Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006636**

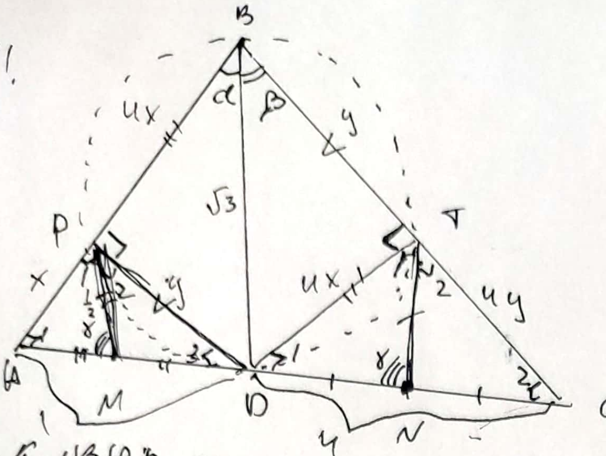
ID профиля: **377973**

Вариант 11

(!)

Чистовик

№1



Дано: $\triangle ABC$, окр. (BD - диам.), окр. $\cap AB = P$, $\cap BC = T$; M - сер. AD, N - сер. DC, $PM \parallel NT$.

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 2$, $BD = \sqrt{3}$.

Найти: а) $\angle ABC$; б) $S_{\triangle ABC}$.

Решение: а) Проведём PD и DT.

Т.к. $\angle BPD$ опир. на BD - диаметр, то $\angle BPD = 90^\circ$, аналогично $\angle BTD = 90^\circ$
впис. угол в окр-и

$\Downarrow$

$\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. M и N - середины гипотенуз то по т. о равенстве медианы гипотенузы её половине $TN = DN = NC$; $AM = PM = MD$ - I

по усл. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$ (как соответ.).

$AM = PM \Rightarrow \angle PAM = \angle 1 = \angle APM = \frac{180^\circ - \angle AMP}{2}$
(р/б $\triangle APM$)

$DN = TN \Rightarrow \angle TDN = \angle NDT = \frac{180^\circ - \angle DNT}{2}$
(р/б $\triangle DNT$)

$\Rightarrow \angle TDN = \angle 1 = \angle PAM$

$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ по углам $\angle PAM$ и $\angle TDC \Rightarrow \angle PDA = \angle TCD = \angle 2$
(прямоуг.) - II

Тогда $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\triangle ABC$: $\angle ABC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = \underbrace{90^\circ}$ - а). б): $\Rightarrow$ BPDT - прямоугольник ($\angle BPD = \angle BTD = \angle PBT = 90^\circ \Rightarrow \angle PDT = 90^\circ$). - III

Из I: $AM + MD = AD = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $DC = 2 \cdot 2 = 4$; из II $\frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{4}$

Пусть $AP = x \rightarrow DT = 4x$
$PD = y \rightarrow TC = 4y$. прямоуг. $\triangle PBD$: $PB = DT$ из III тогда по т. Пифагора $(4x)^2 + y^2 = BD^2 = 3$

$\triangle APD$ по т. Пиф-а $x^2 + y^2 = AD^2 = 1$

(2) Чистовик

Решим получ. сист-у:

$$\begin{cases}16x^2+y^2=3\\ x^2+y^2=1\end{cases} \; - \to 15x^2=2$$

$$x^2=\frac{2}{15}$$

$$x=\sqrt{\frac{2}{15}} \longrightarrow y=\sqrt{\frac{13}{15}}$$

$\begin{cases}x<0\\ y<0\end{cases}$ не рассматриваются)

из полученного ранее $AB=PB+AP=5x$

$BC=BT+TC=5y$

$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{5\cdot\sqrt{\frac{2}{15}}\cdot 5\sqrt{\frac{13}{15}}}{2}=\frac{25\cdot\sqrt{26}}{2\cdot 15}=\frac{5}{6}\sqrt{26}$ – б)

(как прямоуг.)

Ответ: а) $\angle ABC=90^\circ$; б) $S_{\triangle ABC}=\frac{5}{6}\sqrt{26}$.

