6a^2+12ax+6x^2)+(-a^2+4ay-4y^2)+(2x^2+8xy+8y^2)=0$$

$$6(a+x)^2-(2y-a)^2+2(x+2y)^2=0$$

$x+a=a'=0$

$2y-a=b'=0$

$$6(a+x)^2-(2y-a)^2+2(x+2y)^2=0$$

$$6a'^2-b'^2+2(a'+b')^2=0$$

$x=-a$

$y=\frac{a}{2}$

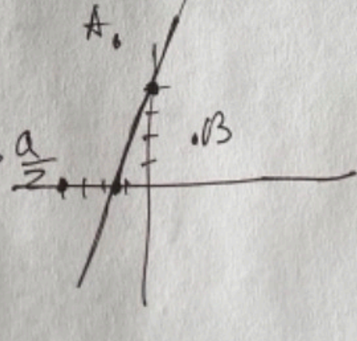
$$8a'^2+b'^2+4a'b'=0 \;|:a'^2$$

$$(a'+b')(a'+b')=0$$

$$8+\frac{b'^2}{a'^2}+4\frac{b'}{a'^2}=0$$

$A=(-a;\frac{a}{2})$

$B=(a;\frac{4}{a})$



$y=4+3x$

$y-3x=4$

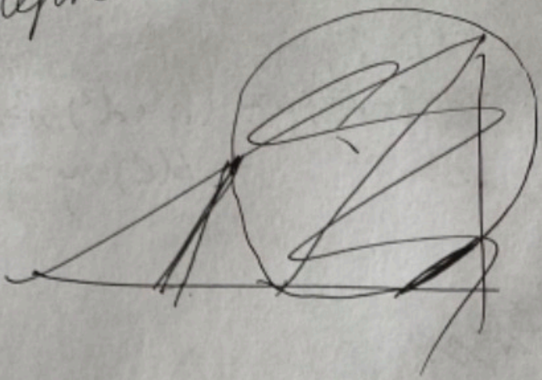
$y=3x+4$

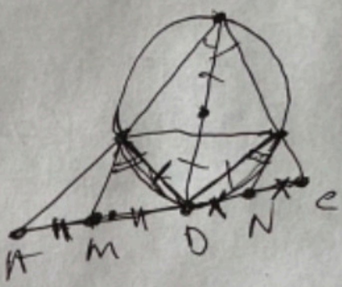
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-3a>\frac{a}{2} \\ 4+3a<\frac{4}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} 4-3a<\frac{a}{2} \\ 4+3a>\frac{4}{a} \end{cases} \end{array}\right.$$

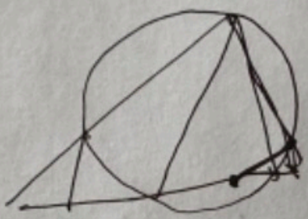
$-2\sqrt{5}$

21^{-5}

черновик







Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007032**

ID профиля: **381310**

Вариант 11

Чистовик ④ (① в реш. II части)

Задача №4

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20. \end{cases}$$

$x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 0$ (т.к. $x^2 \geq, y^2 \geq 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 & (1) \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1) \Rightarrow (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15.$

Пусть $t = x^2+y^2$. $\boxed{t>0}$ Тогда $t^2 - \frac{4}{t} = 15. \mid \cdot t$, т.к. $t \neq 0$

$t^3 - 4 = 15t$. Заметим, что $t=4$ — к.у., тогда разделим уголком выражение на $(t-4)$.

$t^3-15t-4=0$

$$\begin{array}{l|l} t^3+0\cdot t^2-15t-4 & t-4 \\ \hline -\ t^3-4t^2 & t^2+4t+1 \\ \hline \quad 4t^2-15t & \\ -\ 4t^2-16t & \\ \hline \quad\quad t-4 & \\ -\ t-4 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

т.е. $t^3-15t-4 = (t-4)\cdot(t^2+4t+1)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (t-4)(t^2+4t+1)=0 \mid : (t-4)$

Запомним $t=4$. Пусть тогда $t \neq 4$

$t^2+4t+1=0$

$D = 16-4=12.\ \sqrt{D} = 2\sqrt{3}$

$t = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \left[\begin{array}{l} -2+\sqrt{3} < 0 \Rightarrow t \in \varnothing \\ -2-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow t \in \varnothing \end{array}\right.$

$\sqrt{3} < 2$, т.к. $(\sqrt{3})^2 < 4$ и $\sqrt{3}$ и 2 — одного знака.

$t = 4$. Тогда:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases} (1) \right.$$

(1):

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 16+x^2y^2=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4-x^2 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2=4-x^2 \\ (4-x^2)x^2=4 \Rightarrow x^4-4x^2+4=0 \Rightarrow (x^2-2)^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \end{cases}$$

Чистовик 5 (2 в реш. II части)

2) $\begin{cases} x^2=2 \\ y^2=4-x^2=2. \end{cases} \to \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$, т.е. реш. нач. сист. – всевозможные комб. в этой сист.

~~(2):~~

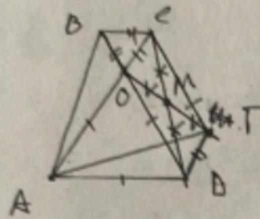
~~$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{2} \ldots \end{cases}$~~

Ответ: ~~$(2;2), (-2;2), (-2;-2), (2;-2)$~~

$\hookrightarrow (\sqrt{2};\sqrt{2}); (-\sqrt{2};\sqrt{2}); (-\sqrt{2};-\sqrt{2}); (\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Чистовик ⑥ (③ в реш. II части)

Задача №6



Дано:
$BO=OC=BC$
$AO=OD=AD$
$TM=OM$
$CM=MD$

(а)

1) ABCD – трап., т.к. $\angle CAD=\angle BCA=60^\circ \Rightarrow$ накрест. леж. углы при BC и AD и сек AC равны $\Rightarrow BC \parallel AD$.

