Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006521**

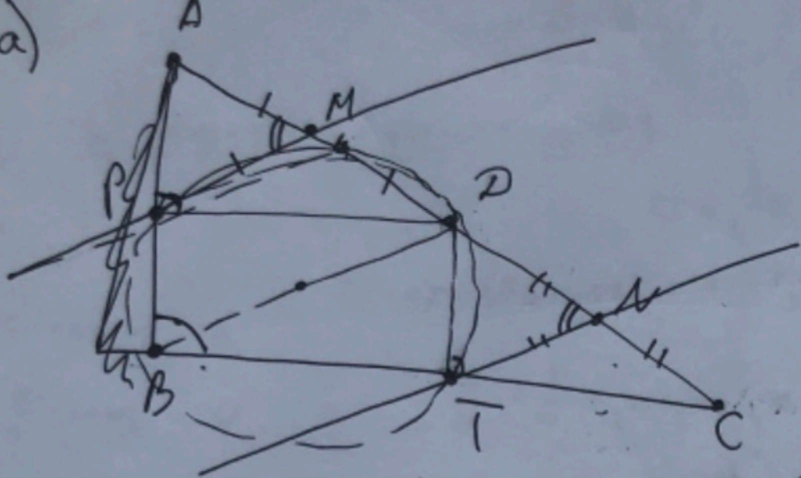
ID профиля: **855044**

Вариант 11

№1.

~~черновик~~ чистовик

а)



Т.к. $PM \parallel NT$, то $\angle AMP = \angle DNT = \alpha$.

$\angle DTB$ и $\angle DPB$ опираются на диаметр BD, значит они равны $90°$.

$\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольные, PM и TN – медианы в них, значит $AM=PM=MD$ и $DN=NT=NC$. Значит $\angle NDT = \frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

$\angle PMD = 180° - \angle AMP = 180° - \alpha$.

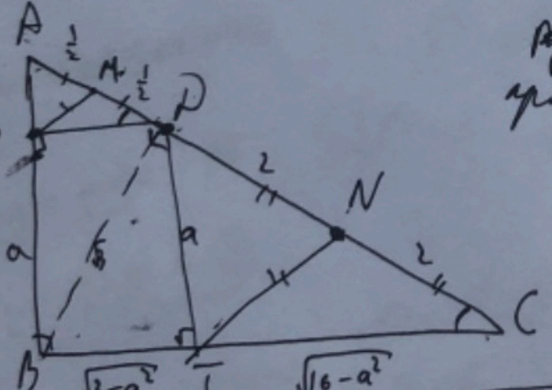
$\angle MDP = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

$\angle PDT = 180° - \angle MDP - \angle NDT = 180° - \frac{\alpha}{2} - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90°$

Т.к. 4-угольник $BPDT$ – впис., то $\angle ABC = 180° - \angle PDT = 90°$

Ответ: 90°.

б)



$AM = MD = MP = \frac{1}{2}$; $DN = NT = NC = 2$

~~Пусть~~ $\triangle APD$, $\triangle DTC$ и $\triangle ABC$ все прямоуг.-ые с углом $\frac{\alpha}{2}$, т.е. они подобны.

Пусть $TD = a = PB$, т.к. $BPDT$ – прямоуг.

$TC = \sqrt{16-a^2}$, $PD = BT = \sqrt{3-a^2}$,

$AP = \sqrt{a^2-2}$.

Из подобия $\frac{DC}{AD} = \frac{DT}{AP} = \frac{a}{\sqrt{a^2-2}} = \frac{4}{1}$

$a = 4\sqrt{a^2-2}$

$\begin{cases} a^2 = 16a^2 - 32 \\ a \geq 0 \end{cases}$

$a = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{15}}$

$S_{\triangle APD} = \frac{\sqrt{a^2-2} \cdot \sqrt{3-a^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\frac{13}{15}}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{30}$

Т.к. $\triangle APD$ и $\triangle ABC$ подобны с коэф. $\frac{1}{5}$, то

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APD}} = 25$. Значит $S_{\triangle ABC} = \frac{25 \cdot \sqrt{26}}{30} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

т.к. $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

чистовик

№2

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$a=x+2,\ b=3-x,\ a,b\geq 0$; $(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})^2=5-2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+3=2\sqrt{ab}$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=5-2\sqrt{ab}$

