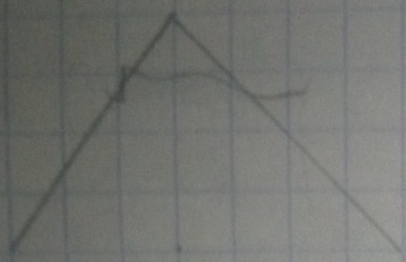
Часть 1

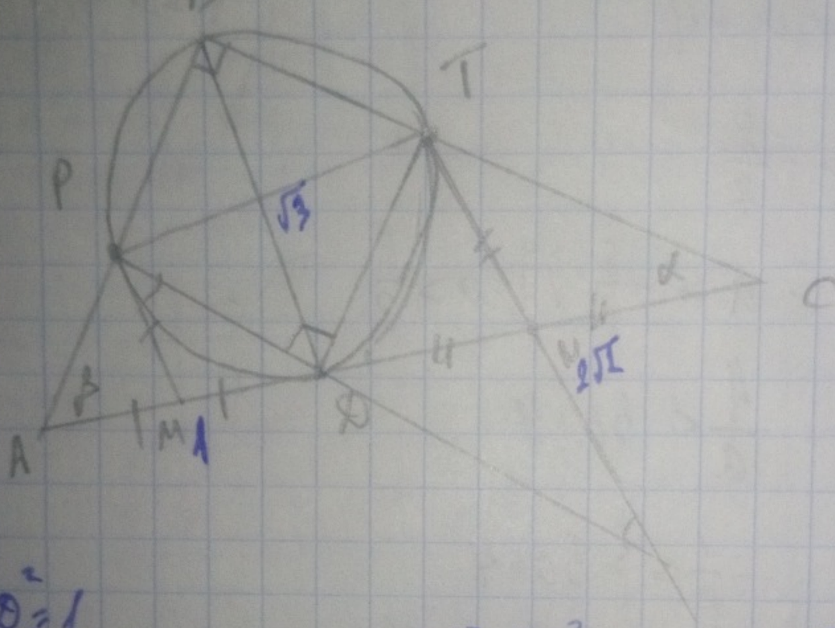
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006473**

ID профиля: **317854**

Вариант 11





$S = S_{APD} + S_{BPDT} +$
$+ S_{DTC}$

$S_{APD} =$

$=$

$AP^2 + PD^2 = 1$
$BP^2 + PD^2 = 3$

$BP^2 - AP^2 = 2$

$CT^2 - BT^2 = 5$

$BT = PD$
$BP = DT$

$AP^2 + CT^2 = 6$

$AP^2 + BT^2 = 1$

$BP^2 - AP^2 = 2$

$CT^2 - BT^2 = 5$

$BP^2 + BT^2 = 3$

$AP^2 + BT^2 = 1$

$BP^2 + CT^2 = 8$

$BP^2 = 8 - CT^2$

$AP^2 = BP^2 - 2 = 6 - CT^2$

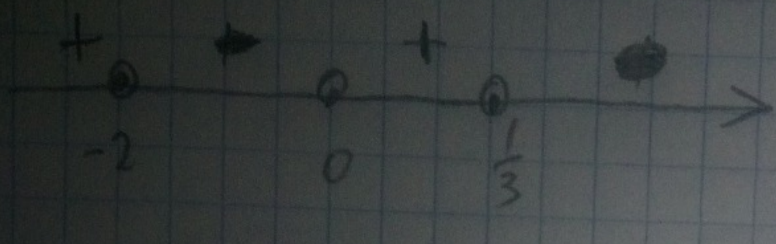
$AP^2 + PD^2 + DT^2 + CT^2 =$

$= AD^2 + DC^2 = 9$

$CT^2 + BT^2 + BP^2 + BT^2 - BP^2 + AP^2 =$

$= CT^2 + AP^2 = 5 + 3 - 2 = 6$

$PD^2 + DT^2 = 3 = PD^2$



$-2 < a < 0 \cap a > \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2} a < 3a + 4$

