Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006558**

ID профиля: **830701**

Вариант 11

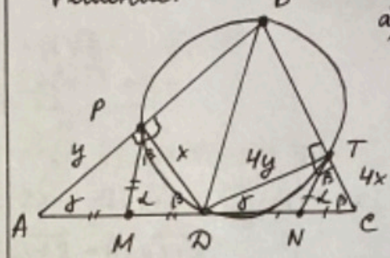
① Чистовик

Задача №1

Дано:
ΔABC
$D \in AC$
окр-ть с диам. BD
окр-ть $\cap AB = P$
окр-ть $\cap BC = T$
M - сер. AD
N - сер. CD
$PM \parallel NT$

Найти:
а) $\angle ABC$ - ?
б) Дано (2):
$MP = 1/2$
$NT = 2$
$BD = \sqrt{3}$
Найти (2): S_{ABC} - ?

Решение:



а) 1. BD - диам.
$\angle BPD$ и $\angle BTD$ - впис., опир. на BD $\Big| \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$

2. см.: $\angle BPD + \angle APD = 180°$; $\angle BPD = 90°$ $\Big| \Rightarrow \angle APD = 90°$
см.: $\angle BTD + \angle DTC = 180°$; $\angle DTB = 90°$ $\Big| \Rightarrow \angle DTC = 90°$

3. в ΔAPD: M - сер. $AD \Rightarrow PM$ - мед., пров. из прямого $\angle \xRightarrow{\text{по св-ву}} PM = AM = MD$
в ΔDTC: N - сер. $CD \Rightarrow TN$ - мед. пров из пр. $\angle \xRightarrow{\text{по св-ву}} TN = NC = ND$

4. $PM \parallel NT$; AC - сек $\Big| \xRightarrow{\text{по св-ву}} \angle PMD = \angle NTC = \alpha$ (соотв. $\angle$)

5. ΔMPD - р/б Δ с углом α против. основ. ($MP = MD$)
ΔNTC - р/б Δ с углом α против. основ. ($NT = NC$) $\Big| \Rightarrow \angle NTC = \angle TCN = \angle PDM = \angle MDP = \beta$

6. в прямоуг. ΔAPD: $\angle PAD + \beta = 90°$
в прямоуг. ΔDTC: $\angle TDC + \beta = 90°$ $\Big| \Rightarrow \angle PAD = \angle TDC = \gamma$ (т.е. $\gamma + \beta = 90°$)

7. $\angle PDT + \gamma + \beta = 180°$ (см.)
$\gamma + \beta = 90°$ $\Big| \Rightarrow \angle PDT = 90°$

8. $PBTD$ - впис. 4уг. $\Rightarrow \angle DPB + \underset{(\angle ABC)}{\angle PBT} + \angle BTD + \angle TDP = 360°$
$\angle DPB = \angle BTD = \angle TDP = 90°$ $\Big| \Rightarrow \angle ABC = 90°$

б) 9. Пусть в ΔAPD $AP = y$, $PD = x$

10. $\Delta APD \sim \Delta DTC$ (по 2 угл.)
$$\frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{DC}$$

11. $PM = AM = MD = 1/2 \Rightarrow AD = 1$

12. $NT = DN = NC = 2 \Rightarrow CD = 4$

13. $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{4} = \frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} \Rightarrow$ $DT = 4y$, $TC = 4x$

14. $\Delta APD \sim \Delta ABC$ (по 2 уг.)
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD + DC} = \frac{1}{5} \Bigg| \Rightarrow AB = 5y \ \Bigg| \ \frac{AP}{AB} = \frac{PD}{BC} \Rightarrow BC = 5x$$

15. $PB = AB - AP = 5y - y = 4y$

16. в прямоуг. ΔAPD: $x^2 + y^2 = 1$ (th Пиф)
в прямоуг. ΔPBD: $x^2 + 16y^2 = 3$ $\Bigg\}$ $15y^2 = 2 \rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{15}}$
$x = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{15}} = \sqrt{\frac{13}{15}}$

17. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 5y = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{\frac{13}{15}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$ (прямоуг.)