N2. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

ОДЗ: $-2\leqslant x\leqslant 3$

$6+x-x^2=(3-x)(x+2)$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{(3-x)(x+2)}-3$ возведём в квадрат ~~ОДЗ~~:

$\operatorname{sign}(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})=\operatorname{sign}(2\sqrt{(3-x)(x+2)}-3)$

$$\cancel{x}+2-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-\cancel{x}=4(3-x)(x+2)-12\sqrt{(3-x)(x+2)}+9$$

$$4\underbrace{(3-x)(x+2)}_{a^2}-10\underbrace{\sqrt{(3-x)(x+2)}}_{=a}+4=0 \quad |:2$$

$$2a^2-5a+2=0$$

$D=25-4\cdot2\cdot2=9$

$a=\frac{5\pm3}{4}=2/\frac{1}{2}\;=>$

оба $a>0$ => они корни могут подойти

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{(3-x)(x+2)}=2\\ \sqrt{(3-x)(x+2)}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \quad | \text{ оба в кв.}$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l}6+x-x^2=4\\ 6+x-x^2=\frac{1}{4}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0 \;(1)\\ x^2-x-\frac{23}{4}=0\;(2)\end{array}\right.$$

(1): $(x-2)(x+1)=0$

$x_1=2$ – подходит

$x_2=-1$ – не подходит при подстановке (и по ОДЗ)

Чистовик

3. (2): $x^2 - x - \frac{23}{4} = 0$

$D = 1 + 4 \cdot \frac{23}{4} = 24$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{6}}{2}$ – оба подходят

Ответ: $x = 2$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{2}$

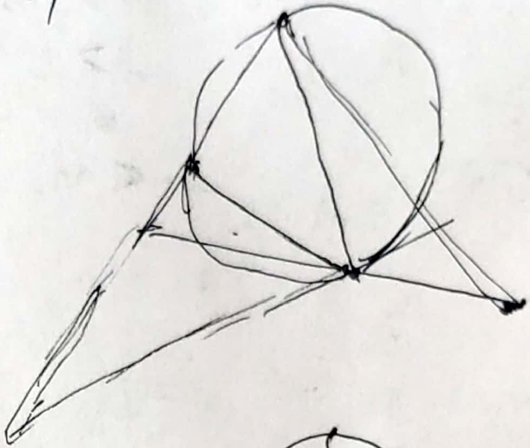
$\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$ $\quad (\ )^2 \quad \boxed{-2 \le x \le 3}$

$\cancel{x}+2+3-\cancel{x} = 4(3-x)(x+2) - 12\sqrt{(3-x)(x+2)} + 9$
$-2\sqrt{(3-x)(x+2)}$

$x = 2$ – корень!

$5 = 4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4$

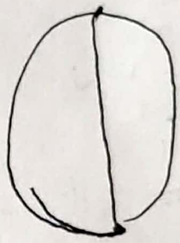
$5\sqrt{(3-x)(x+2)} = 2(3-x)(x+2) + 2$



$2a^2 - 5a + 2 = 0$

$25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$a = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 / \frac{1}{2}$



$3 = 2^2 - 1$

$BD = \sqrt{3}$

$x^2 - x - 4 = 0 \quad / -\frac{1}{2}$

$1 + 16 = 17$

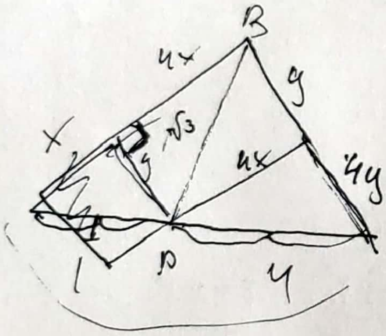
$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

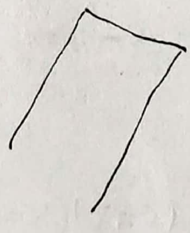
$x^2 - x - 5{,}5 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 5{,}5 = 23$