$\frac{7}{2} a > -4$

$a > -\frac{8}{7}$

$0 > a > -\frac{8}{7} \cap a > \frac{1}{3}$

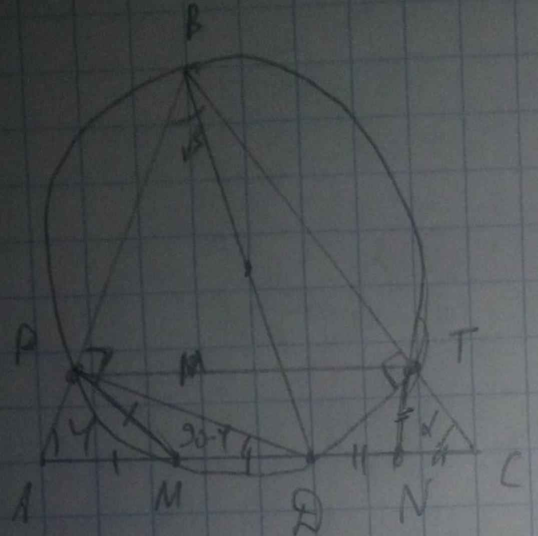
$\frac{4}{a} < 3a + 4$

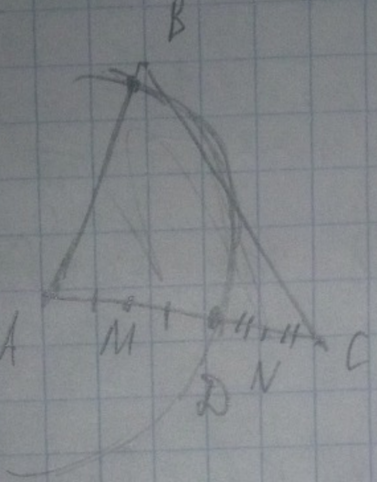
$-\frac{1}{2} a > 3a + 4$

$\begin{cases} a \in (-2; 0) \cap a \in (\frac{1}{3}; \infty) \\ a \in (-\infty; -\frac{8}{7}) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-2; -\frac{8}{7})$

$\begin{cases} -2 > a \cap a \in (0; \frac{1}{3}) \\ a > -\frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in (0; \frac{1}{3})$





$MP = 0{,}5 \quad NT = \sqrt{2}$

$BD = \sqrt{3}$

$\angle\varphi = \angle(90-\alpha)$

$\varphi = 90 - \alpha$

$\varphi + \alpha = 90$

$\beta = 180 - \varphi - \alpha = 90$

$AD = 1 \qquad AB = \sqrt{3 + 1 - 2\cos x \cdot 3} = \sqrt{4 - 6\cos x}$

$CD = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{4 + 6\cos x}$

$$S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{16 - 36\cos^2 x}}{2} = \sqrt{4 - 9\cos^2 x}$$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b - 2ab + 3$

$x + 2 - 3 + x + 2$

$ax \cdot 2ax - ay + a + 1 = 0$

$a \neq 0$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{4}{a}$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = a$

$y(x_0) = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{4}{a} = \frac{4}{a}$ $B\left(a; \frac{4}{a}\right)$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$4(x^2 +$

$2a^2 + 4ay + 2y^2 + 2y^2 + 8xy + 8x^2 + 3a^2 + 12ax = 0$

$a - b + 3 = 2ab$ $a \geq 0$
$b \geq 0$

$a + 3 > b$

$\sqrt{x+2} + 3 > \sqrt{3 - \cancel{x}}$ $\sqrt{3-x} \leq \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$

$3 \geq \sqrt{3-x} - \sqrt{x+2}$

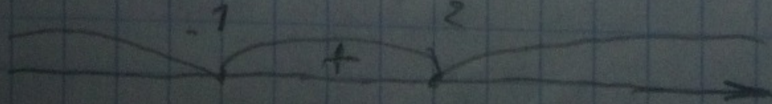
$9 \geq 3 - x + x + 2 + 2\sqrt{6 + x - x^2}$

