Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006587**

ID профиля: **170533**

Вариант 11

$5a^2+12$ вар 11 черновик лист 6

$5a^2+4a(3x+y)+4(2x^2+2xy+y^2)=0$

$D=16(9x^2+6xy+y^2)-5\cdot16(2x^2+2xy+y^2)=$

$=16(9x^2-10x^2+6xy-10xy+y^2-5y^2)=$

$=16(-x^2-4xy-4y^2)=$

$=-16(x+2y)$

$x+2y=0$

$x=-2y$

$a=\frac{-4(3x+y)}{10}=$

$x=0$
$y=0$

$=-\frac{2(3x+y)}{5}=\frac{-2(-6y+y)}{5}=2y$

$a=2y$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$a=2y$ $=-x$

$x+2y=0$

$2y=-x$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay$

$x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=y$

$y=0$
$a=0$
$x=0$

$x^2-2ax-4(a^2+\frac{4}{a})=$

$D=4a^2-4a^2-\frac{16}{a}=0$

$4a^2-4a^3-\frac{16}{a}=0$

$15y^2$

$20y^2+8y(-5y)+4(8y^2-4y^2+y^2)=0$

$-20y^2+60y^2=0$

$60y^2=0.$

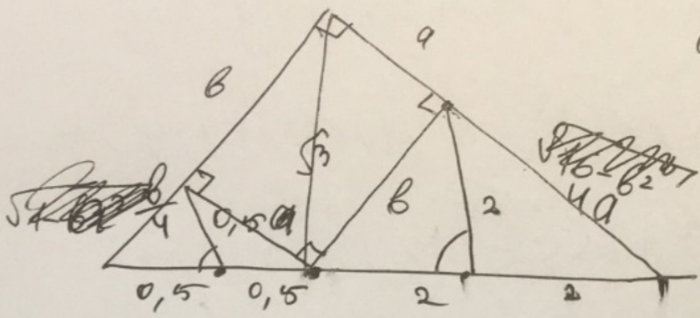
$-x^3+2x^3-\frac{a^2}{2}+a^3+4=0$

$y=0$

$\cancel{-x^3+2x^3}-\frac{x^2}{2}\cancel{+x^3}+4=0$

211006587 (U170533 M1275382)

черновик лист 7



$a^2+b^2=3$

$16-b^2$

$\left(\frac{5b}{4}\right)^2+5a^2=25$

$\frac{25b^2}{16}+25a^2=25$

$a^2+\frac{b^2}{16}=1$

$\left(b+\sqrt{1-a^2}\right)^2+\left(a+\sqrt{16-b^2}\right)^2=25$

$\begin{array}{r} 25 \\ -19 \\ \hline 6 \end{array}$

$\cancel{b^2}+2b\sqrt{1-a^2}+1-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+2a\sqrt{16-b^2}+16-\cancel{b^2}=25$

$2b\sqrt{1-a^2}+2a\sqrt{16-b^2}=6$

$b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{16-b^2}=3$

$a^2(16-b^2)+b^2(1-a^2)+2ab\sqrt{(1-a^2)(16-b^2)}=9$

$a^2+b^2=3$

$16a^2+b^2=16$

$15a^2=13$

$b^2=16-16a^2$

$a^2=\frac{13}{15}$

$b^2=3-a^2$

$b^2=3-\frac{13}{15}$

$b^2=\frac{45-13}{15}=\frac{32}{15}$

$\frac{1}{2}\cdot 5a\cdot\frac{5b}{4}=$

$=\frac{1}{8}\cdot 25\cdot\sqrt{\frac{13\cdot 32}{15}}$

211006587 (U170533 M1275382)

Чистовик

лист. 1

№1 (вариант 11)

Дано:

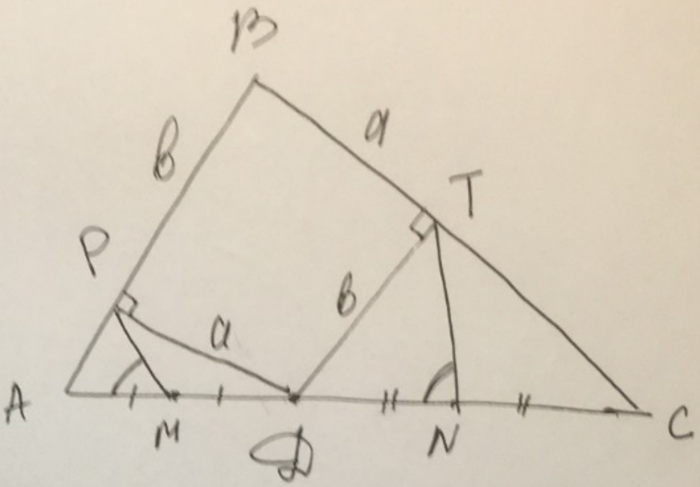
$\triangle ABC$,

т. $D \in AC$

Окр. с диам. BD пересек. AB и BC в т. P и T соотв.

т. M и т. N – ср. AD и CD

$PM \parallel TN$.



а) Найти $\angle ABC$

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 2$; $BD = \sqrt{3}$.

$S_{\triangle ABC}$ – ?

Решение

а) BD – диаметр $\Rightarrow$ $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$ (вписанные углы, опир. на диам.), тогда $\angle APD = \angle CTD = 90^\circ$ (смежные с $\angle DPB$ и $\angle BTD$). Тогда PM и TN – медианы прямоуг. $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ соотв. $\Rightarrow$

$PM = AM = MD$; $TN = ND = NC$.

Пусть $\angle AMP = 2\alpha$, тогда $\angle DNT = 2\alpha$ (соотв. углы при $PM \parallel TN$), тогда

$\angle NCT = \angle NTC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$, $\angle PAM = \angle APM = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} =$

($\triangle NTC$ – р/б, $NT = NC$) $= 90^\circ - \alpha$

211006587 (U170533 M1275382)

Т.е $\angle ABC = 180° - (90° - \alpha + \alpha) = 90°$.