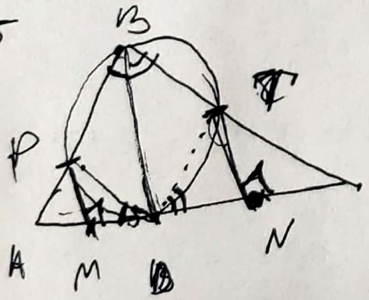
$\frac{1 \pm \sqrt{23}}{2}$

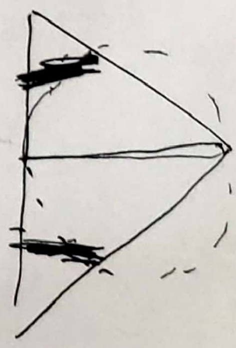
$1+2 = 90 \quad + \quad 2+3 = 180$

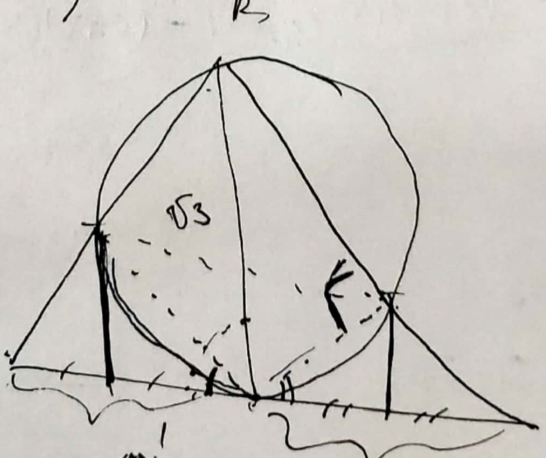




5



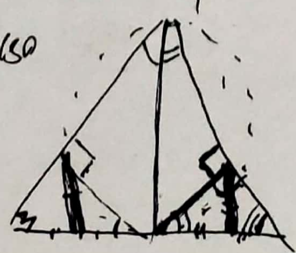




$AD^2 = PB \cdot AP$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 16x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$\angle ABC = 180$



$= 2\sqrt{5} \cdot 0 = 3$

$\sqrt{5} + 0 =$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+\sqrt{24}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-\sqrt{24}}{2}$

$\sqrt{24} < 5$

$2\sqrt{6}$

$N2\quad \sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$ $\quad x\geq -2$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{-(x^2-x-6)}$ $\quad x\leq 3$

$x\in[-2;3]$

$-(x-3)(x+2)$ $\quad x\in[\ -2\ \ 3$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{(3-x)(x+2)}$ $\quad x\in[-2;3]$

$\cancel{x+y+3=2xy}$

$\cancel{4}3$

$x+2-3+x=4(3-x)(x+2)-12\sqrt{(3-x)(x+2)}+9$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}\rightarrow$ $\quad x-y+3=2xy\ \ 3\cdot|x+y$

x^2-x-6 $\quad x^2-y^2=\cancel{(2xy+3)(x+y)}$

$(x-3)(x+2)$

$(3-x)$

$1-\frac{y}{x}=2y-\frac{3}{x}$

$x-y+3=2xy$

$x-2xy-y+3=0$

$x(1-2y)+(1-2y)\cdot\frac{1}{2}+2{,}5=0$ $\quad \frac{1-2\sqrt{6}}{2}\vee -2$

$(1-2y)(x+\frac{1}{2})+2{,}5=0$ $\quad 1-2\sqrt{6}\vee -4$

$-2\sqrt{6}\ \cancel{\vee}\ 3$

$-2\sqrt{6}\ \vee\ -5$

$12\sqrt{(3-x)(x+2)}=36+2x-4x^2+9$

$2\sqrt{6}\ \vee\ 5$ $\quad 1-2\sqrt{6}\ \vee\ 4$

$4\cdot 6\ \vee\ 25$ $\quad \frac{1-2\sqrt{6}}{2}\ \vee\ 2$

$2x-1=\overset{34}{25}+2x-4x^2\ 9-12\sqrt{\ldots}$

$12\sqrt{(3-x)(x+2)}=34+2x-4x^2$

$6\sqrt{(3-x)(x+2)}=17+x-2x^2$ $\quad 1+4\cdot2\cdot17$

$36(3-x)(x+2)=\cancel{(17+x-2x^2)^2}$

$1\leq 2+3$

$2=2\sqrt{4}$

$2=3=1$

$\sqrt{-2+3=2\sqrt{4}}$

$x^2-2xy+y^2=4x^2y^2-12xy+9$

$x-y+3=2xy$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006636**

ID профиля: **377973**

Вариант 11

① Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$ ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases} - \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \quad (2) \\ (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15 \quad (1) \end{cases}$

