Часть 1

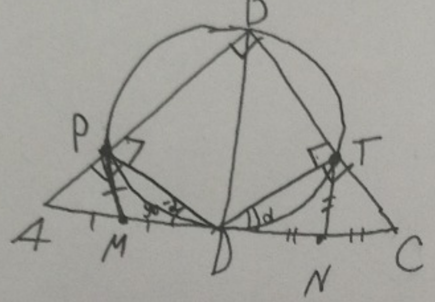
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006997**

ID профиля: **324156**

Вариант 11

№1.



Дано: $\triangle ABC$

BD-диаметр

$AM=MD$; $DN=NC$

$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$-?

б) $MP=0{,}5$; $NT=2$; $BD=\sqrt{3}$

S_{ABC}-?

Решение:

а) Проведём PD и TD $\angle BPD=\angle BTD=90^\circ$, т.к. опираются на диаметр.

Тогда $\angle APD=\angle DTC=90^\circ$

$\triangle APD$ - прямоугольный, в $\triangle APD$ PM - медиана $\Rightarrow PM=AM=MD$

Аналогично для $\triangle DTC$ $TN=DN=NC$

$PM \parallel TN$, AC - секущая $\Rightarrow \angle PMD+\angle DNT=180^\circ$

Пусть $\angle PMD=2\alpha$, тогда $\angle DNT=180^\circ-2\alpha$

$\triangle PMD$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle MDP=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}=90^\circ-\alpha$

$\triangle DNT$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle TDN=\frac{180^\circ-180^\circ+2\alpha}{2}=\alpha$

$\angle PDT=180^\circ-\angle MDP-\angle TDN=180^\circ-90^\circ+\alpha-\alpha=90^\circ$

$\angle ABC=360^\circ-3\cdot 90^\circ=90^\circ$

б) $AD=AM+MD=2PM=1$

$CD=CN+ND=2NT=4$

$AC=AD+CD=5$

BD - диаметр, AC - касательная $\Rightarrow BD\perp AC \Rightarrow BD$ - высота.

Тогда $S_{ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}=2{,}5\sqrt{3}$

Ответ: 90°; $2{,}5\sqrt{3}$

№2

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$ ОДЗ: $x+2\geq 0$, $3-x\geq 0$, $6+x-x^2\geq 0$

$6+x-x^2=0$

$D=1+4\cdot 6=25$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{-2}=3;-2$

$6+x-x^2=-(x-3)(x+2)=(3-x)(x+2)$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{(3-x)(x+2)}$

$3-2\sqrt{(3-x)(x+2)}+\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=0$

$x-x+3-2\sqrt{(3-x)(x+2)}+(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})=0$

$3-x+x+2-2-2\sqrt{(3-x)(x+2)}+(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})=0$

$(3-x)-2\sqrt{(3-x)(x+2)}+(x+2)+(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})-2=0$

$(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})^2+(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})-2=0$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=t$

$t^2+t-2=0$

$D=1+8=9$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=-2;1$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=-2$

$\sqrt{x+2}+2=\sqrt{3-x}$

$x+2+4\sqrt{x+2}+4=3-x$

$x+6+4\sqrt{x+2}=3-x$

$-2x-3=4\sqrt{x+2}$

$\begin{cases}4x^2+12x+9=16x+32\\ -2x-3\geq 0, \quad x\leq -\frac{3}{2}\end{cases}$

$4x^2-4x-23=0$ $k=-2$

$D=4+4\cdot 23=96$

$x_{1,2}=\frac{2\pm 4\sqrt{6}}{4}=\frac{1\pm 2\sqrt{6}}{2}$

$\frac{1+2\sqrt{6}}{2}$ – пост. корень

$x=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1$

$\sqrt{x+2}=1+\sqrt{3-x}$

$x+2=1+2\sqrt{3-x}+3-x$

$x+2=4-x+2\sqrt{3-x}$

$2x-2=2\sqrt{3-x}$

$x-1=\sqrt{3-x}$

$\begin{cases}x^2-2x+1=3-x\\ x-1\geq 0, \quad x\geq 1\end{cases}$

$x^2-x-2=0$

$D=1+8=9$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=2;-1$

-1 – пост. корень

$x=2$

Ответ: $\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$; 2

$<0, a\neq 0$

$\frac{2}{3}$

$\cup(0;\frac{2}{3})$

211006997 (U324156 M1277918)

N3.

