Часть 1

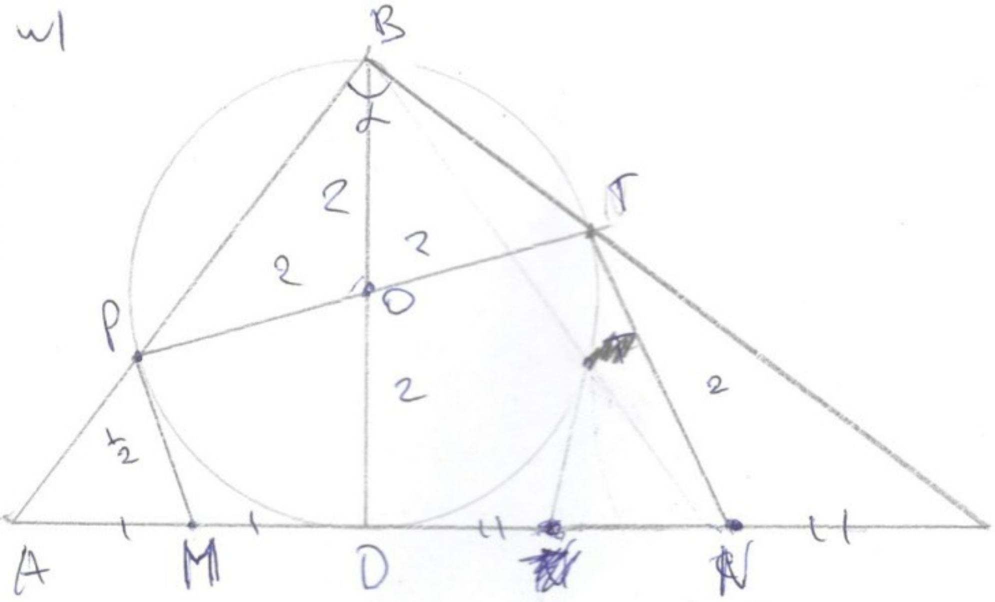
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006768**

ID профиля: **805055**

Вариант 11

№1



Дано:

$PM \parallel TN$ $MP = \frac{1}{2}$

$AM = MD$ $NT = 2$

$DN = NC$ $BD = \sqrt{3}$

Найти:

а) $\angle ABC$

б) S_{ABC}

Решение:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$

$\angle ABC = 90^\circ$, т.к PM – касательная к окру-ти

TN – касательная к окру-ти, т.е в $\triangle PBT$

$\angle B$ – это вписанный угол, опирающийся PT диаметр

окру-ти т.е $\angle B = \frac{1}{2} \cup PT$

$\cup PT = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

№2 003

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} = 0$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + (x+2-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-x) - 2 = 0$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + (\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x})^2 - 2 = 0$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$

$6+x-x^2 \geq \Rightarrow x \in [-2;3]$

$\Downarrow$

$x \in [-2;3]$

Пусть $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = t$

Ур-е примет вид

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 + t_2 = -1$ $\left[\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}\right.$

$t_1 \cdot t_2 = -2$

$t_1 = -2$

$t_2 = +1$

1) $t = -2$; $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = -2$

Обе части ≥ 0, возводим в квадрат

$x+2+4\sqrt{x+2}+4 = 3-x$

$4\sqrt{x+2} = -3-2x$

т.к левая часть ≥ 0, то $-3-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq -1,5$ (*)

Возведём (1) в квадрат

$16x+32 = 4x^2+12x+9$

$4x^2-4x-23=0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{24}}{2}$

$x = \dfrac{1+\sqrt{24}}{2} \notin (*)$

211006768 (U805055 M1273657)

$$\frac{1-\sqrt{24}}{2} > \frac{1-\sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$ №2

$$\frac{1-\sqrt{24}}{2} < \frac{1-4}{2} = -1{,}5$$

Значит $x_1 = \frac{1-\sqrt{24}}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$

2) $t = 1$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 1$

Обе части ≥ 0

$x + 2 = 3 - x + 1 + 2\sqrt{3-x}$

$2x - 2 = 2\sqrt{3-x}$

$x - 1 = \sqrt{3-x}$ (2)

