Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

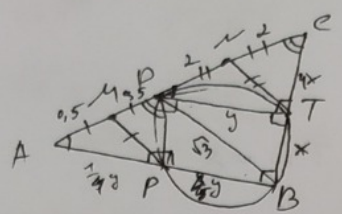
Шифр: **211006567**

ID профиля: **327927**

Вариант 11

Чистовик

№1



Решение:

а) DB – диаметр окружности $\Rightarrow$

$\angle DTB = \angle DPB = 90°$, как впис. $\angle$, опирающ. на диаметр

$\Rightarrow \angle DTC = \angle DPA = 180° - 90° = 90°$

MP – медиана из $\angle APD = 90°$ прям. $\triangle ADP \Rightarrow$

$MP = \frac{1}{2} AD = AM$ по св-ву прям. $\triangle$

Аналогично $NT = \frac{1}{2} CD = NC$

$NT \parallel MP \Rightarrow \angle AMP = \angle MNT = x$, как соответств. $\angle$

$\angle TNC = 180° - \angle MNT = 180° - x$

$MA = MP \Rightarrow \triangle MAP$ – р/б. $\Rightarrow$ $\angle MAP = \angle MPA = \frac{180° - x}{2} =$

$= 90 - \frac{1}{2}x$

Аналогично $\angle NCT = \frac{180° - 180° + x}{2} = \frac{x}{2}$

$\angle ABC = 180° - \angle MAP - \angle NCT = 180° - 90° + \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{2}x} =$

$= 90°$

Ответ: $\angle ABC = 90°$

1

б) $NT = DN = NC = 2$

$AM = MD = MP = 0,5$

8) ~~$\angle ABC = \angle DTC = 30° \Rightarrow$~~ Чистовик

$\triangle DCT \sim \triangle ACB$ по двум $\angle \Rightarrow$

$$\frac{CT}{CB} = \frac{4}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} CT = 4x \\ CB = 5x \end{array}\right\} \Rightarrow TB = x$$

Аналогично

$\triangle APD \sim \triangle CAB$ по двум $\angle \Rightarrow$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{1}{5}$$

$PB = y$

$AP = \frac{1}{5} AB \Rightarrow PB = \frac{4}{5} AB = y$

$AB = \frac{5}{4} y$

$AP = \frac{1}{4} y$

$\angle PDT = 360° - 270° = 90°$

все $\angle$ чет-ка $PBTB = 90° \Rightarrow$

$PDTB$ – прямоугольник $\Rightarrow PB = DT = y$

$DT^2 + BT^2 = (\sqrt{3})^2$

$x^2 + y^2 = 3$

$CT^2 + DT^2 = 4^2$ по т. Пифагора

$$\begin{cases} 16x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$15x^2 + 3 = 16$

$x = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$y = \sqrt{3 - \frac{13}{15}} = \sqrt{\frac{45-13}{15}} = \sqrt{\frac{32}{15}}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot \frac{5}{4} y = \frac{25}{8} x \cdot y$

2

Чистовик

$$S' = \frac{25}{8}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{15}} =$$

$$= \frac{\cancel{25}^{\,5}}{8}\cdot\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{25}}{\cancel{15}\;3} = \frac{5}{\cancel{8}_{\,2}}\cdot\frac{\sqrt{13}\cdot 4\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{26}}{6}$$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{26}}{6}$

3

211006567 (U327927 M1275404)

Чистовик

Чистовик

№ 2

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

$6+x-x^2 = (x+2)(3-x)$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3$

Возведём обе части в квадрат

$\cancel{x+2-(3-x)}$ $\Rightarrow$ либо $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq 0 \\ 2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 \geq 0 \end{cases}$ либо $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 0 \\ 2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 < 0 \end{cases}$

$\cancel{x} + \cancel{2} - 2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x} + 3 - \cancel{x} =$

$= \cancel{4}4(x+2)(3-x) - \cancel{6}12\sqrt{(x+2)(3-x)} + \cancel{9}4$

$4(x+2)(3-x) - 10\sqrt{(x+2)(3-x)} + 4 = 0 \;|:2$

$2(x+2)(3-x) - 5\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2 = 0$

$\sqrt{(x+2)(3-x)} = t \quad t \geq 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$\sqrt{D} = 3$

$t_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$

$t_1 = 2 \geq 0$ - верно

$t_2 = 0{,}5 \geq 0$ - верно

О.Д.З.