$4 \geq 2\sqrt{6 + x - x^2}$

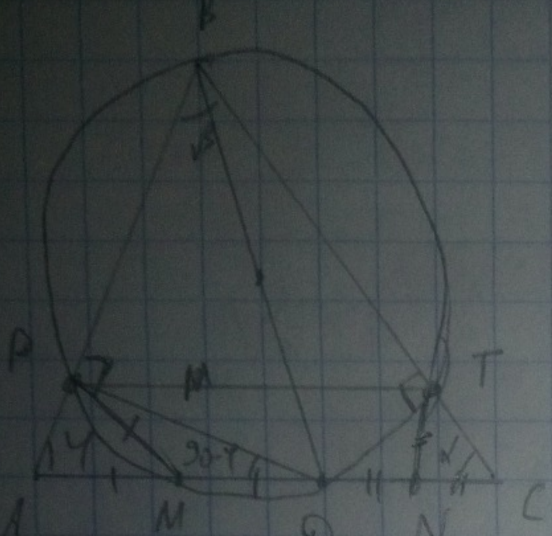
$\sqrt{-x^2 + x + 6} = 2$

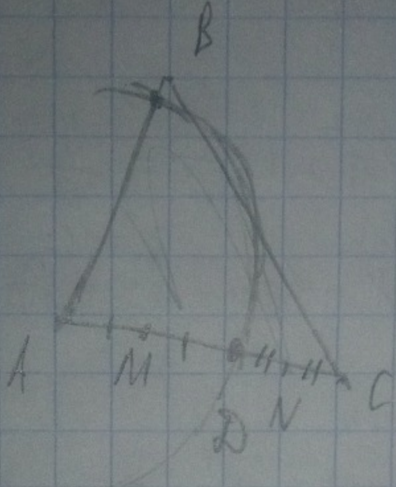
$-x^2 + x + 6 = 4$

$-x^2 + x + 2 = 0$



$x_1 = 2$ $x_2 = -1$





$MP = 0{,}5 \quad NT = \sqrt{2}$
$BD = \sqrt{3}$

$\angle \varphi = \angle (90 - \alpha)$

$\varphi = 90 - \alpha$

$\varphi + \alpha = 90$

$\beta = 180 - \varphi - \alpha = 90$

$AD = 1$
$CD = 2\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{3 + 1 - 2\cos x \cdot 3} = \sqrt{4 - 6\cos x}$