(1): $x^2+y^2 = a;\ a > 0$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15 \quad | \cdot a$

$a^3 - 15a - 4 = 0$ $a = 4$ – корень

$\Updownarrow$

$(a-4)\underbrace{(a^2+4a+1)} = 0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \underline{a^3-4a^2} & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a-4 & \\ \underline{4a^2-16a} & \\ a-4 & \\ \underline{a-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$D = 16 - 4 \cdot 1 = 12$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

оба корня $< 0 \Rightarrow a = 4$ – единственный корень

$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \quad (2) \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$ (2): $\frac{4}{4} + x^2y^2 = 5$

$x^2y^2 = 4$

$\begin{cases} x^2y^2 = 4 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{array}{|l} x' = x^2,\ x' > 0 \\ y' = y^2,\ y' > 0 \end{array}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x'y' = 4 \\ x'+y' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'y' = 4 \\ y' = 4 - x' \end{cases} \Leftrightarrow x'(4-x') = 4$

$x'^2 - 4x' + 4 = 0$

$(x'-2)^2 = 0$

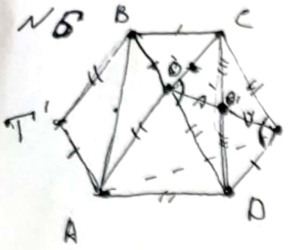
$\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 2 \end{cases}$

(2) Чистовик

$$\begin{cases} x^2=2 \\ y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

№6



Дано: $ABCD$: $BD\cap AC=O$; $\triangle BOC$ - правильн. как и $\triangle AOD$

T - симметричная O относит. O' - середины CD

а) Д-ть: $\triangle ABT$ - правильный

б) Найти $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$.

Решение: а) из построения т. T (симметрия O относит. O')

$$\left.\begin{aligned} &O'T=OO' \\ &\angle CO'O=\angle TO'D \text{ (верт.)} \\ &CO'=O'D \\ &\text{(}O'\text{-сер. }CD\text{ по усл.)} \end{aligned}\right\} \overset{I}{\Rightarrow} \triangle COO'=\triangle TO'D. \text{ аналогично } O'DO=CO'T$$

и как следствие $\triangle COD=\triangle CTD$ *

$\Leftarrow \triangle COT=\triangle OTD$ (по 3 сторонам) $\Leftarrow$ $\underline{COTD \text{ - параллелограмм}}$ по $CT\parallel OD$ ($\angle TCD=\angle ODC$ из $\triangle COD=\triangle CTD$) и $OC=TD$, $OD=CT$

$$\left.\begin{aligned} &\angle OCT=\angle ODT; \\ &\angle BCO=\angle ADO=60^\circ \\ &\text{из правильности} \\ &\triangle BOC \text{ и } \triangle AOD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle BCT=\angle BCO+\angle OCT=\angle ADO+\angle ODT=\angle ADT$$

$$\left.\begin{aligned} &\angle BCT=\angle ADT \\ &BC=OC=TD \\ &AD=OD=CT \end{aligned}\right\} \begin{cases} BC=TD \\ AD=CT \\ \angle BCT=\angle ADT \end{cases} \overset{I}{\Rightarrow} \triangle BCT=\triangle ADT \Rightarrow BT=AT$$

Построим аналогичную точке T T' симметрично O относит. середины AB.