$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases}$

1) $\sqrt{(x+2)(3-x)} = 2$

$(x+2)(3-x) = 4$

$-x^2 + x + 6 = 4$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

2) $\sqrt{(x+2)(3-x)} = 0{,}5$

$(x+2)(3-x) = \frac{1}{4}$

$-x^2 + x + 6 = \frac{1}{4}$

$x^2 - x - 5\frac{3}{4} = 0$

$D = 1 + 23 = 24$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{24}}{2}$

4

Чистовик

Проверка решений

1) $x = -1$

$x \geq -2$ (+)

$x \leq 3$ (+)

$6 + x - x^2 = 5 - 1 = 4 \geq 0$. (+)

~~x = -1 - подходит~~

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1 - 2 = -1$

$2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 = 2\sqrt{4} - 3 = 1$

-1 и 1 - разных знаков =>

Наше условие когда мы обе части возводили в квадрат - не выполняется =>

$x = -1$ - не подходит

2) $x = 2$

$x \geq -2$ (+)

$x \leq 3$ (+)

$6 + x - x^2 = 6 + 2 - 4 = 4 \geq 0$ (+)

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2 - 1 = 1$

$2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 = 2\sqrt{4} - 3 = 1$

$1 = 1$ - верно =>

$x = 2$ - подходит

3) $x = \frac{1+\sqrt{24}}{2}$

$$\frac{1+\sqrt{24}}{2} < \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$$

$x \geq -2$ (+)

$x \leq 3$ (+)

$6 + x - x^2 = (x+2)(3-x) \geq 0$ - верно

5

Чистовик

$\sqrt{x+2} < \sqrt{3-x}$ при $x = \frac{1+\sqrt{24}}{2} > \frac{1+\sqrt{16}}{2} = 2{,}5$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} > 0$

$2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 \overset{?}{\geq} 0$

$4\sqrt{(x+2)(3-x)} \overset{?}{>} \frac{3}{2}$

возведём обе части в квадрат т.к. они ≥ 0

$(x+2)(3-x) > \frac{9}{4}$

$6 + x - x^2 \overset{?}{>} \frac{9}{4} = 2{,}25$

$-x^2 + x + 3{,}75 \overset{?}{>} 0$

$x = \frac{1+\sqrt{24}}{2}$

$$\frac{-(1+\sqrt{24})^2}{4} + \frac{2+2\sqrt{24}}{4} + 3{,}75 \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{-25 - 2\sqrt{24} + 2 + 2\sqrt{24}}{4} + 3{,}45 \overset{?}{>} 0$$

$$-\frac{23}{4} + 3{,}45 = -5\frac{3}{4} + 3{,}75 < 0 \Rightarrow$$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$ и $2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3$ — разных знаков $\Rightarrow$

$x = \frac{1+\sqrt{24}}{2}$ — не подходит

6

211006567 (U327927 M1275404)

4) $x = \frac{1-\sqrt{24}}{2}$ Численно

$0 > \frac{1-\sqrt{24}}{2} > \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2$

$x \geq -2$ – верно ⊕

$x \leq 3$ ⊕

$6+x-x^2 = (x+2)(3-x) \geq 0$ ⊕

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 0$ т.к. $\frac{1-\sqrt{24}}{2} < \frac{1-4}{2} = -1,5$