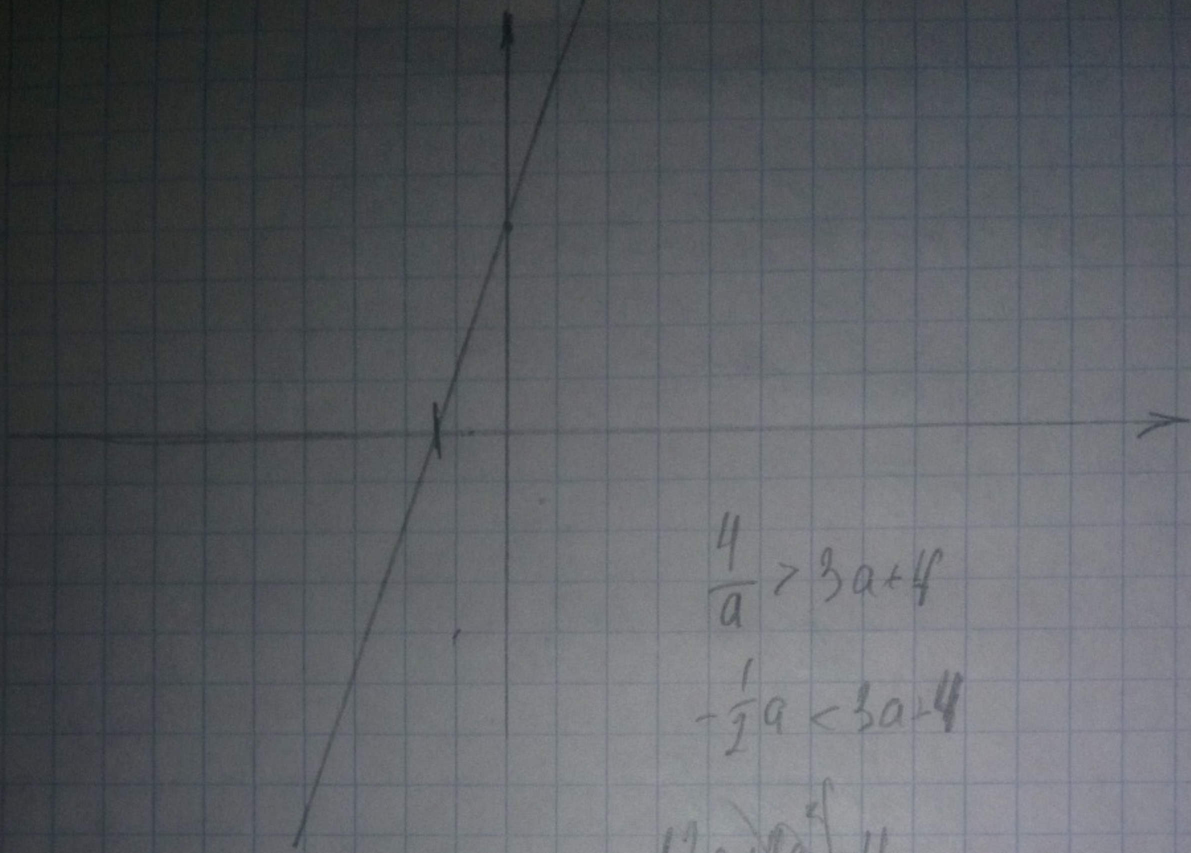
$BC = \sqrt{4 + 6\cos x}$

$S = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{\sqrt{16 - 36\cos^2 x}}{2} = \sqrt{4 - 9\cos^2 x}$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b - 2ab + 3$

$x + 2 - 3 + x + 2$



$\frac{4}{a} > 3a+4$

$-\frac{1}{2}a < 3a+4$

$\frac{12a+4a^2-4}{a} > 0$

$\frac{3a^2+4a-4}{a} > 0$

$y(B) = \frac{4}{a} <$

$16+4\cdot3\cdot4 = 64 = 8^2$

1) $\frac{4}{a} > 3a+4$ $\quad 3xa+4a-4 >$ $\quad a_{1,2} = \frac{-4\pm8}{6} = \left[\begin{array}{l}-2\\ \frac{1}{3}\end{array}\right.$

$-\frac{1}{2}a < 3x+4$ $\quad a < \frac{4}{3x+4}$ $\quad -2a > \frac{1}{8}$ $\quad a > \frac{1}{3}$

$a > -2(3x+4)$ $\quad \frac{1}{2}a > -4$

$\frac{4}{a} > -\frac{1}{2}a$ $\quad -2(3x+4) < a < \frac{4}{3x+4}$ $\quad a > -\frac{8}{7}$