Т.к $\sqrt{3-x} \geq 0$, то $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ (**)

Возведём (2) в квадрат

$x^2 - 2x + 1 = 3 - x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 \cdot x_2 = -2$

$\left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 \notin (**) \end{array}\right.$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$; $x_2 = 2$

обратная замена

$6\sqrt{(x+2)(3-x)}=4$

$36(x+2)(3-x)-16=0$

$36(3x-x^2+6-2x)-16=0$

$36(-x^2+x+6)-16=0$

$-36x^2+36x+216-16=0$

$-36x^2+36x+200=0 \mid :4$

$-9x^2+9x+50=0 \mid -1$

$9x^2-9x-50=0$

211006768 (U805055 M1273657)

$-x^2+x+6 \mid -1$

$x^2-x-6=0$

$x_1+x_2=1$

$x_1 \cdot x_2=-6$

$\left[\begin{array}{l}-2\\3\end{array}\right.$

$(x+2)(x-3)$

$(\sqrt{x+2}-2)\quad(\quad)$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{6+x-x^2}-3$

$\cancel{x}+2-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-\cancel{x}=4(x+2)(3-x)-12\sqrt{6+x-x^2}+9$

$5-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=4\sqrt{(x+2)(3-x)}-12\sqrt{(x+2)(3-x)}+9$

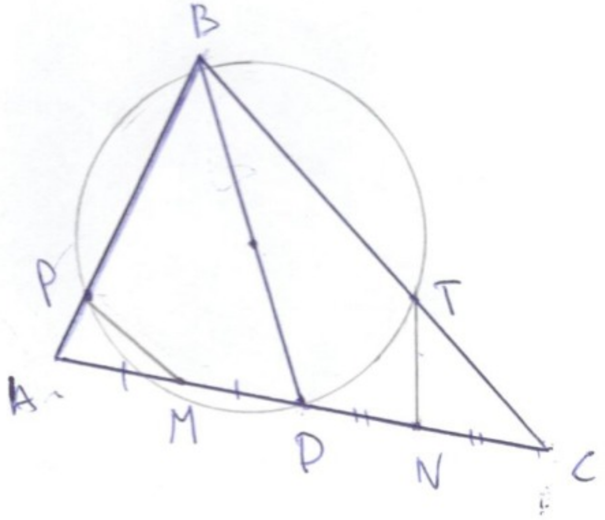
$5-6\sqrt{(x+2)(3-x)}+12\sqrt{(x+2)(3-x)}-9=0$