$2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3 \overset{?}{<} 0$

$-x^2 + x + 3,75 \overset{?}{<} 0$

$x = \frac{1-\sqrt{24}}{2}$

$-\frac{(1-\sqrt{24})^2}{4} + \frac{2-2\sqrt{24}}{4} + 3,75 \overset{?}{<} 0$

$\frac{-25+2\sqrt{24}+2-2\sqrt{24}}{4} + 3,75 \overset{?}{<} 0$

$-\frac{23}{4} + 3,75 \overset{?}{<} 0$

$-5\frac{3}{4} + 3,75 \overset{?}{<} 0$ – верно $\Rightarrow$

$(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x})$ и $(2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3)$ – одного знака ⊕ $\Rightarrow$

$x = \frac{1-\sqrt{24}}{2}$ – подходит

Ответ: $x = 2$; $\frac{1-\sqrt{24}}{2}$

7

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006567**

ID профиля: **327927**

Вариант 11

Чистовик

№4

$x^2 = a \Rightarrow a \geq 0$

$y^2 = b \Rightarrow b \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{a+b} + \cancel{4} ab = 5 \\ a^2 + b^2 + 3ab = 20 \end{cases}$$

О.Д.З. $\underset{\geq 0}{a} + \underset{\geq 0}{b} \neq 0 \Rightarrow$ ~~ab≠0~~ одновременно a и b не могут равняться 0

$a^2 + b^2 + 3ab = 20$

$(a+b)^2 = 20 - ab$

$ab = 20 - (a+b)^2$

$\frac{4}{a+b} + 20 - (a+b)^2 = 5$

$$\begin{cases} \underset{\geq 0}{a} + \underset{\geq 0}{b} = c \\ и\ a+b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow c > 0$$

$\frac{4}{c} + 20 - c^2 = 5$

$c^2 - \frac{4}{c} - 15 = 0 \quad | \cdot c$

$c^3 - 15c - 4 = 0$

$c = 4$ — подходит

$64 - 60 - 4 = 0$ — верно

$$\begin{array}{r|l} c^3 - 15c - 4 & c - 4 \\ \cline{2-2} -\ c^3 - 4c^2 & c^2 + 4c + 1 \\ \hline -\ 4c^2 - 15c - 4 & \\ 4c^2 - 16c & \\ \hline -\ c - 4 & \\ c - 4 & \end{array}$$

1

Чистовик

$c^3-15c-4=(c-4)(c^2+4c+1)=0$

$c^2+4c+1=0$

$D=16-4=12$

$c_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}$

$c_1=\frac{-4-\sqrt{12}}{2}<0 \Rightarrow$ не подходит т.к. $c>0$

$c_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}<\frac{-4+\sqrt{16}}{2}=0 \Rightarrow$ не подходит т.к. $c>0$

$\Rightarrow c=4$

$a+b=4 \qquad a=4-b$

$ab=20-(a+b)^2=20-16=4$

$(4-b)b=4$

$4b-b^2=4$

$b^2-4b+4=0$

$(b-2)^2=0$

$b=2\geq 0 \rightarrow$ подходит

$a=4-2 \qquad a=2\geq 0 \Rightarrow$ подходит

$x^2=2 \qquad x=\pm\sqrt{2}$

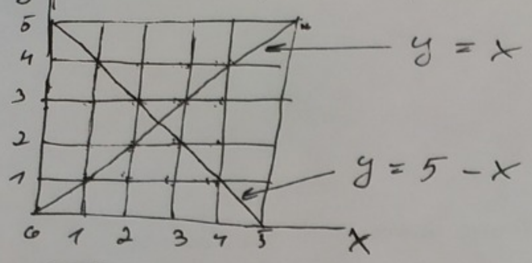
$y^2=2 \qquad y=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};\sqrt{2})$

≥ 3 чистовых

~~Ба~~

Рассмотрим на примере квадрата 5×5



Т.к. сторона квадрата – нечёт $\Rightarrow$ ~~узл~~ пересечение ~~прям~~ прямых $y = x$ и $y = 5 - x$ (что является центром квадрата) будет лежать не на узле

На прямой ~~на~~ $y = x$ внутри квадрата 4 ~~и~~ 4 узловые клетки (т.к. 2 на границе мы не считаем)