$-\frac{8}{a} < a$ $\quad -2(3x+4) < \frac{4}{3x+4}$

$\frac{a^2+8}{a} > 0$, $a>0$ $\quad \frac{2(3x+4)^2+4}{3x+4} > 0$

$x > -\frac{4}{3}$

$x^2 + 2 + 3 - x - 2\sqrt{6+x-x^2} = 4(6+x-x^2) -$

$a^2 - 2ab + b^2 - 6b + 6a + 9 = 4a^2b^2$

$3 - \sqrt{5}$

$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6 + \frac{1}{4}$

$a - b + 3 = 2ab$

$2ab + b - a = 3$

$4y^2 - (8x+4a)y + 5a^2 + 8x^2 - 12ax = 0$

$D = 64x^2 + 64ax + 16a^2 - 80a^2 - 128x^2 - 192ax = 0$

$-64a^2 - 64x^2 - 128ax = 0$

$-64(a+x)^2 = 0$

$a \neq -x \qquad x = -a$

$y = \frac{8x+4a}{8} = \frac{-4a}{8} = -\frac{a}{2}$

$x^2 + 2 + 3 - x - 2\sqrt{6 + x - x^2} = 4(6 + x - x^2) -$

$a^2 - 2ab + b^2 - 6b + 6a + 9 = 4a^2b^2$

$\sqrt{x + 2} - \sqrt{}$

$3 - \sqrt{5}$

$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - b = b + \frac{1}{4}$

$a - b + 3 = 2ab$

$2ab + b - a = 3$

$4y^2 - (8x + 4a)y + 5a^2 + 8x^2 - 12ax = 0$

$D = 64x^2 + 64ax + 16a^2 - 80a^2 - 128x^2 - 192ax = 0$

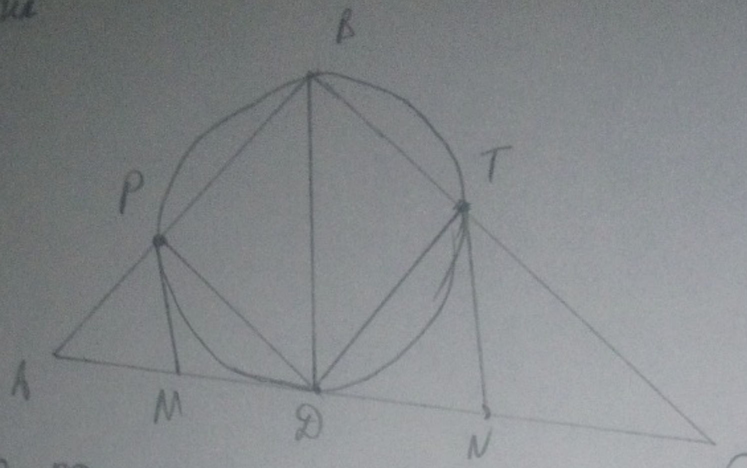
$-64a^2 - 64x^2 - 128ax = 0$

$-64(a + x)^2 \leq 0$

$a = -x \qquad x = -a$

$y = \frac{8x + 4a}{8} = \frac{-4a}{8} = -\frac{a}{2}$

Чистовик



Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$; PD - диаметр ω; $\omega \cap AB = P$; $\omega \cap AC = T$; $DN = NC$; $AM = M$
$PM \parallel TN$

~~Доказать: P1~~

Найти: $\angle ABC$

Решение: Заметим, что $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ как опирающиеся на диаметр. Тогда $\angle APD = \angle CTD = 90^\circ$ как смежные. Значит (PM - медиана) $AM = PM = MD$ и $DN = NT = TC$
$\angle TNC = \angle NTD + \angle NDT = 2(90 - \angle C)$, $\angle PMD = \angle PAD + \angle APM = 2\angle A$.

Чистовик

Задача 2.

Пусть $\sqrt{x+2}=a$, $\sqrt{3-x}=b$;

Тогда исходное уравнение преобразуется в $a-b+3=2ab$

Заметим, что $a^2+b^2=x+2+3-x=5$. Тогда $3=a^2+b^2-2$.

$a^2+a-b+b^2-2=2ab$

$a^2-2ab+b^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot a-2\cdot\frac{1}{2}\cdot b+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=0$

$(a-b+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=0$

$(a-b+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(a-b+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=0$

$(a-b-1)(a-b+2)=0$

$a=b+1$

$\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+1$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1$

$x+2+3-x-2\sqrt{6+x-x^2}=1$

$5-2\sqrt{6+x-x^2}=1$

$\sqrt{6+x-x^2}=2$

$-x^2+x+6=4$

$-x^2+x+2=0$

$x_1=2 \quad x_2=-1$

$a=b-2$

$\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=-2$

$x+2+3-x-2\sqrt{6+x-x^2}=4$

$5-2\sqrt{6+x-x^2}=4$

$\sqrt{6+x-x^2}=\frac{1}{2}$

$6+x-x^2=\frac{1}{4}$

$-x^2+x+\frac{23}{4}=0$

$D=1+\frac{23}{4}\cdot 4=24$

$x_1=\frac{1+\sqrt{24}}{2}=\frac{1+2\sqrt{6}}{2}<\frac{1+5}{2}=3$

$x_2=\frac{1-\sqrt{24}}{2}=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}>\frac{1-5}{2}=-2$