Нека $6\sqrt{(x+2)(3-x)}=t$

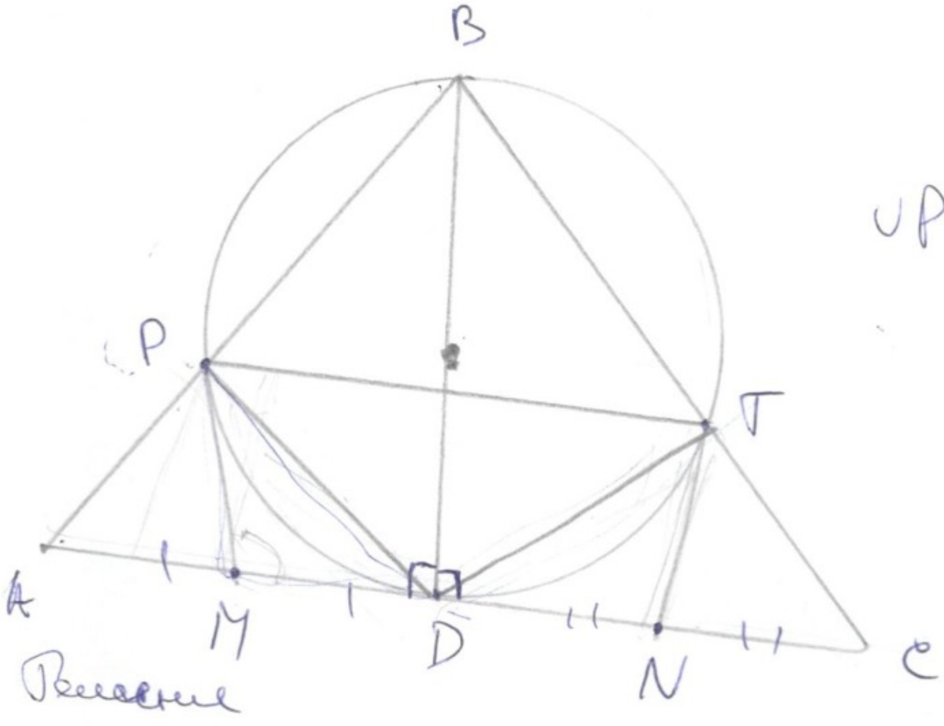
$t=9$

№1

Дано:
$PM \parallel TN$
$AM = MD$
$PN = NC$



$$\cancel{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CP}{AP}=1}$$



$\angle ABC = \dfrac{PT}{2}$

$\cup PT = \cup PD + \cup DT$

Решение

Допустим AC - касательная $\Rightarrow BD \perp AC$
(по св-ву касательной.), тогда
У угла между касательной и хордой $\angle PDA = \dfrac{\cup PD}{2}$

ОДЗ:
$x+2 \geq 0$
$x \geq -2$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\cancel{\sqrt{x+2}+3 = 2\sqrt{6+x-x^2} + \sqrt{3-x}}$$

$$\sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{-(x-3)(x+2)} + \sqrt{3-x}$$

$$\sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)} + \sqrt{3-x}$$

$$\sqrt{x+2} + 3 = \sqrt{3-x}\left(2\sqrt{x+2} + 1\right)$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{6+x-x^2} - \sqrt{3-x} + 3 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{-x^2+x+6} - \sqrt{3-x} + 3 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{-(x-3)(x+2)} - \sqrt{3-x} + 3 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{(3-x)(x+2)} - \sqrt{3-x} + 3 = 0$$

$$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(3-x)(x+2)} + 3 = 0$$

$$\left(\left((x+2)^{\frac{1}{4}} - (3-x)^{\frac{1}{4}}\right)\left((x+2)^{\frac{1}{4}} + (3-x)^{\frac{1}{4}}\right) - 2\sqrt{(3-x)(x+2)} + 3 = 0$$

211006768 (U805055 M1273657)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006768**

ID профиля: **805055**

Вариант 11

№4

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

ОДЗ

$x^2+y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \\ - \\ \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15$$

Пусть $x^2+y^2 = t$, $t>0$ (*)

$$t^2 - \frac{4}{t} - 15 = 0$$

$$t^3 - 15t - 4 = 0$$

$$t^3 - 15t - 4 = (t-4)(t^2+4t+1)$$

$$t^2+4t+1=0$$

$$t = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2-\sqrt{3} < 0 \\ -2+\sqrt{3} < -2+\sqrt{4} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{оба корня} \notin (*)$$

$t = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ (1)

$1 + x^2y^2 = 5$

$x^2y^2 = 4$ (2)

Объединение (1) и (2)

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = 2 \text{ - единственное решение (по т. Виета)}$$

$x = \pm\sqrt{2}$

$y = \pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Всего узлов внутри 64^2 №5

Считаем так: 1) Возьмём узел на прямой $y=x$

их 64

С каждой из них можно взять в пару

$64^2-2\cdot 64+1=63^2$

узлов (нельзя взять 63 на одной с ним горизонтали и сам выбранный узел)

Итого таких пар: $64\cdot 63^2$

2) Аналогично, пар, где один из узлов на $y=65-x$: $\underline{64\cdot 63^2}$

3) При этом посчитаны дважды

а) пары, где один из узлов на $y=x$, другой на $y=65-x$, таких $\underline{64\cdot 62}$

С каждым узлом на $y=x$ подходит $64-2$ узла, с прямой $y=65-x$)