б) $AM = PM$, $DN = TN$, $\angle AMP = \angle DNT$ $\Rightarrow$ $\triangle AMP \sim \triangle DNT$ (по 2 стор. и углу между ними)

Тогда $\dfrac{AP}{TD} = \dfrac{TN}{MP} = 4$.

Пусть $BT = a$; $BP = b$.

Заметим, что 4-уг. $DPBT$ – прямоугольник $\Rightarrow BT = PD = a$; $BP = TD = b$.

Тогда $AP = \dfrac{b}{4}$; $TC = 4a$.

По т. Пиф.: $a^2 + b^2 = BD^2$ (в $\triangle PBT$)

$a^2 + b^2 = 3$.

$$\left(\frac{5b}{4}\right)^2 + (5a)^2 = AC^2$$

$$\left(\frac{5b}{4}\right)^2 + (5a)^2 = 25$$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a^2 + \dfrac{b^2}{16} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ 16a^2 + b^2 = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ 15a^2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} b^2 = \dfrac{32}{15} \\ a^2 = \dfrac{13}{15}. \end{cases}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5b}{4} \cdot 5a = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{25}{8} \cdot \sqrt{\frac{13 \cdot 32}{15^2}} =$$

$$= \frac{25}{8} \cdot \frac{4\sqrt{26}}{15} = \frac{5\sqrt{26}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{26}}{6}.$$

Ответ: а) $90°$; б) $\dfrac{5\sqrt{26}}{6}$

(вар 11) №2 Чистовик лист 3

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{(x+2)(3-x)}-3\\ x+2\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2+3-x-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=4(x+2)(3-x)-12\sqrt{(x+2)(3-x)}+\\ +9\\ 3\geq x\geq -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4(x+2)(3-x)-10\sqrt{(x+2)(3-x)}+4=0\\ 3\geq x\geq -2\end{cases}$$

Пусть $t=\sqrt{(x+2)(3-x)}$ $(t\geq 0)$.

$$4t^2-10t+4=0$$

$$2t^2-5t+2=0$$

$$D=25-2\cdot 2\cdot 4=9$$

$$\left[\begin{array}{l}t=\frac{5+3}{4}\\ t=\frac{5-3}{4}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=0,5\end{array}\right.\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{(x+2)(3-x)}=2\\ \sqrt{(x+2)(3-x)}=0,5\end{array}\right.\\ -2\leq x\leq 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}6+x-x^2=4\\ 6+x-x^2=0,25\end{array}\right.\\ -2\leq x\leq 3\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ x^2-x-5,75=0\end{array}\right.\\ -2\leq x\leq 3\end{cases}$$

(вар. 11) №2 Чистовик лист 4

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} D_1 = 1+2\cdot 4 = 9 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+3}{2} \\ x = \dfrac{1-3}{2} \end{array}\right. \\ D_2 = 1+5{,}75\cdot 4 = 1+\dfrac{23}{4}\cdot 4 = 24 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+2\sqrt{6}}{2} \\ x = \dfrac{1-2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = 0{,}5+\sqrt{6} \\ x = 0{,}5-\sqrt{6} \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 3 \end{array}\right.$$

$-2 \le 2 \le 3$ – подход.

$-2 \le -1 \le 3$ – подх.

$-2 \le 0{,}5+\sqrt{6} < 0{,}5+\sqrt{6{,}25} = 3$ подх.

$2 = 0{,}5-\sqrt{6{,}25} < 0{,}5-\sqrt{6} \le 3.$

Ответ: -1; 2; $0{,}5+\sqrt{6}$; $0{,}5-\sqrt{6}$.

(вар 11) №3 чистовик лист 5

Рассмотрим относ. a:

$$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0 \quad (1)$$

$$5a^2+4a(3x+y)+4(2x^2+2xy+y^2)=0$$

$$D=16(3x+y)^2-5\cdot16(2x^2+2xy+y^2)=$$

$$=16(9x^2+6xy+y^2-10x^2-10xy-5y^2)=$$

$$=16(-x^2-4xy-4y^2)=-16(x+2y)^2$$

Мы ищем $a\in\mathbb{R}$, но при $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$:

$-16(x+2y)^2\le 0$,

а $D\ge0$ (если есть действ. корни).

Т.е: $D=0$; $x+2y=0$. $x=-2y$

Тогда $a=\dfrac{-4(3x+y)}{10}$

$$\frac{-4(3x+y)}{10}=\frac{-4(-6y+y)}{10}=2y.$$

$a=2y$. ~~или~~ или $a=-x$. ~~Тогда др-ие (1) имеет вид:~~

~~$20y^2 \ldots -48y^2+4\cdot(2y)\cdot y+\ldots=0$~~

Т.е A им. коорд. $\left(-a;\ \frac{a}{2}\right)$.

Рассмотрим параболу:

211006587 (U170533 M1275382)

(вар 11) №3 чистовик лист 6

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

(если $a=0$ то $4\neq0$), $a\neq0$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay$

$x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=y$

Найдем коорд. вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ по формуле $\left(-\frac{b}{2a};\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

$-\frac{b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$

$c-\frac{b^2}{4a}=a^2+\frac{4}{a}-\frac{4a^2}{4}=\frac{4}{a}$.

т. B им. коорд. $\left(a;\ \frac{4}{a}\right)$.