$(2\sqrt{6})^2=4\cdot 6=24<25=(\pm 5)^2 \Rightarrow$

$|2\sqrt{6}|<|5|$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=-1$; $x_3=\frac{1+2\sqrt{6}}{2}$; $x_4=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006473**

ID профиля: **317854**

Вариант 11

Задача 4 Чистовик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, $a>0$, $x^2y^2=b$, $b\geq 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2+b=20 \end{cases}$$

Вычтем из второго первое:

$$a^2 - \frac{4}{a} = 15$$

$$\frac{a^3-15a-4}{a}=0 \quad a\neq 0$$

$$a^3-15a-4=0$$

Методом подбора $a_1=4$

$$4^3-15\cdot 4-4 = 64-60-4=0$$

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \hline -\ a^3-4a^2 & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a & \\ -\ 4a^2-16a & \\ a-4 & \\ -\ a-4 & \\ 0 & \end{array}$$

$$a^2+4a+1=0$$

$$D=16-4\cdot 1=12$$

$$a_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}-2<0$$

$$a_3=\frac{-4-\sqrt{12}}{2}=-2-\sqrt{3}<0$$

Значит $a=4$

$$b=20-a^2=20-16=4$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \left[\begin{array}{l} xy=2 \\ xy=-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$x^2+2xy+y^2=8$$

$$(x+y)^2=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2\sqrt{2} \\ x+y=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Чистовик

$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=2 \end{cases}$$

$a=2-b$

$$\begin{cases} x+y=2\sqrt{2} \\ xy=2 \end{cases}$$

$y=2-x$

$x(2-x)=2$

$-x^2+2\sqrt{2}x-2=0$

$-(x-\sqrt{2})^2=0$

$x=\sqrt{2}$

$y=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x+y=-2\sqrt{2} \\ xy=2 \end{cases}$$

$y=-2\sqrt{2}-x$

$x(-2\sqrt{2}-x)=2$

$-x^2-2\sqrt{2}x-2=0$

$-(x+\sqrt{2})^2=0$

$x=-\sqrt{2}$

$y=-\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$x^2+2xy+y^2=0$

$(x+y)^2=0$

$x+y=0$

$x=-y$

$-y^2=-2$

$y=\sqrt{2}$ $\quad$ $y=-\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$ $\quad$ $x=\sqrt{2}$

Ответ: $x_1=\sqrt{2}$ $y_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$ $y_2=-\sqrt{2}$; $x_3=\sqrt{2}$ $y_3=-\sqrt{2}$; $x_4=-\sqrt{2}$ $y_4=\sqrt{2}$

211006473 (U317854 M1276767)

Задача 5

Чистовик

Выберем одну точку на прямой $y=x$, которая лежит внутри квадрата. С ней на горизонтали и вертикали лежат по 63 точки. Значит не лежащих на одной горизонтали или вертикали $64 \times 64 - 63 - 63 - 1 = 63^2$. Таких клеток на прямой 64, поэтому таких „пар" будет $64 \cdot 63^2$. При этом мы дважды посчитали „пары", где обе клетки лежат на прямой $y=x$. Их $C_{64}^2 = \frac{64 \cdot 63}{2}$. Значит „пар" $64 \cdot 63^2 - \frac{64 \cdot 63}{2}$.