в силу симметрии получим, аналогично* $\triangle AT'B=\triangle BOA$ ($=\triangle OCD$)

$$\begin{cases} \triangle BOA=\triangle OCD \text{ из } \begin{pmatrix} BC=OC \\ \angle BOA=\angle COD \text{ (верт.)} \\ AO=OD \end{pmatrix} \\ \triangle BOA=\triangle T'BA \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\triangle T'BA=\triangle OCD=\triangle CTD$ ** $\boxtimes$

б) $BCTD$: $CT\parallel OD$ из $COTD$-параллелограмм $\Rightarrow BCTD$ - трапеция

Чистовик

(3) Т.К. $BC=TD$ из ранее доказанного, то $BCTD$ – р/б трапеция $\Rightarrow \triangle BCT = \triangle CTD$

($BC=TD$
CT – общ.
$\angle BCT = \angle CTD$
из р/б трап.)

из ** $\triangle T'BA = \triangle CTD = \triangle BCT \Rightarrow AB = BT'$

$$\begin{cases} AB = BT \\ BT = AT \end{cases} \Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$$ равностор. по определ. ч.т.д.

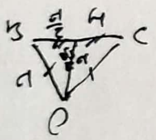
б) $$\left.\begin{aligned} S_{\triangle ABT} &= S_{T'BCTDA} - 3S_{\triangle BCT} \\ S_{ABCD} &= S_{T'BCTDA} - 2S_{\triangle BCT} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{S_{\triangle BCT}}{S_{ABCD}} \quad 3*$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle BCT} + S_{BOC} + S_{\triangle AOD}.$$
$(\triangle BOA = \triangle OCD = \triangle BCT)$

$$S_{\triangle BCT} = S_{\triangle CTD} = S_{\triangle COD} = \frac{OC \cdot OD \cdot \sin \cancel{\angle} \angle BOC}{2} = \frac{OC \cdot OD \cdot \sin\angle BOC}{2} =$$
$(\triangle BCT = \triangle CTD = \triangle COD)$

$$= \frac{BC \cdot AD \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle BOC} = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}_{S_{OBH}} \cdot \underset{\substack{+S_{HOC} \\ = \\ S_{OBH}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}$$



$$S_{\triangle AOD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25$$

из 3*: $$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{\frac{5}{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25} = 1 - \frac{5}{\underset{10}{2 \cdot 5} + \underset{12}{2} + \underset{12,5}{\frac{25}{2}}} = 1 - \frac{5}{24{,}5} = \frac{39}{49}$$

Ответ: а) доказано б) $\frac{\triangle S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$

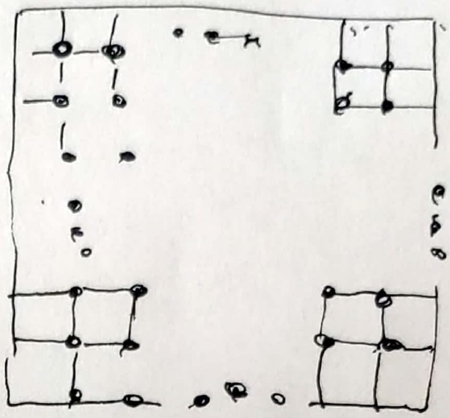
(4) №5.

Чистовик

Переформулируем условие: узел лежит на $y=x$ / $y=65-x$ $\Leftrightarrow$ узел лежит на 1 из диагоналей квадрата.

Узлы не лежат на 1 прямой || оси $\Leftrightarrow$ узлы не лежат на 1 горизонтали или вертикали.

Узлов, которые можно выбрать из усл-я: вз нее каждой линии и горизонтали.



Кол-во узлов на диагоналях — $64+64$ ~~−1 (посчитанный дважды узел в центре)~~

на разн. вертик. — на разн. горизонт.

Итого 128.

Заметим, что каждый узел, аналогично ладье на шахматном поле, будет не давать возможности ~~выбрать~~ выбрать второй узел одинаковое кол-во для каждого положения на диагонали, т.е. для каждого ~~положения~~ узла на диагонали можно выбрать второй одинаковое кол-во вариантов, равным $64^2-63-64$ — кол-во лишних на вертикали

64^2 — кол-во способов выбрать какую-либо клетку на поле (какой-либо узел)

63 — кол-во лишних, на горизонтали

Тогда $128\cdot(64^2-63-64)$ — кол-во способов выбрать 2 узла по условию.