2) ∗ CT, TD, AT.
построим

3) Т.к. $OM=MT$, $CM=MD$, т.е. диагонали чет-ника OCTD делятся пополам в т. их пересеч. $\Rightarrow$ OCTD – параллелог. $\Rightarrow$ $CT=OD$, $TD=OC$ и $\angle TDO=180^\circ-\angle COD$ (одностор при OC и DT и сек. OD).

4) $\angle COD$ и $\angle BOC$ – смежн $\Rightarrow \angle COD=180^\circ-\angle BOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ \Rightarrow$ $\angle TDO=60^\circ$.

5) ΔTDA. $\angle TDA=\angle ADB+\angle TDO=60^\circ+60^\circ=120^\circ$. $\Rightarrow$ $\Delta TDA=\Delta COD$ по 2 стор. и углу м. ними ($CO=TD$, $OD=AD$, $\angle COD=\angle ADT$), тогда $\angle ODC=\angle TAD$ и $AT=CD$.

6) $\Delta COD=\Delta BOA$ по 2 стор и углу м. ними ($BO=OC$, $AO=OD$, $\angle BOA=\angle COD$ – верт) $\Rightarrow$ ~~∠BOA~~ $\angle BAO=\angle ODC$ и $AB=CD$. $\Rightarrow$ $\underline{\angle BAO}=\angle ODC=\underline{\angle TAD}$ и $\underline{AB}=CD=\underline{AT}$.

7) $\angle OAD=\angle TAD+\angle OAT=60^\circ \Rightarrow \angle OAT=60^\circ-\angle TAD \Rightarrow$ $\angle BAT=\angle OAT+\angle BAO=60^\circ-\cancel{\angle TAD}+\cancel{\angle BAO}=60^\circ$.

8) Т.е. в ΔBAT. $AB=AT$ и $\angle BAT=60^\circ \Rightarrow \Delta BAT$ – равностор.

ч.т.д.

Чистовик (7) ((4) в реш. II части)

(б)

$\Delta COD = \Delta BOA \Rightarrow$

1) $S_{ABCD} = S_{\Delta AOD} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta BOA} = S_{\Delta AOD} + S_{\Delta BOC} + 2 \cdot S_{\Delta COD} =$

$= \frac{AD^2}{2} \cdot \sin 60^\circ + \frac{BC^2}{2} \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot \frac{OC \cdot OD}{2} \cdot \underset{\sin 60^\circ}{\underset{\shortparallel}{\sin 120^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(25 + 4 + 2 \cdot 5 \cdot 2) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 49.$

2) По т. косинусов в ΔCOD:

$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 OC \cdot OD \cdot \cos\angle COD = 4 + 25 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 \cdot 2 =$

$= 29 + 10 = 39.$

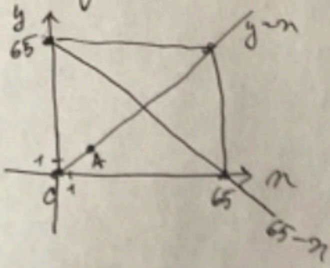
$CD^2 = AB^2$, т.к. $CD = AB \Rightarrow S_{\Delta ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 39.$

3) $\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{\Delta ABCD}}$; из (1) и (2), $= \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 39}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 49} = \frac{39}{49}.$

Ответ: $\frac{39}{49}$.

чистовик ③ (⑤ в реш II части)

Задача №5



1) Всего в квадрате $(65-0-1)^2 = 64^2$ узла.

2) на прямых $y=x$ и $y=65-x$ ~~…~~ лежит по 64 точки.

3) Рассмотрим ситуацию для конкретной точки на $y=x$:

Пусть выбрана т. A. Всего ~~от~~ можем построить из A (64^2-1) отрезков (вторая т. — все без A, выб. однозначно). Допустим, мы не хотим считать отрезки AB_i, где $B_i \in a$, $a: y = 65-x$. На $y=65-x$ леж. 64 узла, поэтому тогда имеем (64^2-1-64) отрезков. Также мы посчитали само пересеч. с A_i, которые лежат на $y=x$. Не будем их считать. Уже тогда отрезков $(64^2-1-64-\underset{\text{все } A_i \text{ без } A}{63})$. И не будем считать ~~…~~ отрезки ∥ Ox/Oy. Такие отрезки могут дать 2·62 т.

$(62 = 64 - \underset{\text{т. A}}{1} - \overset{\text{т. на } 65-x\text{, кот. уже вычеркнута}}{1})$ → отрезков тогда $(64^2-1-64-63-2\cdot62)$.

Это справедливо для всех A_i и B_i. Тогда всего их $2\cdot(64^2-1-64-63-2\cdot62)\cdot64$. Посчитаем кол-во отрезков на прямых $y=x$ и $y=65-x$. Их на каждой $\frac{64\cdot63}{2}$ (т.-е было $64\cdot63$)

~~…~~ Прибавим к имеющ. числу отр., т.к. мы их не считали: $2\cdot(64^2-1-64-63-2\cdot62+\frac{63}{2})64 = 2(64^2-1-64-\frac{63}{2}-2\cdot62)\cdot64$

4) То есть, по итогу, отрезков всего; а значит и пар узлов удв. усл. $= 2\cdot(64^2-1-64-\frac{63}{2}-2\cdot62)\cdot64$; Ответ: