Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006488**

ID профиля: **335532**

Вариант 11

Чистовик:

№ 2

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$$

Не будем вводить ограничения, а проверим подстановкой.

Введём замену $\sqrt{x+2}=a$, $\sqrt{3-x}=b$

$a\geq 0$
$b\geq 0$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$$a-b+3=2\sqrt{ab}$$

тогда $a^2+b^2=(\sqrt{x+2})^2+(\sqrt{3-x})^2=x+2+3-x=5$

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ (a-b+3)=2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$(a-b+3)=2\sqrt{ab}$ – возведём в квадрат.

$$a^2+6a-2ab-6b+b^2+9=4ab$$

$$a^2+b^2=5$$

$$5+6a-6b+9=6ab$$

$$6a+14=6ab+6b$$

$$6a+14=b(6a+6)$$

$$b=\frac{6a+14}{6a+6}$$

$$a^2+\left(\frac{6a+14}{6a+6}\right)^2=5$$

$$a^2+\frac{36a^2+168a+196}{36a^2+72a+36}-5\cdot\left(\frac{6a+14}{6a+6}\right)^2=0$$

$$36a^4+168a^3+196a-144a^2-672a-784=0$$

$$36a^4+168a^3+52a^2-672a-784=0 \quad \Big|:4$$

$\boxed{1}$

$9a^4+42a^3+13a^2-168a-196=0$

Проверим корень $a=-2$

$144-336+52+336-196=0$

$a=-2$ явл корнем, поделим на $(a+2)$

$$
\begin{array}{l|l}
9a^4+42a^3+13a^2-168a-196 & a+2 \\
\underline{9a^4+18a^3} & 9a^3+24a^2-35a-98 \\
\quad 24a^3+13a^2 & \\
\quad \underline{24a^3+48a^2} & \\
\qquad -35a^2-168a & \\
\qquad \underline{-35a^2-70a} & \\
\qquad\quad -98a-196 & \\
\qquad\quad \underline{-98a-196} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

хоть $a=-2$ - явл корнем но он не удв. т.к $a>0$

$(a+2)(9a^3+24a^2-35a-98)=0$

подставим $a=2$

$9\cdot 8+96-70-98=0$

$a=2$ - удв поделим всё на $(a-2)$

$$
\begin{array}{l|l}
9a^3+24a^2-35a-98 & a-2 \\
\underline{9a^3-18a^2} & 9a^2+42a+49 \\
\quad 42a^2-35a & \\
\quad \underline{42a^2-84a} & \\
\qquad 49a-98 & \\
\qquad \underline{49a-98} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$(a+2)(a-2)(9a^2+42a+49)=0$

$9a^2+42a+49=0$

$D=1764-1764=0$

$a=\frac{-42}{9}<0 \Rightarrow$ не удв.

единственный удовлетворяющий корень $a=2$

$a^2+b^2=5 \quad (a=2)$

$b^2=1$

$b_1=1$

$b_2=-1$ - не удв $b>0$

2

Чистовик

$\sqrt{x+2} = a = 2$

$x+2=4$

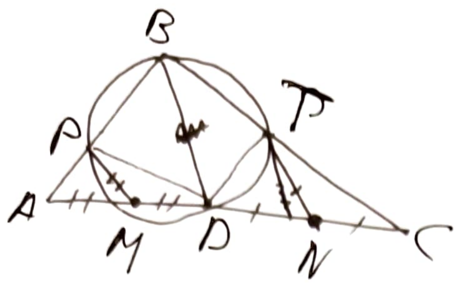
$x=2$ подставим и проверим

$\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2 \cdot \sqrt{4}$

$4=4$ всё верно $\Rightarrow$

Ответ: $x=2$

№1



Дано: $\triangle ABC$

$DN=NC$

$AM=MD$

Найти: $\angle ABC$

а) 1) рассм $\triangle PBD$ и $\triangle DTB$

• $\angle BPD=\angle BTD=90^\circ$ (т.к BD - диаметр, а вписанные углы опираются на него)

2) т.к. $\angle BPD=90^\circ \Rightarrow \angle APD=90^\circ$ т.к смежные ($\angle APD+\angle BPD=180^\circ$)

3) аналогично $\angle BTD=90^\circ \Rightarrow \angle DTC=90^\circ$ (смежные)

4) рассм $\triangle APD$ ($\angle APD=90^\circ$), PM - медиана ($AM=MD$ по усл) $\Rightarrow$

$\Rightarrow PM=AM=MD$ (в прямоуг. треугольнике медиана из прямого угла равна половине гипотенузы)

5) аналогично пункту 4 $TN=DN=NC$

6) рассм $\triangle PDM$ - Р/Б т.к $PM=MD$

7) рассм $\triangle TND$ - Р/Б т.к $TN=ND$

8) т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMN+\angle TNM=180^\circ$

9) рассм $\triangle MPD$ и $\triangle DTN$

Пусть $\angle PMN=x$, тогда $\angle TNM=y$

~~тогда~~

• из пункта 8 $\angle PMN+\angle TNM=180^\circ$

$x+y=180 \Rightarrow y=180-x$

• т.к треугольники Р/Б тогда другие углы равны $=\frac{180-x}{2}, \frac{180-y}{2}$

• рассм $\angle PDT=180-\frac{180-x}{2}-\frac{180-180+x}{2}=$

$=180-90+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=90^\circ$

$\boxed{4}$

10) рассм четырёхугольник $DBTDP$
вокруг него описана окружность $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ противолежащие углы в сумме дают 180°
$\angle PBD + \angle PDT = 180$
из пункта 9 $\angle PDT = 90^\circ$
$\angle PBD = 90^\circ = \angle ABC$
Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б) Дано: $MP = \frac{1}{2}$
$NT = 2 \quad BD = \sqrt{3}$

1) рассм $\triangle DTN$ и $\triangle APM$ – подобные ($P/Б$, 9 $\angle PMA = \angle TND$)
~~$PM \parallel TN$~~ и коэф подобия $= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$
2) аналогично $\triangle PDM \sim \triangle TCN$ коэф подобия $= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$
3) т.к. $\triangle DTN \sim \triangle APM$ $\left(\frac{TN}{PM} = 4\right) \Rightarrow \frac{TD}{PA} = 4$
4) аналогично пункту 3 т.к $\triangle PMD \sim TNC \Rightarrow \frac{PD}{TC} = \frac{1}{4}$
5) ~~Пусть~~ т.к. $\square ABTD$ ~~пр~~ прямоугольник (из пункта а) $\Rightarrow$
$\Rightarrow PB = DT, \quad BT = PD.$
6) $\frac{DT}{PA} = 4 \quad DT = PB \Rightarrow \frac{PB}{PA} = 4$
7) $\frac{TC}{PD} = 4 \quad BT = PD \Rightarrow \frac{TC}{BT} = 4$
Пусть $TB = x$; $PA = y$
8) т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг.
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
$AC = 2TN + 2PM = 1 + 4 = 5$
$AB = AP + PB$
$BC = BT + TC$

5

9) $AB = 4y + y = 5y$

$BT = x + 4x = 5x$

$AB^2 + BT^2 = AC^2 = 25$

$25x^2 + 25y^2 = 25$

10) т.к. BTD – прямоуг $\Rightarrow BD^2 = \underset{x}{\underset{\parallel}{BT}}^2 + \underset{4y}{\underset{\parallel}{TD}}^2$

$$\begin{cases} x^2 + 16y^2 = BD^2 = 3 \\ 25x^2 + 25y^2 = 25 \end{cases}$$

$x^2 = 1 - y^2 \quad 25 - 25y^2 = 25x^2$

$1 - y^2 + 16y^2 = 3$

$15y^2 = 2$

$y^2 = \frac{2}{15} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{15}}$

$x^2 = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{13}{15}}$

11) $S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{5x \cdot 5y}{2} = \frac{25 \cdot \frac{\sqrt{13 \cdot 2}}{15}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{26}}{30} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{26}$

Ответ: $S = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{26}$

№3

A: $5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

преобразуем данное уравнение

$4a^2+12ax+9x^2-x^2+a^2+4ay+4y^2+8xy=0$

$\underbrace{(3x+2a)^2}_{-x_0}+\underbrace{(2y+a)^2}_{-y_0}=x^2-8xy$

$x_{0A}=-2a$

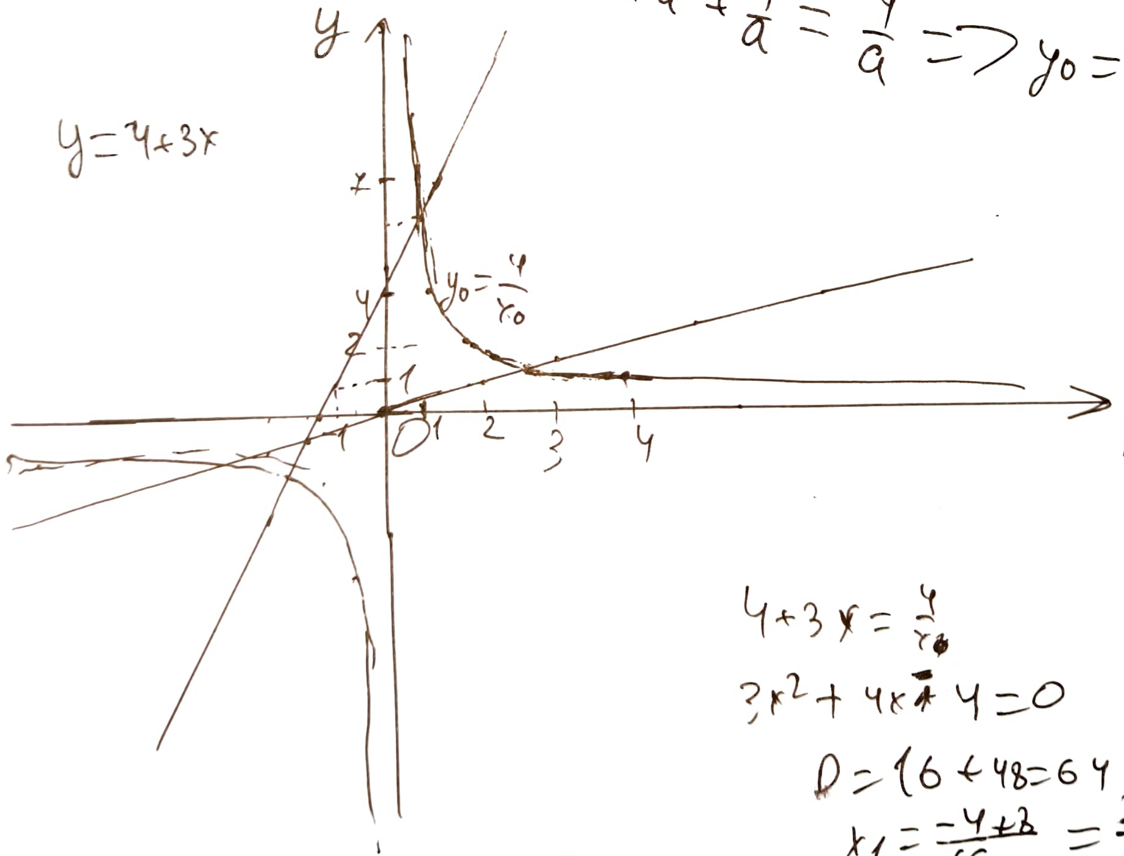
$y_{0A}=-a \Rightarrow y=\frac{x}{2}$

B: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=\frac{4}{a} \Rightarrow y_0=\frac{4}{x_0}$



$\frac{x}{2}=4+3x$

$x=8+6x$

$5x=-8$

$x=-\frac{8}{5}$

$x=-1{,}6$

$4+3x=\frac{4}{x_0}$

$3x^2+4x-4=0$

$D=16+48=64$

$x_1=\frac{-4+8}{6}=\frac{2}{3}$

$x_2=\frac{-12}{6}=-2$

для точки B при $a\in(-\infty;-2)\cup$

4

Для точки B: a лежит над прямой $y = 4+3x$

при $a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{2}{3})$

ниже: $a \in (-2; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$

Для ~~а~~ A: a лежит выше при

$a \in (-\infty; -1,6)$

ниже: $a \in (-1,6; +\infty)$

Ответ при $a \in ($

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006488**

ID профиля: **335532**

Вариант 11

№4 Чистовик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20$

пусть $a = x^2+y^2$ тогда $b = x^2y^2$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$a \geq 0 \quad b \geq 0$

$\underset{a}{(x^2+y^2)^2}$, $\underset{b}{x^2y^2}$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \Rightarrow b = 5 - \frac{4}{a} \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$\cancel{4 + ba = 5a}$

$\cancel{5 - \frac{4}{a}}$

$a^2 + 5 - \frac{4}{a} = 20$

$a^2 - 15 - \frac{4}{a} = 0$

$a^3 - 15a - 4 = 0 \qquad a \neq 0$

пуст $a = 4$ тогда:

$64 - 60 - 4 = 0$

разделим на $(a-4)$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 15a - 4 & a - 4 \\ \hline a^3 - 4a^2 & a^2 + 4a + 1 \\ \hline 4a^2 - 15a & \\ 4a^2 - 16a & \\ \hline a - 4 & \\ a - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(a-4)(a^2+4a+1) = 0$

$a^2 + 4a + 1 = 0$

$D = 16 - 4 = 12$

$a_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} < 0$ — не удв $\quad a_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} < 0$ — не удв

$\boxed{1}$

Единственный удовлетворяющ. корень $a=4$

$b=4=5-\frac{4}{4}=4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=x^2y^2=4 \\ \cancel{\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5}\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases}$$

$\cancel{\frac{4}{x^2y^2}+x^2y^2=5}$ $\quad x^2\cdot y^2\neq 0$

$\cancel{4+x^2y^2=5x^2y^2}$

$\cancel{x^2\cdot y^2=4}$

$\cancel{x^4y^4+x^2y^2=20}$

$\cancel{x^2y^2=x^2+y^2}$

$\cancel{y^2(x^2-1)=x^2}$

$\cancel{y^2=\frac{x^2}{x^2-1}}$

$x^2y^2=4$

$x^2=\frac{4}{y^2}$

$\frac{4}{y^2}+y^2=4$

$y^4-4y^2+4=0$

$y^2=t$

$t^2-4t+4=0$

$\cancel{t=4}\ D=0$

$t=\frac{4}{2}=2$

$y^2=2$

$y_1=\sqrt{2}$

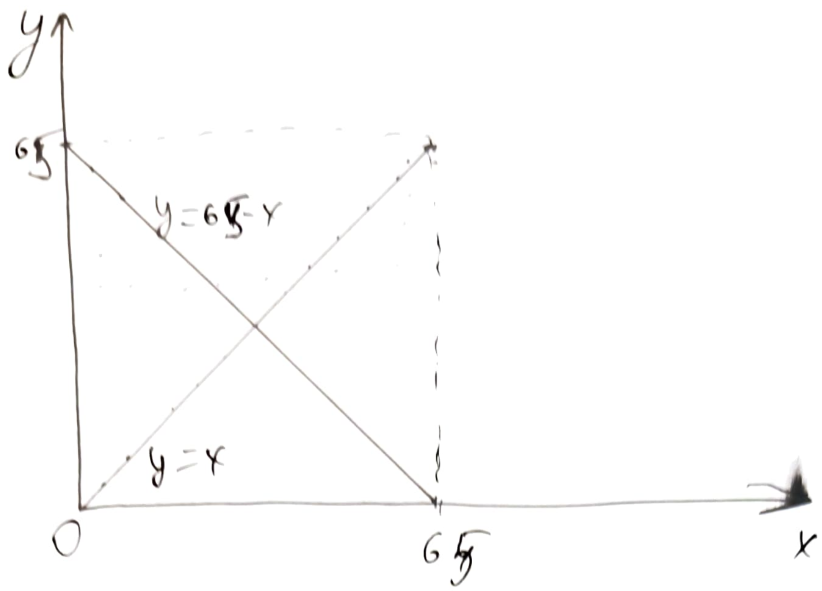
$y_2=-\sqrt{2}$

$x^2=\frac{4}{y^2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow x_1=\sqrt{2} \quad x_2=-\sqrt{2}$

Ответ: $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$; $y_1=\sqrt{2}$; $y_2=-\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

№5



Сначала посчитаем сколько всего есть узлов которыми мы можем пользоваться.

$64 + 64 - 1 = 127$ (1 узел – пересечение двух прямых)

↑ столько узлов $\in y = x,\ y = 65 - x$

к каждому узлу мы можем подобрать $64 \cdot 64 = 4096$ узла

но т.к. необходимо чтобы они были не параллельны мы из 4096 вычитаем один столбец и одну строку

$4096 - 64 - 64 + 1 = 3969$ узлов.

$$
\begin{array}{r}
4096 \\
-\ 64 \\
\hline
4032 \\
-\ 63 \\
\hline
3969
\end{array}
$$

теперь можем посчитать кол-во вариантов

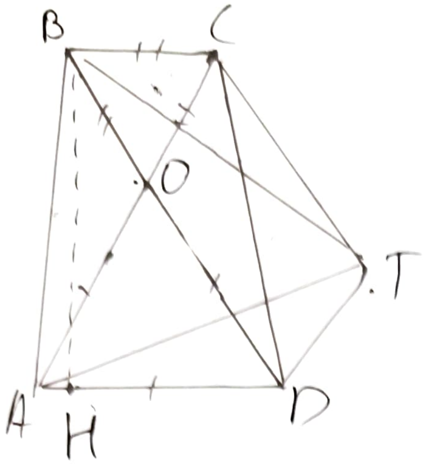
$127 \cdot 3969 = 504063$

$$
\begin{array}{r}
3969 \\
\times\ 127 \\
\hline
27783 \\
+\ 7938 \\
3969 \\
\hline
504063
\end{array}
$$

Ответ: 504063 варианта (способа)

$\boxed{3}$

№ 6.