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$ б) $S_{\Delta ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

② Чистовик

Задача №2

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2} \rightarrow \underline{\underline{x\in[-2;3]}}$

$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ 6+x-x^2=(x+2)(3-x)\geq 0 \end{cases}$ $-2 \quad 3$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+2}$

$\underbrace{\sqrt{x+2}+3}_{>0}=\underbrace{\sqrt{3-x}\,(2\sqrt{x+2}+1)}_{>0}$

$x+2+9+6\sqrt{x+2}=(3-x)(4x+8+1+4\sqrt{x+2})$

$x+11+6\sqrt{x+2}=12x+12\sqrt{x+2}+27-4x^2-9x-4x\sqrt{x+2}$

$4x^2-2x-16=6\sqrt{x+2}-4x\sqrt{x+2}$

$2x^2-x-8=\underbrace{\sqrt{x+2}}_{>0}\underbrace{(3-2x)}$ $\rightarrow$ ≥ 0 при $x\leq 1{,}5$

<0 при $x>1{,}5$

$D=1+64=65$

$x=\frac{1\pm\sqrt{65}}{4}$

$\frac{1+\sqrt{65}}{4}-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{65}-5}{2}>0 \quad | \quad \frac{1-\sqrt{65}}{2}-\frac{3}{2}<0$

$<$

одинак. знаков при $>$

211006558 (U830701 M1278534)

③ **Чистовик**

Задача N3

Oxy: (1) $5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0 \to$ т. A

(2) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0 \to$ параб. с верш. в т. B $\nearrow$ $a\neq 0$ $\quad 4\neq 0$ ~~[illegible]~~

(2) $y = x^2-2ax+a^2+4/a$

коорд. верш. (т. B):

$x_B = \frac{2a}{2} = a$

$y_B = a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a} = \frac{4}{a}$

(1) координаты т. A:

$5a^2+4a(3x+y)+8x^2+8yx+4y^2=0$

$\frac{D}{4} = 4(3x+y)^2 - 4\cdot 5(2x^2+2xy+y^2) =$

$= 4(9x^2+6xy+y^2-10x^2-10xy-5y^2) =$

$= 4(-x^2-4xy-y^2) \geq 0 \to x=-2y$

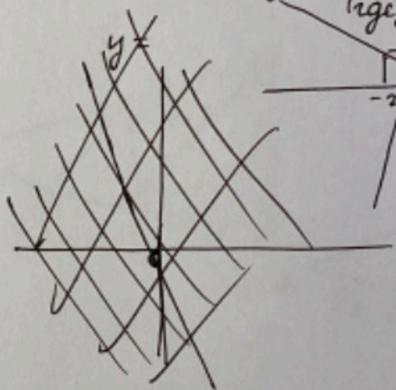
$5a^2-24ay+4ay+32y^2+16y^2+4y^2=0$

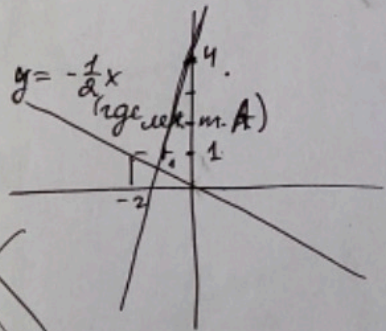
$5a^2+20ay+52y^2=0$

$\to D<0 \Rightarrow$ им. реш. при $\underline{a>0}$

лежат по разные стороны от пр. $y-3x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ I: для B $y>3x+4$, для A $y<3x+4$ $\quad \vee \quad$ II: для B $y<3x+4$, для A $y>3x+4$





I для B:

$\frac{4}{a} > 3a+4$

$\frac{-4a-3a^2+4}{a} > 0$

$\frac{3a^2+4a-4}{a} < 0$, $a>0$

$\frac{D}{4} = 4+12=16$

$x = \frac{-2\pm 4}{3}$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

для A:

при $a \in$ ~~$(\frac{2}{3};2)$~~ $(-2;\frac{2}{3})$ & $a>0$ $\Rightarrow (0;\frac{2}{3})$

II —"— $(\frac{2}{3};+\infty)$

Ответ: $a\in(0;\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006558**

ID профиля: **830701**

Вариант 11

① Чистовик

Задача N5

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{4}{x^2+y^2}+5=x^2y^2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases} \Rightarrow 20-(x^2+y^2)^2=5-\frac{4}{x^2+y^2}$$