$\cancel{\begin{cases}(\sqrt{a}-\sqrt{b}+3)(\sqrt{a}-\sqrt{b}+3)=4ab\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}+3\geq 0\end{cases}}$

$\cancel{a+b+9=2ab}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+3-2\sqrt{ab}=\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0$

$t=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$t^2+t-2=0$

$\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1\\ \sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=-2\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=1+\sqrt{3-x}\\ \sqrt{3-x}=2+\sqrt{x+2}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2=4-x+2\sqrt{3-x}\\ 1+\sqrt{3-x}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}3-x=6+x+4\sqrt{x+2}\\ 2+\sqrt{x+2}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{3-x}\\ -3-2x=4\sqrt{x+2}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x=x^2-2x+1\\ x-1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}16x+32=4x^2+12x+9\\ -3-2x\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-2=0\\ x\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2-4x-23=0\\ x\leq -1,5\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1 \text{ — не подх}\end{array}\right.\\ x\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+2\sqrt{6}}{2} \text{ — не подх}\\ x=\frac{1-2\sqrt{6}}{2} \text{ — (*)}\end{array}\right.\\ x\leq -1,5\end{cases}\end{array}\right.$

$D=16+16\cdot 23=384=2^7\cdot 3$

$x=\frac{4\pm 8\sqrt{6}}{8}=\frac{1\pm 2\sqrt{6}}{2}$

$\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$

(*) Сравним $\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$ и $-1,5$ ($<$)

$1-2\sqrt{6} < -3$

$-2\sqrt{6} < -4$

$\sqrt{6} > 2$

Значит $\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$ — подх

Ответ: 2; $\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006521**

ID профиля: **855044**

Вариант 11

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= x^2+y^2 \geq 0 \\ b &= x^2y^2 \geq 0 \end{aligned}}$$

(1) $\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$

$$a^2 - \frac{4}{a} = 15$$

$$\frac{a^3-15a-4}{a} = 0$$

$\begin{cases} a^3-15a-4=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ $-$ $a=4$ – корень (нашли подбором)

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3-4a^2} & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a & \\ -\underline{4a^2-16a} & \\ a-4 & \\ -\underline{a-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$a^2+4a+1=0$

$D = 16-4 = 12$

$a = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$

$= -2 \pm \sqrt{3}$ – не подх. (*)

(*) $-2-\sqrt{3}<0$, $a=x^2+y^2>0$, поэтому не подх.

$-2+\sqrt{3}<0$, т.к. $\sqrt{3}<2$, $3<4$, $a>0$, поэтому не подх.

Значит $\begin{cases} a=4 \text{ – реш} \\ b=20-16=4 \end{cases}$ – реш-е системы (1)

Подставим:

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$ $\quad x^2 = 4-y^2$

$4y^2-y^4-4=0$

$-(y^2-2)^2=0$

$y^2=2$

$x^2=2$ $\quad \begin{cases} y=\pm 2 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$; $(2;-2)$; $(-2;2)$; $(-2;-2)$

~~№~~ №5 [Чистовик]

Прямые $y=x$ и $y=65-x$ – диагонали квадрата.

Выберем 1-ю точку так, чтобы она лежала на них. Это можно сделать $64+64=128$ способами (т.к. на 1 диагонали квадрата 64 точки бд условия, то на 2х диагоналях $64\cdot 2$, т.к. они пересекаются не в узле, т.к. 65 – нечетное число).

Теперь выберем вторую точку. Для нее $64\cdot 64-64-64+1=2^{12}-127$ способов, т.к. 2^{12} – это кол-во узлов в квадрате всего. Из них нужно вычесть 64 узла, лежащие в одной линии по горизонтали с 1-й точкой и 64 узла по вертикали. Прибавим 1, потому что 1-ую точку вычла 2 раза, т.к. она лежит самой собой и по гор-ли, и по верт-ли.