Теперь рассм. 2 случая:

$$\begin{cases}\frac{4}{a}-3a>4 \ (\text{т.B}) \\ \frac{a}{2}+3a<4 \ (\text{т.A})\end{cases} (1) \qquad \begin{cases}\frac{a}{2}+3a>4 \ (\text{т.A}) \\ \frac{4}{a}-3a<4 \ (\text{т.B})\end{cases}$$

Система (1):
$$\begin{cases}\frac{4}{a}>3a-4 \\ 3{,}5a<4\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4>3a^2-4a \\ a<\frac{8}{7} \\ a\geq0\end{cases} \\ \begin{cases}4<3a^2-4a \\ a<\frac{8}{7} \\ a\leq0\end{cases}\end{array}\right.$$

№3 (вар 11) чистовик лист 7

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \\ a < \frac{8}{7} \\ a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left[0; \frac{8}{7}\right). \\ \begin{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty). \\ a < \frac{8}{7} \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right). \end{array}\right.$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[0; \frac{8}{7}\right).$$

Система (2):

$$\cancel{3,5} \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ \frac{4}{a} < 3a+4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ 4 < 3a^2+4a \\ a \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ 4 > 3a^2+4a \\ a \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ a \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \\ a \geq 0 \end{cases} \rightarrow a \in \left(\frac{8}{7}; +\infty\right). \\ \begin{cases} a > \frac{8}{7} \\ a \in \left(-2; \frac{2}{3}\right) \\ a \leq 0 \end{cases} \rightarrow a \in \{\varnothing\}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[0; \frac{8}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{7}; +\infty\right).$

вар 11 черновик лист 1

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$5x^2+12x^2+4xy+8x^2+8xy+4y^2=0$

т. A

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

(парабола)

с верш. B

$a-?$

A и B по р. стор.

от $y-3x=4$

$4ay-12ax$

$\frac{2}{3}; -2$

$\frac{-4\pm 8}{6}$

$\cancel{8x^2+12ax}$

$\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2$

$16+3\cdot 4\cdot 4=$ 16

64

$8x^2+8xy+2y^2+2y^2+4ay+12ax+5a^2=0$

$2; -\frac{2}{3}$

$\frac{4\pm 8}{6}$

$12ax+2x^2$

$+2y^2$

$a(5a+12x+4y)$

$0{,}5-2{,}5$

$4ay$

$4y^2$

$a(5a+4(3x+y))$

$+3y^3$

-8

$12ax-4ay$ $6y^2$ $2y^2$ $(2x+y)^2$

$20-48\cancel{+8+32}$ $-16+4$

40

$4a^2+4ay+y^2$ $-12ax+4ay$

$5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}$

$+24ax+8x^2+8xy+(4y^2-4ay+a^2)$

$\cancel{12}$

$\sqrt{6}$ $3\cdot 15=45$ $2y^2$ $+y^2+$ $8x^2+8x$

$\frac{40}{35}=\frac{8}{7}$

$6{,}25$ $(15-13=32$

вар 11 черновик лист 2

$$2\sqrt{(x+2)(3-x)}-\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\,\cancel{+}3=0$$

$$2ab-a+b$$

$$(2a+\cancel{1})(\cancel{a}b-\tfrac{1}{2})=2ab-a+b-\tfrac{1}{2}$$

$$(2a+1)(b-0{,}5)-2{,}5=0$$

$$\cancel{(2\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{3-x}-0{,}5)=2{,}5.}$$

$$\cancel{\cancel{x}+2+3\cancel{x}-2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3=2(x+2)(3-x)}$$

$$\cancel{8-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=2(x+2)(3-x)}$$

$$D=1+4\cdot4=17$$

$$\cancel{2t^2+2t-8=0}$$

$$\cancel{t^2+t-4=0}$$

$$\cancel{x}+2+3-\cancel{x}-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=2(x+2)(3-x)+9-12\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$$2t^2-10t+4=0 \qquad D=25-2\cdot4=$$

$$t^2-5t+2=0 \qquad 25-\overset{8}{2\cdot4}=17$$

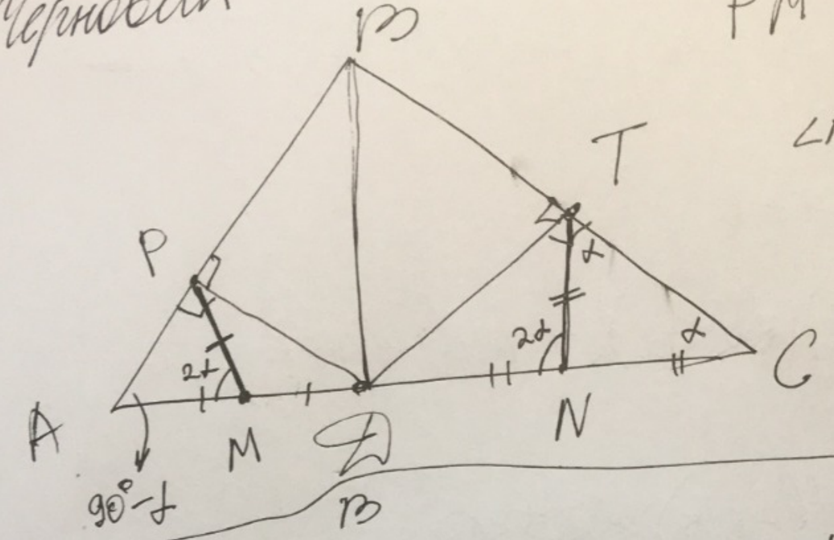
$$\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

211006587 (U170533 M1275382)