б) пары, где оба узла на $y=x$, таких $C_{64}^2=\frac{64\cdot 63}{2}$

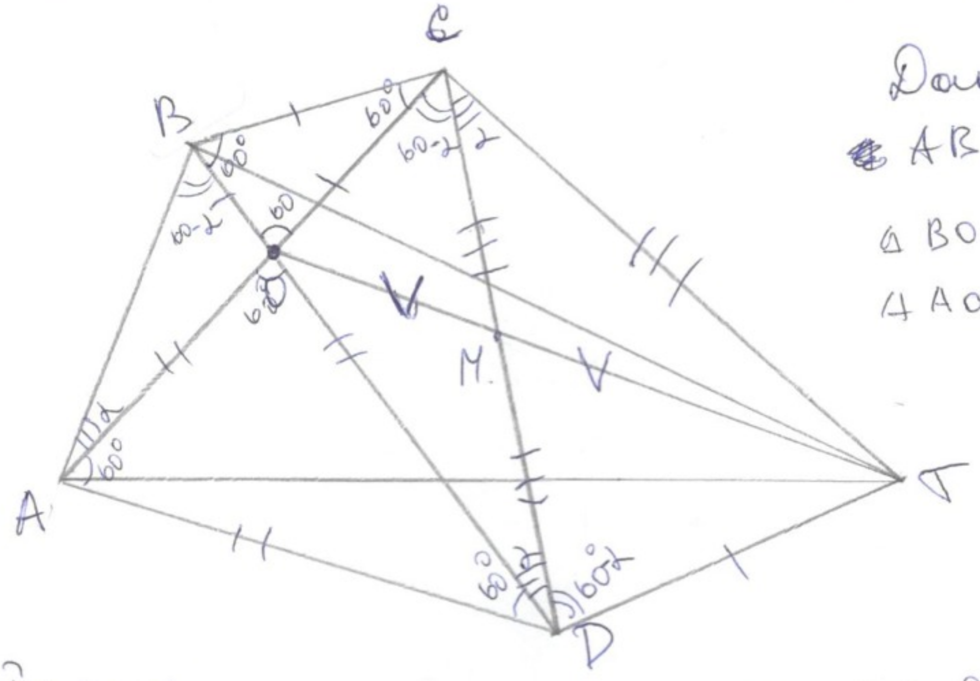
в) пары, где оба узла на $y=65-x$ $C_{64}^2=\frac{64\cdot 63}{2}$

Итого, искомых пар: $64\cdot 63^2\cdot 2-64\cdot 62-64\cdot 63=$

$=64(63^2\cdot 2-62-63)=500\,032$

Ответ: 500 032

№6



Дано:
ABCD - выпуклый четырёхуг.
△ BOC - правильный
△ AOD - правильный

Решение:

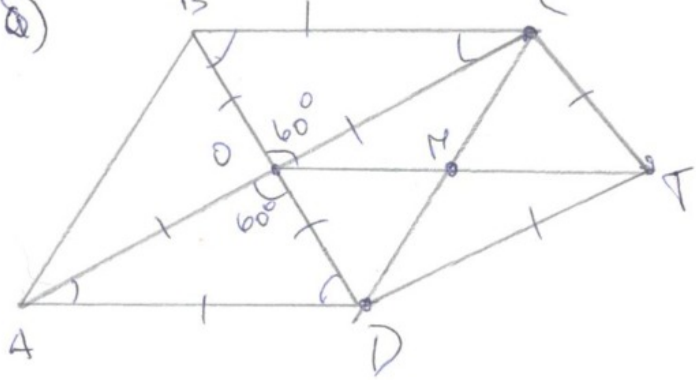
1) $\triangle ABO = \triangle DCO$ (т.к $BO = OC$, $AO = OD$, $\angle BOA = \angle COD$) $\Rightarrow$
$AB = CD$

2) $\triangle CMT = \triangle DMO$ $\Rightarrow OM = MT$, $CM = MD \Rightarrow CTDO$ - параллелограмм
$BD \parallel CT$, $CO \parallel DT$

3) Если $\angle BAO = \alpha$, то $\angle ABO = 60° - \alpha$ | $\Rightarrow \angle TDM = 60° - \alpha$
$\angle OCD = 60° - \alpha$, $\angle CDO = \alpha$
$\angle CBO = 60° = \angle ODA \Rightarrow CB \parallel AD$
Тогда ABCD - равнобедренная трапеция или параллелограмм