Прямая $y=65-x$ симметрична прямой $y=x$ относительно прямой $y=32,5$, поэтому если отразить все „пары" для прямой $y=x$ относительно прямой $y=32,5$, получим все „пары" для прямой $y=65-x$. Сложив количество „пар" для $y=x$ и для $y=65-x$, получим все „пары", но „пары", в которых одна точка лежит на прямой $y=x$, а другая на $y=65-x$, будут посчитаны дважды. Таких „пар" $64 \cdot 62$. Значит искомое количество „пар" равно $\left(64 \cdot 63^2 - \frac{64 \cdot 63}{2}\right) \cdot 2 - 64$

$= 500032$.

Ответ: 500032.

3

Задача 6 Чистовик

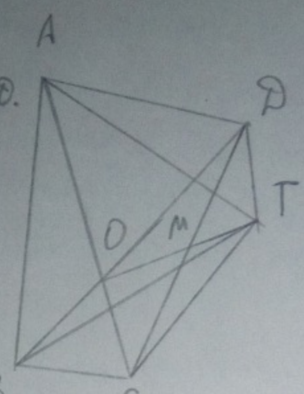
Дано: ABCD; $O = AC \cap BD$

T – симметрична O относительно сер. CD.

$BC=2$; $AD=5$; $\triangle AOD$, BOC – правильные

Доказать: ATB – правильный

Найти: $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABT}}$



Док-во:

Пусть M – середина CD.

T симметрично O относительно $M \Rightarrow OM=MT$.

Тогда в четырехугольнике ODTC диагонали делятся точкой пересечения пополам $\Rightarrow$ $DT=OC$, $TC=OD$ и ODTC – параллелограмм. $\angle BDT=\angle BOC=60$ (соответственные) $\angle OCT=\angle ODT$ как противоположные. Тогда $\angle ADT=\angle BCT=120°$ и $\triangle\triangle ADT=\triangle TCB$ по 2 сторонам и углу между ними. Значит $AT=BT$, $\angle ATD=\angle TBD$

$OC \parallel DT \Rightarrow \angle CAT=\angle ATD=\angle TBD$. Они опираются на дугу $TD \Rightarrow ABTD$ – вписанный. $\angle ABT=180°-\angle ADT=60°$. Тогда $\triangle ABT$ – равнобедренный с углом $60° \Rightarrow$ $\triangle ABT$ – правильный ■

$$AT=\sqrt{AD^2+DT^2-2AD\cdot DT\cdot\cos 120}=\sqrt{4+25+2\cdot 5}=\sqrt{39}$$

$$S_{ABT}=AT^2\cdot\sin 60=\frac{39\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{DOC}+S_{COB}+S_{BOA}=AO\cdot OD\cdot\sin 60+DO\cdot OC\cdot\sin 120+CO\cdot BO\cdot\sin 60+BO\cdot AO\cdot\sin 60=$$

$$=5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+5\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{2}$$

4

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{39\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 49\sqrt{3}}=\frac{39}{49}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{39}{49}$

1. $\frac{64\cdot 63}{2} = 64\cdot 63 -$

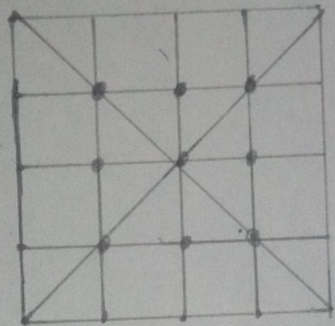
$\frac{64\cdot 63}{2}\cdot 63 +$

$2\cdot 64\cdot 64\cdot 63 - 64\cdot 64 + 1$

$2\cdot\left(64\cdot 64\cdot 63 - \frac{64\cdot 63}{2}\right) - 64\cdot 63 +$

$128\cdot 64\cdot 63 - 64\cdot 63 - 64\cdot 63 =$

$= 126\cdot 64\cdot 63$



$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 63 \\ \hline 192 \\ +\ 384\ \ \\ \hline 4032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4032 \\ \times\ 126 \\ \hline 24192 \\ +\ 8064\ \ \\ +\ 4032\ \ \ \ \\ \hline 508032 \end{array}$$