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$ – точка A

$4y^2+4y(a+2x)+8x^2+12ax+5a^2=0$

$k=2(a+2x)$

$D=4(a^2+4ax+4x^2)-4\cdot(8x^2+12ax+5a^2)=$

$=4(4x^2-8x^2+4ax-12ax+a^2-5a^2)=4(-4x^2-8ax-4a^2)=$

$=-16(x^2+2ax+a^2)=-16(x+a)^2\le 0 \Rightarrow D=0,\ x=-a$

$y_{1,2}=\dfrac{-2(a+2x)}{4}=\dfrac{-2(a-2a)}{4}=\dfrac{a}{2}$

$A(-a;\frac{a}{2})$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$, где $B(x_B;y_B)$

если $a=0$

$4\ne 0 \Rightarrow a\ne 0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+4$

$y=x^2-2ax+a^2\cancel{+\frac{4}{4}}+\frac{4}{a}$

$x_B=\dfrac{-(-2a)}{2}=a$

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\dfrac{4}{a}=\dfrac{4}{a} \Rightarrow B(a;\frac{4}{a})$

1) $\begin{cases}\frac{a}{2}>4-3a\\ \frac{4}{a}<4+3a\end{cases}$

$a>8-6a$

$7a>8$

$a>\frac{8}{7}$

$\dfrac{3a^2+4a-4}{a}>0,\ a\ne 0$

$3a^2+4a-4=0$

$D=16+48=64$

$a_{1,2}=\dfrac{-4\pm 8}{6}=-2;\ \frac{2}{3}$

$-2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}$

$a\in(-2;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

1) $a\in(\frac{8}{7};+\infty)$

2) $\begin{cases}\frac{a}{2}<4-3a\\ \frac{4}{a}>4+3a\end{cases}$

$a<8-6a$

$7a<8$

$a<\frac{8}{7}$

$\dfrac{3a^2+4a-4}{a}<0,\ a\ne 0$

$-2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}$

$a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})$

~~$a\in(-2;$~~

2) $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})\cup(\frac{8}{7};+\infty)$

211006997 (U324156 M1277918)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006997**

ID профиля: **324156**

Вариант 11

N1

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$x^4+y^4+3x^2y^2=20$

$x^4+2x^2y^2+y^4+x^2y^2=20$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20$

$x^2+y^2=a,\ x^2y^2=b$

$a^2+b=20$

$b=20-a^2$

$\frac{4}{a}+20-a^2=5$

$-a^2+15+\frac{4}{a}=0$

$\frac{-a^3+15a+4}{a}=0$ $x,y\neq 0 \Rightarrow a\neq 0,\ b\neq 0$

$-a^3+15a+4=0$

$a^3-15a-4=0$

	1	0	−15	−4
4	1	4	1	0

$a^2+4a+1=0$

$D=16-4=12$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$

$x^2>0,\ y^2>0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow -2-\sqrt{3}$ и $-2+\sqrt{3}$ - посторонние корни

$a=4,\ x^2+y^2=4,\ b=20-16=4$

$x^2+y^2=4,\ x^2y^2=4$

$y^2=\frac{4}{x^2}$

$x^2+\frac{4}{x^2}=4$

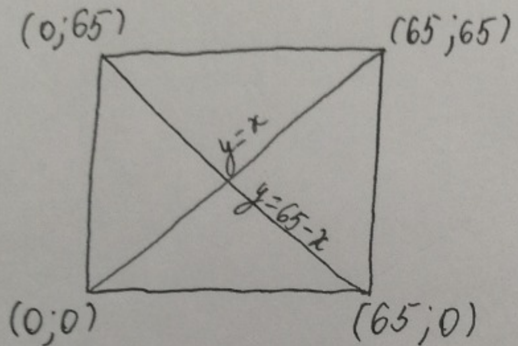
$x^2-4+\frac{4}{x^2}=0$

$(x-\frac{2}{x})^2=0,\ \ x-\frac{2}{x}=0,\ \ x=\frac{2}{x},\ x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$

$y^2=\frac{4}{2}=2,\ y=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2});\ (\sqrt{2};-\sqrt{2});\ (-\sqrt{2};\sqrt{2});\ (-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

№2.



Внутри квадрата находится 64^2 узлов.

~~Если Всего узлов~~ Если у нас 2 узла находятся на $y=x$ или на $y=65-x$, то кол-во способов выбрать такие узлы, при этом они не находятся на прямых, параллельных координатным осям:

$$\frac{2\cdot 64\cdot(2\cdot 64-3)}{2}=2\cdot 64^2-192=2\cdot 64\cdot 64-3\cdot 64=64\cdot(128-3)=64\cdot 125=$$

$=8000$

Если же один из узлов находится на $y=x$ или $y=65-x$, а другой узел не принадлежит ни одной из 2-х прямых ($y=x$ или $y=65-x$), то кол-во способов выбрать такие узлы:

$2\cdot 64\cdot(64^2-2\cdot 64+1-2\cdot 62)=2\cdot 64\cdot 64\cdot 64-4\cdot 64\cdot 64-4\cdot 62\cdot 64=$

$=64\cdot 64\cdot 124-64\cdot 2\cdot 124=62\cdot 64\cdot 124=491032$

Итого: $491032+8000=499032$