2

$$128\cdot(64(64-1)-(64-1)) = 128\cdot(64-1)(64-1) = 128\cdot 63^2 = 487\,792$$

Ответ: кол-во способов — 487 792

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20$

$a>0$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15 \quad |\cdot a$

$a^3 - 15a - 4 = 0$

$a=4 \quad 4^3 - 4^2(15+1) = 0$

$\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{a} - \frac{4}{\underbrace{x^2+y^2}_{a}} = 15$

$(x+y) \neq 0 \quad \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array}\right.$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15 \quad |\cdot a$

$a^3 - 15a - 4 = 0$

$$\begin{array}{l|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \hline a^3-4a^2 & a^2+4a+1 \\ \hline 4a^2-15a-4 & \\ 4a^2-16a & \\ \hline a-4 & \end{array}$$

$D = 16-4 = 12$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} =$

$= -2 \pm \sqrt{3} =$

$= -2 + \sqrt{3}$

$\frac{4}{x^2+y^2} = 5 - x^2y^2$

$\underbrace{x^2+y^2}_{a} = \frac{4}{5-x^2y^2}$

$(a-4)\ldots = 0$

$a = 4$

$x^2+y^2 = 4$

$4 = \frac{4}{5-x^2y^2}$

$5 - x^2y^2 = 1$

$x^2y^2 = 4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

$y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2}$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x' = 2$

$$\begin{cases} x'+y'=4 \\ x'y'=4 \end{cases}$$

$x' = 4 - y'$

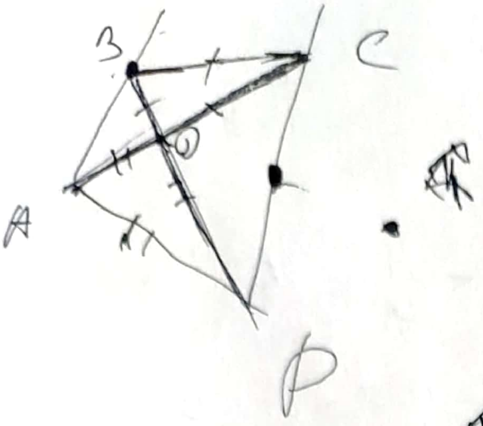
$(4-y')y' = 4$

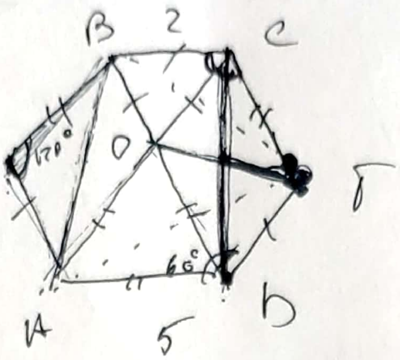
$4y' - y'^2 = 4$

$y'^2 - 4y' + 4 = 0$

$(y'-2)^2 = 0$

$y' = 2$



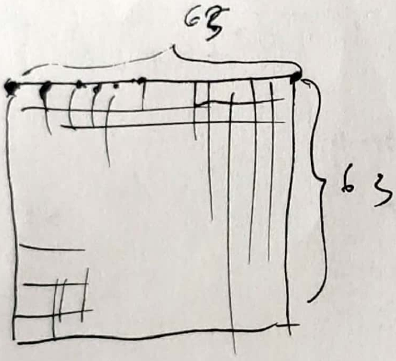


63
× 63
189
+ 378
3889
× 128
12112
+ 7778
3889
487792

2) BC = 2

AD = 5

N5.

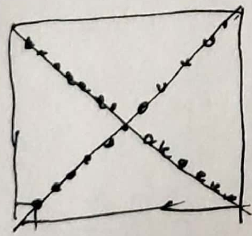


63

63+62

125 узлов на 1-ой диаг-и

y = x



$\frac{125 \cdot 62^2}{2}$ 62