$\cancel{2\cdot\left(3\cdot 2\cdot 3 - \frac{3\cdot 2}{2}\right) - 3\cdot 2}$

$2\cdot\left(3\cdot 2\cdot 2 - \frac{3\cdot 2}{2}\right) - 3\cdot 1$

$2\cdot 64\cdot 63\cdot 63 - 64\cdot 63 - 64\cdot 62$

$64\,(2\cdot 63\cdot 63 - 63 - 62) = 63\,(2\cdot 63 - 1)\cdot 62 = 63\cdot 125 - 62$

$63\cdot$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 63 \\ \hline 375 \\ 750\ \ \\ \hline 7875 \end{array} - 62 = 7813$$

$$\begin{array}{r} 7813 \\ \times\ 64 \\ \hline 31252 \\ +\ 46878\ \ \\ \hline 500032 \end{array}$$

$-y^2+2\sqrt{2}y-2=0$

$y^2-2\sqrt{2}y+2=0$

$D=8-4\cdot 2=0$

$y=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x=2\sqrt{2}$

$x+y=-2\sqrt{2}$

$xy=2$

:

$x=-\sqrt{2}$

$y=-\sqrt{2}$

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=-2 \end{cases}$

$x^2+2xy+y^2=0$

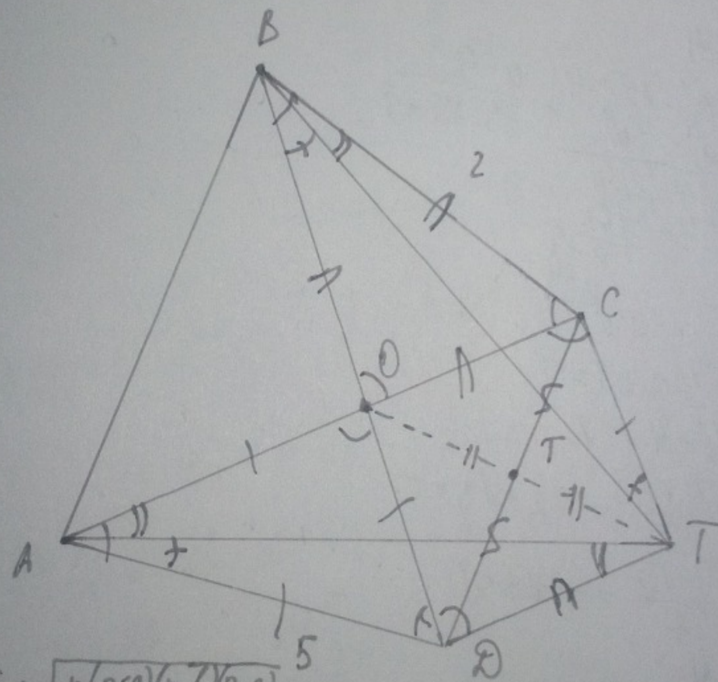
$x+y=0$

$x=-y$

$-y^2=-2$

$y=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$



$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{CDO}+S_{DAO}$

$S_c.$

$4+25+4\cdot 5=7^2$

$2\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}\cdot 2=10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3}+2\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}+5\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=24,5\sqrt{3}$

$7\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=24,5\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$a\geq 0$

$b\geq 0$

$\frac{4}{a} + b = 5$

$a^2+b=20$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15$

$\frac{a^3-15a-4}{a} = 0$

$a^3-15a-4=0$

$a=4$

$64-15\cdot 4-4=60-60=0$

$a_1=4$

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3-4a^2} & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a & \\ -\underline{4a^2-16a} & \\ a-4 & \\ -\underline{a-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$a^2+4a+1=0$

$D=16-4\cdot 1=12$

$a_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3}<0$

$a_3=\frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3}<0$

$a=4$

$b=20-a^2=20-16=4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \left[\begin{array}{l} xy=2 \\ xy=-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

$x^2+2xy+y^2=8$

$x+y=2\sqrt{2}$

$x+y=-2\sqrt{2}$

$x=2\sqrt{2}-y$

$y(2\sqrt{2}-y)=2$