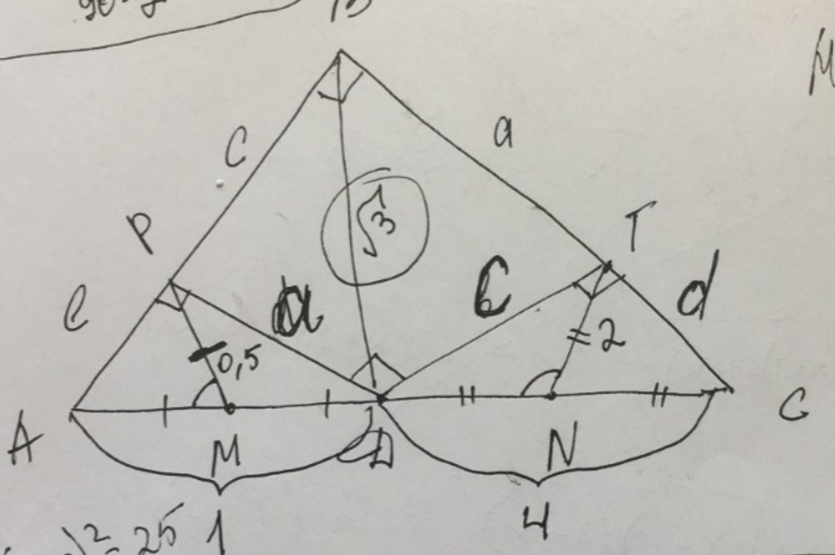
Черновик   вар 11   лист 3

$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$



$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$



$MP = \frac{1}{2}$

$NT = 2$

$BD = \sqrt{3}$

$S_{ABC} - ?$

$(a+d)^2 + (e+c)^2 = 25$

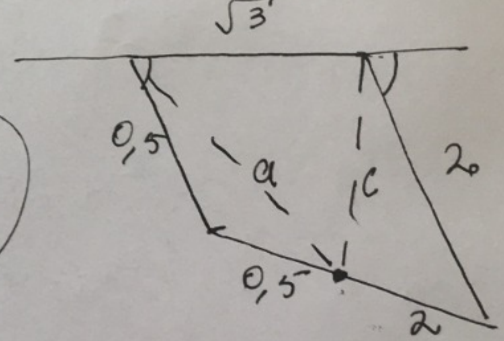
$\cancel{a^2+b^2=3}$

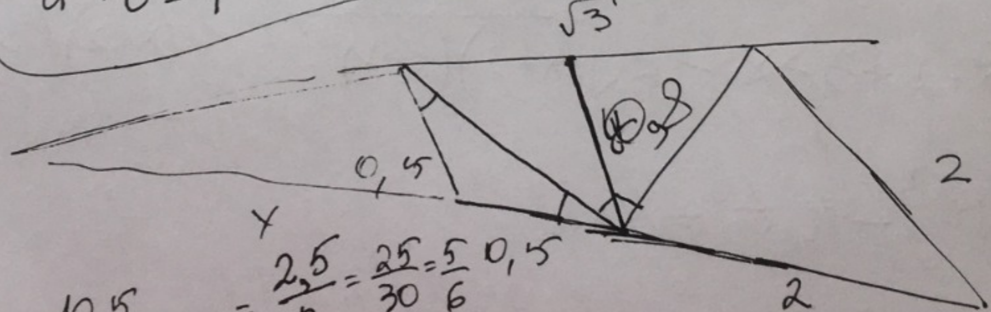
$\cancel{b^2+c^2=16}$

$a^2+c^2=3$

$c^2+d^2=16$

$a^2+e^2=1$





$\frac{12,5}{15} = x = \frac{2,5}{3} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ 0,5

$\frac{0,5}{x} = \frac{y\sqrt{3}}{0,5+x} = \frac{2}{x+2,5}$

$\frac{y}{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}} = \frac{0,5}{\frac{5}{6}}$

$0,5x + 1,25 = 2x$

$1,25 = 1,5x$

$\frac{3 \cdot 6y}{48} = 0,1 \cdot 6$

$y = 0,6 : 3 \cdot 4$

$y = 0,8$

211006587 (U170533 M1275382)

Черновик вар 11 $\frac{1}{2}(a+d)(e+c)$ – ? черновик лист 4

$a^2+2ad+d^2+e^2+2ec+c^2=25$

1 16

3

$17+2(ad+ec)=25$

$ad+ec=4$

$ae+de+ca+cd$

$d^2+2ad+e^2+2ec+3=25$

$\cancel{a+d}$

$-2\cdot 2$

d^2+e^2+3

$d^2+e^2=14$

$a^2+c^2=3$

$a^2+e^2=1$

$c^2+d^2=16$

$d^2+e^2=14$

$a^2=3-c^2$

$3-c^2+e^2=1$

$d^2=16-c^2$

$16-c^2+e^2=14$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{(x+2)(3-x)}-3$

211006587 (U170533 M1275382)

черновик лист 5 вар 11 $25x^2+12xy+4y^2=0$

$x+2y=0$

$\Rightarrow$

$y=0.$

$4ay-12ax$

$5a^2 +$

$+24ax$

$+8x^2+8xy+4y^2$

$x=0$

$a\neq 0$

$(y-3x)^2=$

$y^2-6xy+9x^2$

~~$a(5a+12x+4y$~~

~~$5a^2+a(12x+$~~

$5a^2+4(3x+y)a+4(2x^2+2xy+y^2)=0$

$a\neq 0$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay$

$D=16(3x+y)^2-4\cdot4\cdot5(2x^2+2xy+y^2)=$ ~~$9x^2+6xy+y^2$~~

$x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=y$

$16(9x^2+6xy+y^2)-5\cdot16(2x^2+2xy+y^2)=$

$-\frac{b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$ — коорд. x.