Дано: T – симм.

ΔBOC, ΔAOD – р/с

Док: ΔBTA – р/с

а) 1) т.к. точка T симм. => OCTD – параллелограм. (OC=TD; CT=OD)

2) т.к. ΔAOD – р/с => AD=DO

3) т.к OCTD – паралелограм => OD=CT, а т.к. OD=AD=CT=AD

4) т.к. ΔBOC – р/с => BC=OC

5) т.к OCTD – параллелограм => OC=TD, а т.к. OC=BC => TD=BC

6) пусть $\angle ODC = x = \angle DCT$ (т.к паралелограм)

тогда $\angle CDT = y = \angle OCD$ (т.к паралелограм)

7) $\angle ODA = 60^\circ$ (т.к. ΔAOD – р/с)

8) $\angle BCO = 60^\circ$ (т.к ΔBOC – р/с)

9) расм $\angle BCT$ он равен $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCD + \angle DCT = 60 + x + y$

10) расм $\angle ADT$ он равен $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODC + \angle CDT = 60 + x + y$

$\Downarrow$

$\angle ADT = \angle BCT$

11) из пунктов 5,3,10 получаем

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ BC=DT \\ \bullet\ CT=AD \\ \bullet\ \angle ADT=\angle BCT \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BCT = \Delta ADT \Rightarrow BT=AT$

12) CD = BA. т.к. BC∥AD, а диагонали равны => ABCD – равнобокая трапеция => CD=BA

~~13) расм ΔCBT –~~

13) CT ∥ OD (OCTD – паралелограм),

$\boxed{4}$

~~BC = DT~~

14) $BC = DT$ (из пункта 5), $CT \parallel OD$ (пункт 13) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BCTD$ — равнобедренная трапеция $\Rightarrow BT = CD$

15) $\triangle BCT = \triangle CTD$

- $CD = BT$ (пункт 14)
- $BC = OD$ (пункт 5)
- CT — общая.

16) т.к. $OCTD$ — параллелограмм CD — диаг. $\Rightarrow \triangle DOC = \triangle DCT$ (Т-симм)

17) $\triangle BOA = \triangle COD$

- $CO = BO$ (по усл)
- $DO = OA$ (по усл)
- $\angle COD = \angle BOA$ (вертикальные) $\Rightarrow CD = BA$

18) $BA = CD$, $CD = BT$, $\Rightarrow BT = BA$

19) из пункта 11 — $BT = AT$, $BT = BA \Rightarrow BT = AT = BA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABT$ — р/с.

~~20~~

б) Дано: $BC = 2 = BO = OC$, $AD = 5 = AO = OD$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

1) найдём BA

$BA^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot BO \cdot AO \cdot \cos\angle AOB$ ($\angle AOB = 180 - 60 = 120°$)

$BA^2 = 4 + 25 + 2 \cdot 5$

$BA^2 = 39$

$BA = \sqrt{39}$

2) Опустим из точки B на AD — высоту H

$BH \perp AD$ $AH = \frac{AD - BC}{2} = 1{,}5$

$\boxed{5}$

3) $BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{39 - \frac{9}{4}} = \sqrt{36\frac{1}{4}}$

4) $S_{ABCD} = BH \cdot \frac{BC + AD}{2} =$ (т.к. ABCD – трапеция доказан в пункте 12)

$= \cancel{8A}$ $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{145}}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7\sqrt{145}}{4}$

~~5) $S_{ABT} = \frac{\sqrt{39}}{2}$.~~

5) $S_{ABT} = \frac{1}{2} BT \cdot BT \cdot \cos\frac{1}{2}(\angle BTA) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{39} \cdot \sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{39\sqrt{3}}{4}$

6) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\sqrt{3} \cdot 4}{7 \cdot \sqrt{145} \cdot 4} = \frac{39\sqrt{3}}{7\sqrt{145}}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\sqrt{3}}{7\sqrt{145}}$

6