$\exists\ x^2+y^2=t,\ t\geq 0$

$20-t^2=5-\frac{4}{t}$

$20t-t^3=5t-4$

$t^3-15t-4=0$

$t=4$ - корень

$(64-60-4)=0$

$(t-4)(t^2+4t+1)=0$

$\frac{D}{4}=4-1=3 \quad \begin{cases} t=-2\pm\sqrt{3} \\ t>0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2-\sqrt{3}<0 \\ -2+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0 \end{matrix}$

ед. решение

$t=4 \Rightarrow x^2+y^2=4$

подставим в исходную систему (в одно из ур-й)

$\frac{4}{4}+x^2y^2=5 \rightarrow x^2y^2=4$

теперь предстоит решить след. систему:

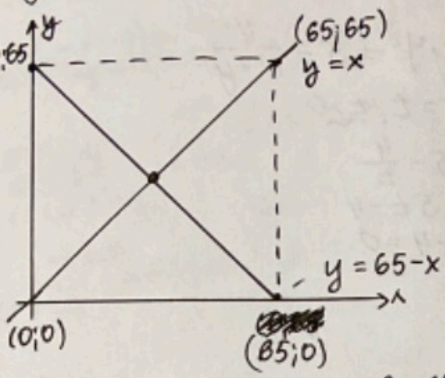
$$\begin{cases} x^2y^2=4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} (4-x^2)x^2=4 \\ y^2=4-x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4-4x^2+4=0 \\ y^2=4-x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ y^2=2 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{matrix} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} y=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{matrix}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

211006558 (U830701 M1278535)

② Чистовик

Задача №6



заметим, что прямые $y=x$ и $y=65-x$ проходят через узлы клеток, так:  (из-за их коэф. наклона)

т.е. если они пересекают клетку, то проходят через две её вершины.

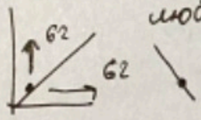
каждая прямая проходит через 65 клеток, но границы фигуры мы не берём, то есть на самих прямых лежит по $65-2 = 64$ узла ($+1$)

(но сами прямые пересекаются не в узле $65-x=x$, $x=\frac{65}{2}$)

начнём рассматривать все возможные пары, которые мы можем составить для каждой точки „диагоналей" (прямых), т.к. они обязаны присут. в паре (хотя бы одна точка, леж. на какой-либо из прямых)

для первой диагонали:

1 точка:



любые точки, кроме леж. на парал. пр.

всего точек − 64^2

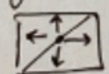
лежат на одной прямой с данной точкой − $63 \cdot 2 = 126$

в одном ряду лежит 64 точки, 1 из них — наша, т.е. с ней на одной пр. лежит 63 ①

пар для этой точки → $\underbrace{64^2 - 1}_{\text{(сама точка)}} - 63\cdot 2 = 64^2 - 127$

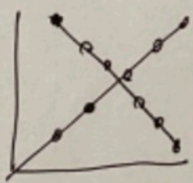
-||- рассуждения для следующей точки:

$64^2 - 1 - 63\cdot 2 = 64^2 - 127$

при подъёме по диагонали у нас не уменьшается к-во точек, леж. на одной прямой с данной, т.к. мы начинаем ещё леж. на продолж. || пр ( ум. на 2 в напр. ↑ →, но ув. на 2 в направлении ↓ и ←) ②

т.е. для одной диагонали: $(64^2 - 127)\cdot 64$ и для второй аналогично, т.е. всего $(64^2-127)\cdot 64 \cdot 2$

НО! мы считали диагональные пары по 2 раза — необходимо вычесть эти повторы:



• для т. (нач. с одной диаг.): 63 на своей и 64 на чужой

• для след: 62 на своей и 64 на чужой

...