~~$4ac-b^2$~~

$a=-x$

$c-\frac{b^2}{4a}=a^2+\frac{4}{a}-\frac{4a^2}{4}=$

$=a^2+\frac{4}{a}-a^2=\frac{4}{a}$

$B\left(a;\frac{4}{a}\right)$

$-12x-4y$

$=16(9x^2+6xy+y^2-10x^2-10xy-5y^2)=$

$=16(-x^2-4xy-4y^2).$

$x=-2y$

$x+2y=0$

$$\frac{-4(3x+y)\pm4(x+2y)}{10}$$

$$\frac{-12x-4y}{10}$$

10

$x=-2y$

~~$y=0$~~

$$\frac{-12x+2x}{10}=-x$$

211006587 (U170533 M1275382)

Часть 2

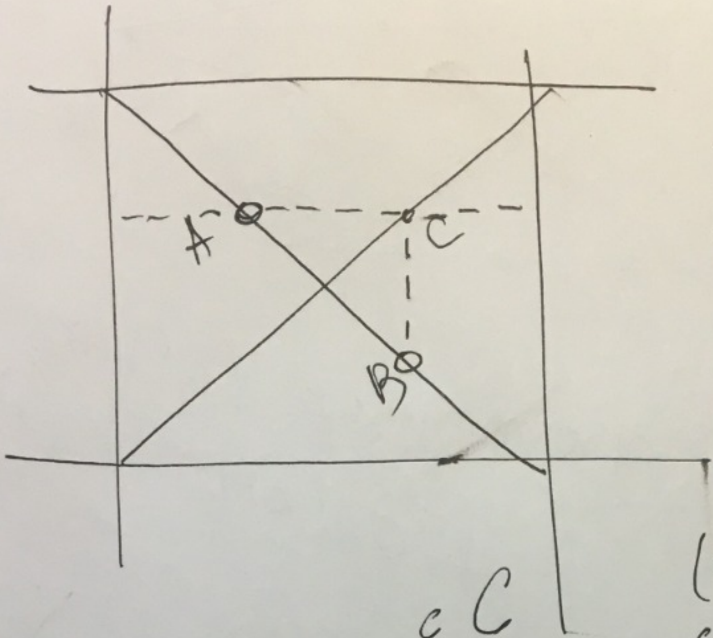
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

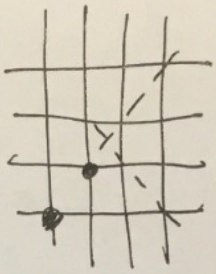
Шифр: **211006587**

ID профиля: **170533**

Вариант 11

черновик вар. 11 лист 3





(без A, B, C)

$-62-62$

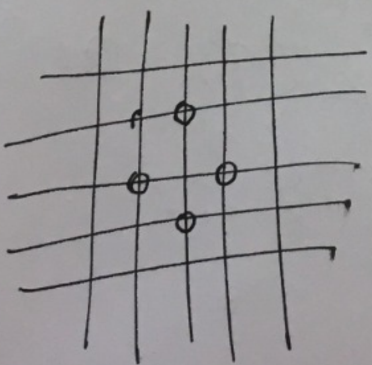
с C

$\underbrace{64^2}_{\text{всего}} - \underbrace{64}_{\text{диаг. 1}} - \underbrace{64}_{\text{диаг. 2}}$

$$64^2 - 64\cdot 2 - 62\cdot 2 = 64^2 - 126\cdot 2.$$

C_{128}^{1}

делить на 2 не надо.



$+$

C_{128}^{2}

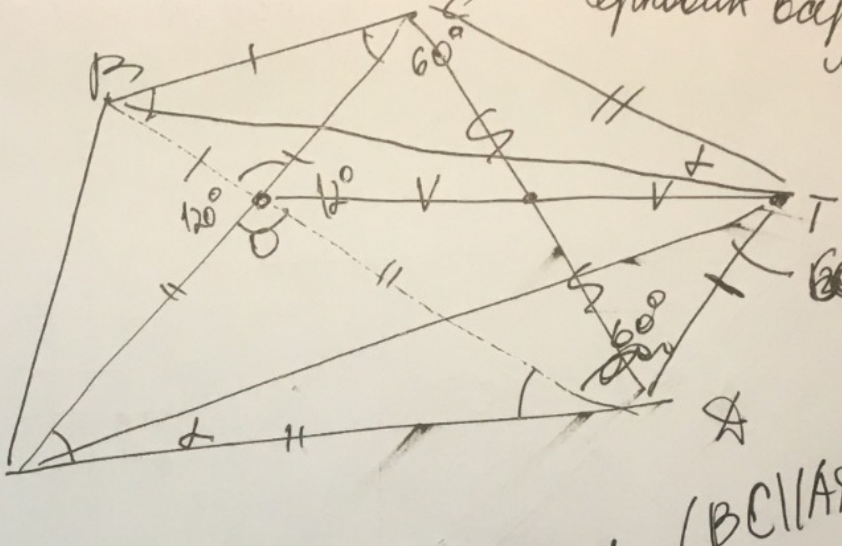
$128\cdot(64^2-$

$$128\cdot\left(64^2-126\cdot 2\right) + \frac{128\cdot 127}{\cancel{128}\cdot 2!} =$$

$$128\left(64^2-126\cdot 2+\frac{127}{2}\right)=$$

досчитать

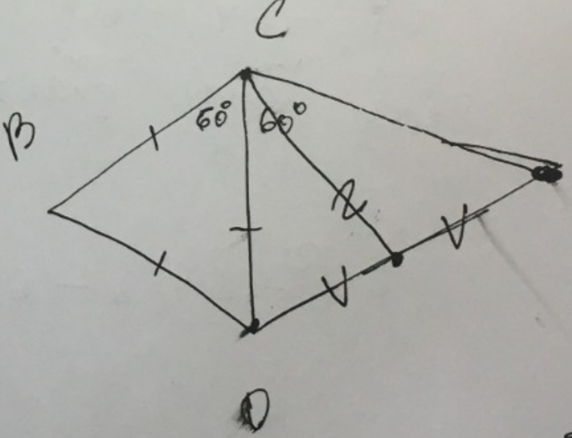
черновик вар. 11.
лист 4



Д-ть:
ABT - правильн.

Это трапеция (BC||AD),
р/б (△ABO = △DCO).