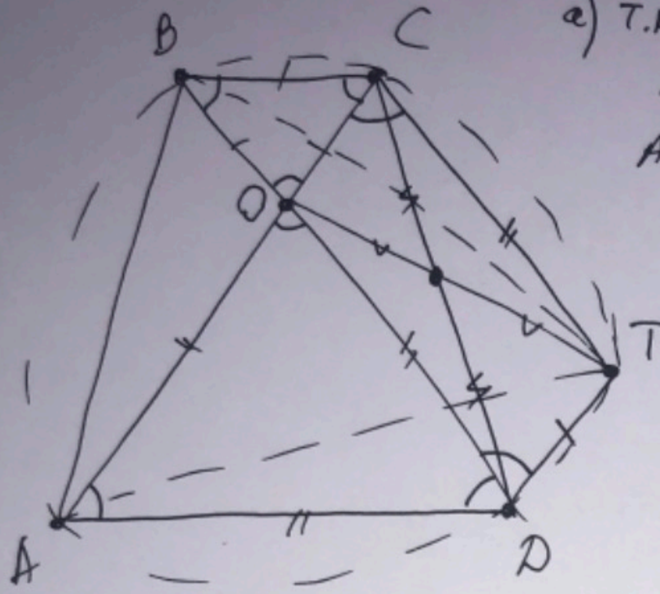
Итого всего способов выбрать последовательно 2 нужные точки $128\cdot(2^{12}-127)$. Т.к. порядок нам не важен, то ответ будет $\frac{128(2^{12}-127)}{2}=64(2^{12}-127)$

Ответ: $64(2^{12}-127)$

211006521 (U855044 M1275585)

№6

Чистовик



а) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ прав-ые, то $\angle CBO = \angle ODA = 60^\circ$, т.е. $BC \parallel AD$, значит $ABCD$ — трапеция.

Точки B и C, A и D симметричны относительно прямой, содержащей бис-су $\angle BOC$ и $\angle AOD$. Значит, $ABCD$ — симм-ная, т.е. $ABCD$ — равнобедр. трапеция, т.е. она вписана в окр-сть.

4-хуг-к $OCTD$ — парал-мм, т.к. мы продлим медиану $\triangle OCD$ в 2 раза, т.е. $OD = CT$, $CO = TD$, $\angle OCT = \angle ODT = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$; $\angle CTD = \angle COD = 120^\circ$.

$\angle CAD + \angle CTD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, значит 4-хуг-к $ACTD$ — впис-й, значит A, B, C, T, D — все лежат на одной окр-ти.

На AB опирается $\angle BDA = 60^\circ$; на BT опир-ся $\angle BDT = 60^\circ$; на AT — $\angle ACT = 60^\circ$; значит $AB = BT = AT$, т.е. $\triangle ABT$ — правильный, ч.т.д.

б) $AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos\angle BOA$

$AB^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 39$

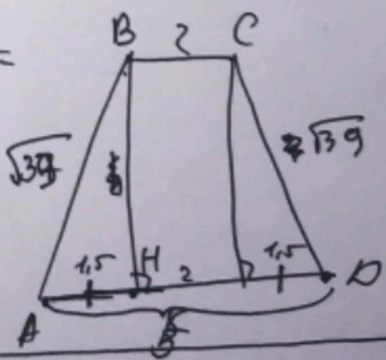
$AB = \sqrt{39}$

Т.к. $\triangle ABT$ — прав., то $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

Пусть BH — высота трапеции $ABCD$.

$S_{ABCD} = BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 3{,}5 \cdot \sqrt{36{,}75}$ (*)

(*) $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{39 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{39 - 2{,}25} = \sqrt{36{,}75}$



$\cancel{\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{4 \cdot 3{,}5 \cdot \sqrt{46{,}75}} = \frac{49 \cdot \sqrt{140{,}25}}{12 \cdot 46{,}75} = \frac{49 \cdot \sqrt{140{,}25}}{561} = \frac{49 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5 \cdot 561}{100}}}{561} = \frac{49\sqrt{561}}{561 \cdot 2} = \frac{49\sqrt{561}}{1122}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{\frac{49\sqrt{561}}{1122}}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\sqrt{3}}{4 \cdot 3{,}5\sqrt{36{,}75}} = \frac{39 \cdot \sqrt{110{,}25}}{14 \cdot 36{,}75} = \frac{39 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7}{10 \cdot 14 \cdot 36{,}75} = \frac{39}{4 \cdot 12{,}25} = \frac{39}{49}$

Ответ: $\frac{39}{49}$