(сумма ар. прогрессии)

$$\sum = \frac{(63+64)+64}{2}\cdot 64$$

аналогично для другой диагонали: $\sum = \frac{(63+64)+64}{2}\cdot 64$

$= 191\cdot 64$

всего: $\underbrace{64\cdot 2\cdot(64^2-127)}_{\text{посчитанные пары}} - \underbrace{64\cdot 191}_{\text{повторы}} = 64\cdot(2\cdot 64^2 - 445) =$

$= 494808$

Ответ: 494808

③ Чистовик

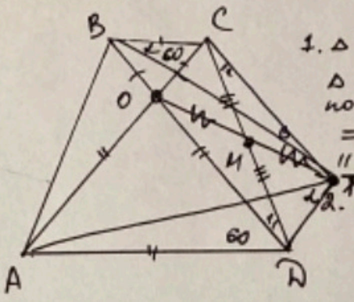
Задача №7

Дано:
$ABCD$ – вып. 4уг.
$AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ – прав.
$\triangle AOD$ – прав.
т. T симм. т. O относ т. M
(M – сер. CD)

Д-ть:
а) $\triangle ABT$ – прав.

Найти:
б) Дано(2):
$BC = 2$
$AD = 5$
Найти(2):
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение:



1. $\triangle BOC$ – прав. $\Rightarrow \angle BCO = 60^\circ$; $\triangle AOD$ – прав $\Rightarrow \angle OAD = 60^\circ$ $\Rightarrow \angle BCO = \angle OAD$ (н/л у при сек. AC) $\Rightarrow$ по призн. $\Rightarrow BC \parallel AD$ || пр.

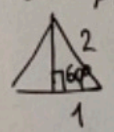
2. $BC \parallel AD$; $ABCD$ – вып. $\Rightarrow ABCD$ – р/б трап.
$AB = CD$
(из $= \triangle AOB$ и $\triangle COD$ по 2 ст. и $\angle$ м/ду ними: ($BO = OC$ из $\triangle BOC$, $AO = OD$ из $\triangle AOD$, $\angle BOA = \angle COD$ – верт))

3. т. T симм. т. O отн. $M \Rightarrow OM = MT$; $CM = MD$; $\angle CMT = \angle OMD$ (верт) $\Rightarrow OD = CT$; $OD \parallel CT$ ($\angle 1 = \angle 2$ н/л у) $\overset{\text{по пр. п-ма}}{\Rightarrow}$ $OCTD$ – п-м $\Rightarrow OC = TD$

4. $\angle OCT = \angle ODT$ ($\angle$ пр. п-ма); $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ$ $\Rightarrow \angle BCT = \angle TDA$; AD ~~AD~~ $+ = BC$; $OD = CT$ $\overset{\text{по 2 ст. и }\angle}{\Rightarrow}$ $\triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow$

$\Rightarrow BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ р/б

5. $\angle CBT = \alpha = \angle ATD$
6. $\angle CTB = \angle TAD = \beta$
7. $\angle ODT = \angle BOC = 60^\circ$ ($BC \parallel DT$ сек. OD)
8. в $\triangle CBT$ $\alpha + \beta + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$
9. $\angle CTD = \angle BTA + \alpha + \beta = 120^\circ$ ($\angle$ в пар-ме, если один $= 60^\circ$) $\Rightarrow \angle BTA = 60^\circ$; $\triangle BTA$ – р/б $\Rightarrow \triangle BTA$ – прав.



б) 10. в $\triangle BOC$ h_1 (выс.) $= \frac{1}{2} BC \cdot$ [redacted] $\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

11. в $\triangle AOD$ $h_2 = \frac{1}{2} AD \cdot \sin 60^\circ =$ [redacted] $\cdot \sqrt{3} \cdot \frac{5}{2}$

12. $H = h_1 + h_2 = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ (выс. тр.)

13. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{49}{4} \cdot \sqrt{3}$

14. в $\triangle ABO$: $\angle AOB = 120^\circ$ (см. с углом 60°)
th cos: ($\triangle ABO$) ~~$AB^2 = BT^2 + AT^2 - 2AT \cdot BT$~~
$AB^2 = \underset{BC}{OB^2} + \underset{AD}{AO^2} - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos 120^\circ = 4 + 25 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 39$

15. $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot AB \cdot \underset{BT}{BT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

16. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{39}{49}$

Ответ: а) д-но; б) $S_{ABT} : S_{ABCD} = 39 : 49$

211006558 (U830701 M1278535)