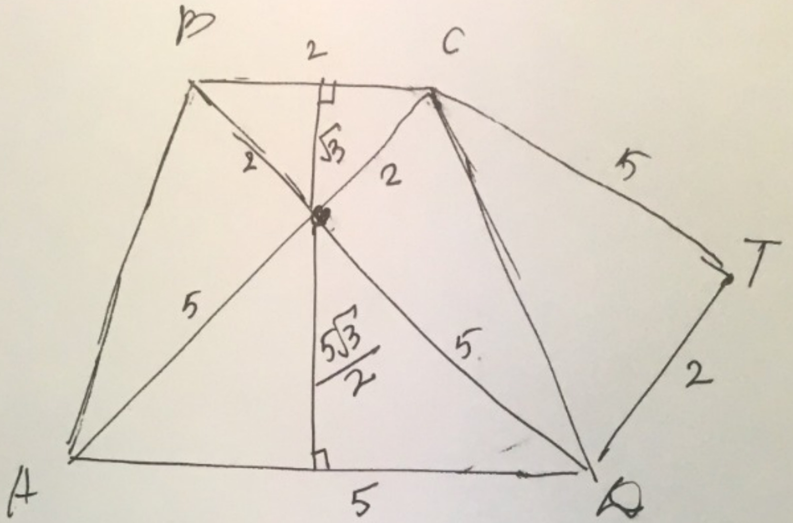
AT = BT
(△BCT = △ADT)



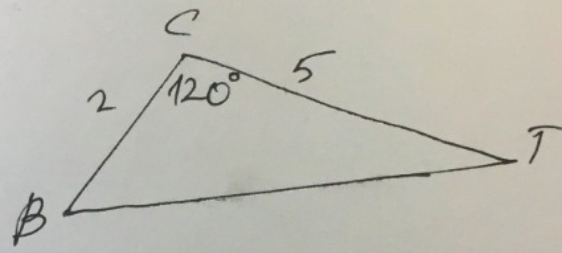
∠ATD = 60° - α
∠BTC = α
т.е. ∠ATB = 60° (∠CTD = 120°)
OCTD - ▱.

т.е ATB - р/с

черновик вар. 11 лист 5

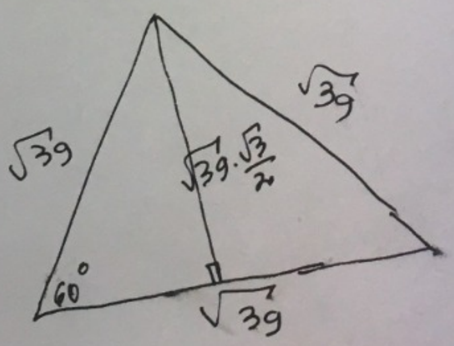


$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?



$$BT^2 = 4 + 25 - 2\cdot\cos 120^\circ\cdot 2\cdot 5$$

$$= 29 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 = 29 + 10 = 39$$



$\frac{\sqrt{39}\cdot\sqrt{3}}{2}$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{39}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{39} =$$

$$= \frac{39\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

$$h_{ABCD} = \sqrt{3} + 2{,}5\sqrt{3} = 3{,}5\sqrt{3}.$$

$$\frac{2+5}{2}\cdot 3{,}5\sqrt{3} = 3{,}5^2\cdot\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{39\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{4}}{\frac{7^2}{2^2}\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{39}{49}.$$

черновик вар. 11. лист 6

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 64 \\ \hline 256 \\ +384\ \ \\ \hline 4096 \end{array}$$

4096

$$\begin{array}{r} 4096 \\ -\ 252 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times\ 2 \\ \hline 252 \end{array}$$

256 - 4 = 252

$$\begin{array}{r} 3844 \\ \times\ 128 \\ \hline 30752 \\ +\ 7688\ \ \\ 3844\ \ \ \ \\ \hline 492032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24000 \\ +\ 6400 \\ 320 \\ 32 \\ \hline 30752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6000 \\ 1600 \\ 320 \\ 32 \\ \hline 7952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 492032 & 128 \\ \cline{2-2} -384\ \ \ \ & 3844 \\ \hline 1080\ \ \ & \\ -1024\ \ \ & \\ \hline 563\ \ & \\ -512\ \ & \\ \hline 512 & \end{array}$$

800
160
64

$2^7 \cdot 2^3$

480
32

$$\begin{array}{r} 3844 \\ \times\ 2 \\ \hline 7688 \end{array}$$

$64 \cdot 127 =$

$2^6 \cdot (2^7 - 1) =$

$2^{13} - 2^6$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times\ 8 \\ \hline 8192 \\ -\ 64 \\ \hline 8128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8128 & 64 \\ \cline{2-2} -64\ \ \ & 127 \\ \hline 172\ \ & \\ -128\ \ & \\ \hline 448 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492032 \\ +\ 8128 \\ \hline 500160 \end{array}$$

чистовик №4 (вар 11). лист 1

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15 \end{cases}$$

Пусть $t = x^2+y^2 > 0$ (т.к. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, иначе $\frac{4}{x^2+y^2}$ неопр.).

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ t^2 - \frac{4}{t} = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ t^3 - 4 = 15t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ t^3 - 15t - 4 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $t=4$ — корень ур-ия $t^3-4-15t=0$.

Тогда:

$$\begin{array}{r|l} t^3 \qquad -15t-4 & t-4 \\ \cline{2-2} -\;\underline{t^3-4t^2} \qquad\qquad & t^2+4t+1 \\ 4t^2-15t \quad\; & \\ -\;\underline{4t^2-16t} \quad\; & \\ t-4 & \\ -\;\underline{t-4} & \\ 0 & \end{array}$$

~~$(t-4)(t^2 \ldots)$~~ $(t-4)(t^2+4t+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t^2+4t+1=0 \end{array}\right.$$

211006587 (U170533 M1275383)

чистовик №4 (вар 11) лист 2

$$\left[\begin{array}{l} t=4 \\ \mathcal{D}=16-1\cdot4=12 \\ \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2} \\ t=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2+\sqrt{3} \\ t=-2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Но $t>0$, $-2+\sqrt{3}=-\sqrt{4}+\sqrt{3}<0$