Аналогично и на прямой $y = 5 - x$ ~~и~~ имеется 4 узла

1) две выбранных ~~точки~~ узла лежат на прямой $y = x \Rightarrow$ способов это сделать $= C_4^2$ и эти два узла не лежат на прямой // осям координат

2) две выбранных узла лежат на прямой $y = 5 - x$

Аналогично получаем способов $= C_4^2$ т.к. ситуация симметрична

3) один из выбранных узлов лежит на прямой $y = x$, а второй не лежит $\Rightarrow$ способов выбрать этот узел $= 4$

~~Можно выбрать в дополнении любую~~ вариантов дополнения $=$

$4 \cdot \boxed{4 \cdot 4 - 1 - 3 - 3 ~~или~~ - 3} \Rightarrow 6$

$\leftarrow$ точки, при которых полученная прямая // осям

$\leftarrow$ точки $\in$ прямой $y = x$

уже выбранная точка

Всего способов $= 4 \cdot 6 = 24$

3

Чистовик

4) один из выбранных узлов лежит на прямой $y = 5 - x \Rightarrow$ способов выбрать этот узел $= 4$

Аналогично получаем способов для второго узла

$= 4 \cdot 4 - 1 - 3 - 3 - 3 = 6$. Всего способов $= 4 \cdot 6 = 24$

Но дважды мы посчитали варианты, когда ~~1й-2й~~ 1 узел лежит на прямой $y = x$ и 1 узел лежит на прямой $y = 5 - x$

Всего таких вариантов $4 \cdot (4 - 2) = 8$

эти два узла будут образовывать прямую // ~~какой~~ оси координат

Конечное число способов $= 2 \cdot C_4^2 +$

$+ \overset{48}{24 + 24} - 8 = 2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} + 40 =$

$= 12 + 40 = 52$

Теперь посчитаем для квадрата 65×65

Способов $= 2 \cdot C_{64}^2 + 64 \cdot (64 \cdot 64 - 1 - 63 - 63 - 63)$

$+ 64 \cdot (64 \cdot 64 - 1 - 63 - 63 - 63) - 64 \cdot (64 - 2) =$

$= 2 \cdot \frac{64!}{62! \cdot 2!} + 128(64 \cdot 64 - 1 - 63 - 63 - 63) -$

$- 64 \cdot 62 = 63 \cdot 64 + 128(64 \cdot 64 - 64 - 2 \cdot 63) -$

$- 64 \cdot 62 = 64(63 - 62) + 128(64 \cdot 63 - 2 \cdot 63) =$

$= 64 + 128((64 - 2) \cdot 63) =$

$= 64 + 2 \cdot 64 \cdot 63 \cdot \overset{\text{м}}{62} = 64(1 + 2 \cdot 63 \cdot 62)$

4

Шилов

$64(1+2\cdot 63\cdot 62) = 64 \cdot 7813 = 500032$

Ответ: 500032

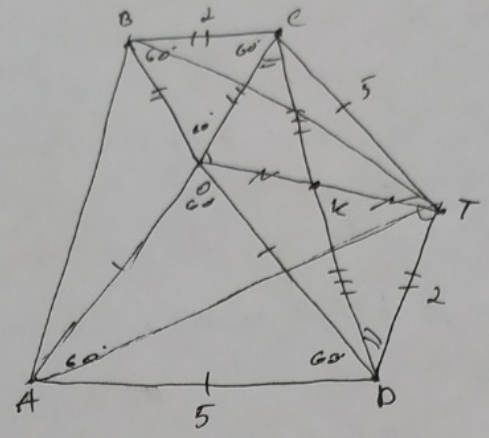
$$\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 62 \\ \hline 126 \\ +\ 3780 \\ \hline 3906 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7813 \\ \times\ 64 \\ \hline 31252 \\ +\ 46878 \\ \hline 500032 \end{array}$$

5

211006567 (U327927 M1275405)

Чистовик

№6



Решение:

~~Пусть~~ (·) K - серед. CD ⇒ CK = KD

(·) T симметрична (·) O относительно (·) K ⇒

OK = KT

$\left.\begin{array}{l}\angle CKO = \angle TKD \text{ как вертик. } \angle \\ OK = KT \\ CK = KD\end{array}\right\} \Rightarrow$

⇒ CO = TD

$\Delta OCK = \Delta TKD$ ⇒ $\angle COT = \angle OTD$ ~~CD~~ — н.л.у. ⇒

по 2-ум сторонам

и ∠ между ними

CO ∥ TD

~~∠DCO = ∠CDT — н.л.у.~~

$\left.\begin{array}{l}CO = TD \\ CO \parallel TD \\ CODT \text{ - чет-к}\end{array}\right\} \Rightarrow$ CODT пар-м т.к. две его противолеж. стороны ∥ и равны ⇒

$\Rightarrow \begin{cases} OD \parallel CT \\ OD = CT \\ CO = TD \end{cases}$

OD ∥ CT ⇒ ∠AOD = ∠ACT как соотв. ∠

Δ AOD - прав. ⇒ AO = OD = AD

∠AOD = ∠ODA = ∠OAD = 60°

6

Чистовик

$\triangle BOC$ - прав. $\Rightarrow BC = CO = BO$

$\angle BCO = \angle BOC = \angle CBO = 60°$

$\angle AOD = \angle ACT = 60°$

$CO \parallel TD \Rightarrow \angle BOC = \angle BDT = 60°$ как соотв. $\angle$

$\left\{ \begin{array}{l} \angle ADT = \angle BCT = \cancel{120}\, 60° + 60° = 120° \\ TD = CO = BC \\ CT = OD = AD \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\triangle CBT = \triangle ADT$ по 2-ум стор. и $\angle$ между ними

$\Rightarrow AT = BT$

$\angle CBT = \angle ATD$

$\angle CTD = 180° - \underset{60°}{\underset{\parallel}{\angle TCO}}$ как одностор $\angle$

$\angle CTD = 120°$

$\angle CTD = \angle CTB + \angle ATD + \angle BTA = 120°$

$\angle CTB + \angle ATD = \angle CTB + \angle CBT = 180° - \angle BCT =$
$180° - 120° = 60°$

$\left. \begin{array}{l} \angle BTA = 120° - 60° = 60° \\ BT = TA \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BTA$ - р/б $\Rightarrow$
$\angle TBA = \angle TAB =$
$\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°\ \cancel{\angle} = \angle ATB$

~~$\triangle$ ABT - правильный~~

$\left. \begin{array}{l} AB = BT = TA \\ \angle ATB = \angle TBA = \angle TAB \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\triangle ABT$ - правильный

ч. и. т. д.

7

211006567 (U327927 M1275405)

Чистовик

б) $AD = OD = CT = 5 = AO$

$BC = CO = TD = 2 = BO$

$\triangle BCT$

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos\angle BCT \cdot BC \cdot CT$, $\angle BCT = 120^\circ$

$BT^2 = 4 + 25 - 2\cos(120^\circ) \cdot 2 \cdot 5$

$\cos 120^\circ = \cos(\underbrace{\cancel{180^\circ - 60^\circ}}_{90^\circ + 30^\circ}) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$BT^2 = 4 + 25 + \cancel{20}^{10} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 39$

$BT = \sqrt{39} = AT$

$S_{\triangle TBA} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AT \cdot \sin 60^\circ =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{39} \cdot \sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CO \cdot \sin(60^\circ) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot AD \cdot \sin(60^\circ) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin(120^\circ) \cdot OC \cdot OD$

$\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ 8

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot BO \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Чистовик

$S_\triangle ABCD = S_\triangle BOC + S_\triangle AOD + S_\triangle COD + S_\triangle BOA =$

$= \cancel{\frac{25\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} =$

$= 6\sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}+25\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_\triangle ABT}{S_{ABCD}} = \frac{39\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{39}{49}$

Ответ: $\frac{39}{49}$

9

211006567 (U327927 M1275405)