Если параллелограмм

б)

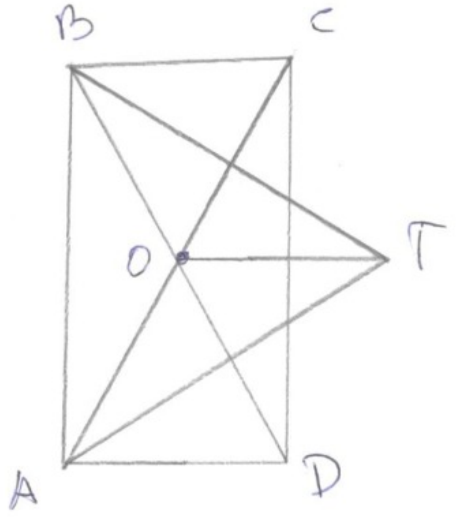


тогда CTDO - ромб
$\angle OBA = \angle OAB = \frac{180-120}{2} = 30°$

1

211006768 (U805055 M1273658)

ABCD-прямоугольник



Т.к ABCD-~~…~~ прямоугольник

тс $OT \perp CD$ и T лежит

на серединном перпендикуляре

к OCD => и к AB => BT=AT

$\angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$

Тогда $TM = \frac{3}{2} AD$

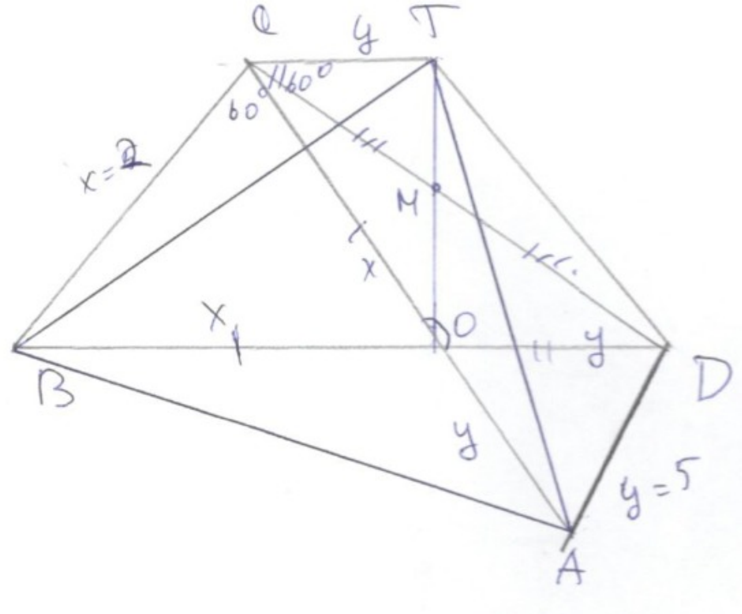
$BM = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} OB =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow \frac{TM}{BM} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow tg \angle TBM = \sqrt{3} \Rightarrow \angle TBM = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TAB = 60^\circ \Rightarrow \Delta TAB$ — правильный

ABCD-трапеция



OCTD-параллелограм

т.к диагонали посередине

⇓ BCTD-трапеция

$TD \parallel AC \Rightarrow$ ACTD-трапеция,

она равнобедр, т.к

$\angle OCT = \angle COB = 60^\circ$

$\angle TCO = \angle COB = 60^\circ = \angle TDO$

$\Delta AOB = \Delta ADT$ по I пр

AO = AD = y (стороны равн. Δ)

BA = AT

BO = CO = TD = x

стороны ∠ стороны пар-мма

Углы между ними по 120°

(2)

ΔBCT: BC=x, CT=y, $\angle BCT = 120^\circ$

Этот Δ равен $\Delta AOB = \Delta ADT \Rightarrow$

BA = AT = BT

$AB = \sqrt{25 + 4 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{39}$

$S_{AB\dots} = \frac{\dots}{4}$; $S_{BOC} = \frac{\dots\sqrt{3}}{4}$; $S_{DOA} = \frac{4\sqrt{3}}{4}$, $2 \cdot S = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{4}$ $49\sqrt{3}/4$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$$

3

Ответ: 8) $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{39}{49}$