$-2-\sqrt{3}<0$, т.е

$t=4.$

Имеем в исходной системе:

$$\begin{cases} 1+x^2y^2=5 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y^2=4 \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$, $b=y^2$, по т., обратной теореме Виета a и b явл. корнями ур-ия $m^2-4m+4=0$

$$(m-2)^2=0$$

$$m=2$$

Т.е.: $\begin{cases} x^2=2 \\ y^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

чистовик №5 (вар. 11) лист 3

Запишем ур-ие прямой, || оси абсцисс:

$y = a$ $(a=const)$; ур-ие прямой, || оси ординат:

$x = d$ $(d=const)$. Из этого следует, что

если мы выбираем 2 узла с координатами $(x_1;y_1)$; $(x_2;y_2)$, то $\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$

Распишем кол-во вариантов, при которых ровно 1 узел лежит на прямой $y=x$ или $y=65-x$ (система $\begin{cases} y=x \\ y=65-x \end{cases}$ целочисленных решений не имеет, поэтому строго или на прямой $y=x$, или на $y=65-x$).

Кол-во ~~точек~~ узлов на прямых $y=65-x$ и $y=x$ в пределах рассмотр. квадрата 65×65, не включая границы, составляет 128 точек

($(1;1)$; $(2;2)$; … $(64;64)$; $(1;64)$; $(2;63)$; … $(64;1)$).

Когда выбран ~~точка~~ узел на одной из 2 прямых, ~~на второй~~ можно выбрать

$$\underbrace{64^2}_{\text{внутри}} - \underbrace{64-64}_{\substack{\text{на прямых} \\ y=x \text{ и } y=65-x}} - \underbrace{62-62}_{\substack{\text{на прямых } y=y_1, \\ x=x_1}} = 64^2-126\cdot2.$$

$(x_1, y_1$ – коорд. уже выбр. точки)

Имеем $128 \cdot (64^2 - 126 \cdot 2)$ вариантов, когда ровно 1 узел лежит на одной из этих 2 прямых).

(Заметим, что при этом рассмотрении узлы различимы).

Теперь рассмотрим кол-во вариантов, когда оба узла лежат на этих прямых (здесь узлы неразличимы), оба узла выбир. из 128 точек

$((1;1); (2;2); \dots (64;64); (1;64); (2;63); \dots (64;1))$.

$C_{128}^{2} = \frac{128!}{126!\,2!} = \frac{128 \cdot 127}{2}$ - кол-во вариантов.

Всего вариантов:

$$128 \cdot (64^2 - 126 \cdot 2) + \frac{128 \cdot 127}{2} = 128 \cdot \left(64^2 - 126 \cdot 2 + \frac{127}{2}\right) =$$

$$= 128 \cdot (4096 - 252) + 64 \cdot 127 = 492032 + 8128 =$$

$$= 500160.$$

Ответ: 500160.

чистовик   № 6 (вар. 11)   лист 5

Дано:

выпукл. 4-уг. $ABCD$

$AC \cap BD =$ т. O

$\triangle BOC$ – р/с

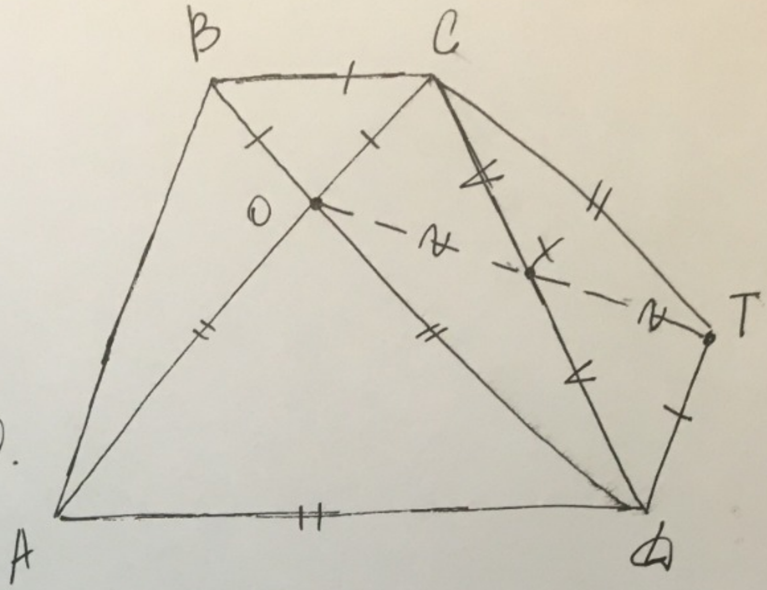
$\triangle AOD$ – р/с.

т. T симм. т. O отн. сер. CD.

а) Д-ть: ABT – р/с.

б) $BC = 2$; $AD = 5$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?



Решение

а) Пусть т. X – середина CD.

При центральной симметрии вокруг т. X отрезок OD переходит в TC, равный ему, а OC в TD =>

$OD = TD$, $CT = OD$ и 4-уг. $OCTD$ – параллелограмм (противолеж. стороны равны).

$\angle COD = 120°$ (смежный с $\angle BOC = 60°$).

Тогда $\angle OCT = \angle ODT = 180° - 120° = 60°$ (внутр. углы при $CT \parallel OD$, $OC \parallel TD$) с углом $\angle COD$.

211006587 (U170533 M1275383)

Тогда $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ$.

Тогда $\triangle ADT = \triangle TCB$ ($CT = DA$, $BC = TD$, $\angle BCT = \angle TDA$ – по 2 стор. и углу между ними).

Т.е. $BT = AT$ (соотв. эл. в равных $\triangle$)

Пусть $\angle TAD = \alpha$, тогда $\angle ATD = 60^\circ - \alpha$ (по сумме углов $\triangle ADT$),

тогда $\angle BTC = \angle TAD = \alpha$ (соотв. эл.).

$\angle CTD = \angle COD = 120^\circ$ (противолеж. в $\square OCTD$).

Тогда $\angle ATB = 120^\circ - \alpha - 60^\circ + \alpha = 60^\circ$.

Т.е $\triangle ATB$ р/б, $\angle ATB = 60^\circ \Rightarrow \angle TAB = \angle TBA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, т.е $\triangle ATB$ – р/с (правильн.). ч.т.д.

б) По т. косинусов в $\triangle BCT$:

$$BT^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

($BC = 2$) ($AD = 5 = CT$)

$BT^2 = 29 + 10 = 39$ ($BT > 0$, т.е $BT = \sqrt{39}$).

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} BT \cdot AT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{39})^2 = \frac{39\sqrt{3}}{4}.$$

Заметим, что $ABCD$ – р/б трап. ($\angle OAD = \angle OCB = 60^\circ$ – по усл. $\Rightarrow$ равны как накрест леж. $\Rightarrow BC \parallel AD$ при AC – секущей).

211006587 (U170533 M1275383)

Тогда $BC \parallel AD$.

$\triangle OCD = \triangle OBA$ ($OC = OB$, $OD = OA$, ~~$\angle OCB$~~

$\angle COD = \angle BOA$ – вертик.) – по 2 стор. и углу между ними., т.е $AB = CD$, трапеция р/б. ($BC < AD$ – это не $\square$).

Высоты $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ равны:

$h_{OBC} = CO \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$.

$h_{OAD} = OD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 2{,}5\sqrt{3}$.

Тогда $h_{трап. ABCD} = \sqrt{3} + 2{,}5 \cdot \sqrt{3} = 3{,}5 \cdot \sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)}{2} \cdot h_{ABCD} = \frac{(2+5)}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} =$

$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 \sqrt{3}$.

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}}}{\frac{49}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\sqrt{3}}} = \frac{39}{49}.$$

Ответ: $\frac{39}{49}$.

черновик. вар. 11 лист 1.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ \cancel{x^2} \\ y^2=2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \\ \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$m^2-4m+4=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ y^2=2 \end{array}\right.$$

$(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$

$(x^2+y^2)^2 - \dfrac{4}{x^2+y^2} = 15$

$t^2 - \dfrac{4}{t} = 15$ $\quad t^3 - 4 = 15t$

$64-60$

$t^3-15t-4=0.$

$$\begin{array}{r|l} -\; t^3 \quad\; -15t-4 & t-4 \\ \underline{t^3-4t^2} \qquad\quad & t^2+4t+1 \\ -\; 4t^2-15t & \\ \underline{4t^2-16t} & \\ t-4 & \end{array}$$

$(t-4)(t^2+4t+1)=0$

$D=16-4\cdot 1=12$

$\dfrac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x^2+y^2>0$

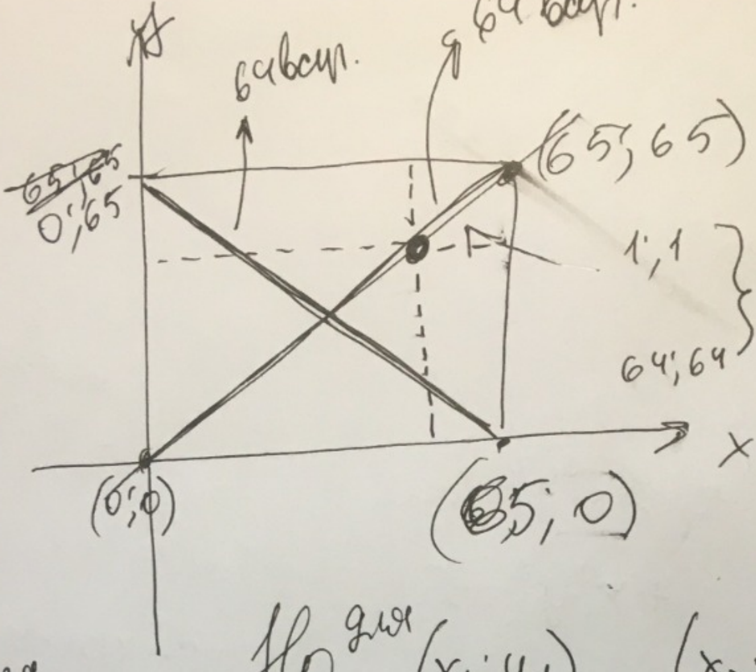
$-2-\sqrt{3} < -2+\sqrt{3} < 0$

$x^2+y^2=4$

$4; -2\pm\sqrt{3}$

211006587 (U170533 M1275383)

черновик вар 11. лист 2



граница выколота

$y = x$
или
$y = 65 - x$

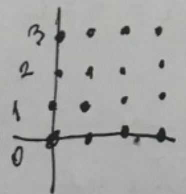
Но для $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ неверно:

нельзя выбрать $64+64-1 = 127$ точек

$y = d$
или
$x = d$

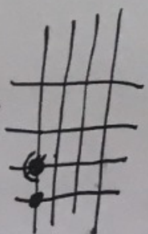
$x_1 \ne x_2$
$y_1 \ne y_2$

$0 < x_1 < 65$
$0 < x_2 < 65$
$0 < y_1 < 65$
$0 < y_2 < 65$

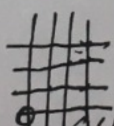


127 т.

Всего возм. точек (без 1 прямой):



$4^2 - 4 - 3 = 16 - 7 = 9$



9

$64^2 - \underbrace{64}_{\text{диагон. 1}} - \underbrace{64}_{\text{диаг. 2}} - 127 = \underbrace{64^2 - 64\cdot 2 - 127}_{\text{„неподходящие“ т.}}$

$C^1_{128} \cdot (64^2 - 64\cdot 2 - 127)$ – только 1 на 1 прямой
+
C^2_{128} – обе на прямых.

211006587 (U170533 M1275383)