Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006338**

ID профиля: **848007**

Вариант 11

Чистовик.

Задача №1

Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$.

BD – диаметр окружности ω

$\omega \cap AB = P$; $AM = DM$

$\omega \cap BC = T$; $CN = DN$

$PM \parallel TN$

- - - - - - - - - - -

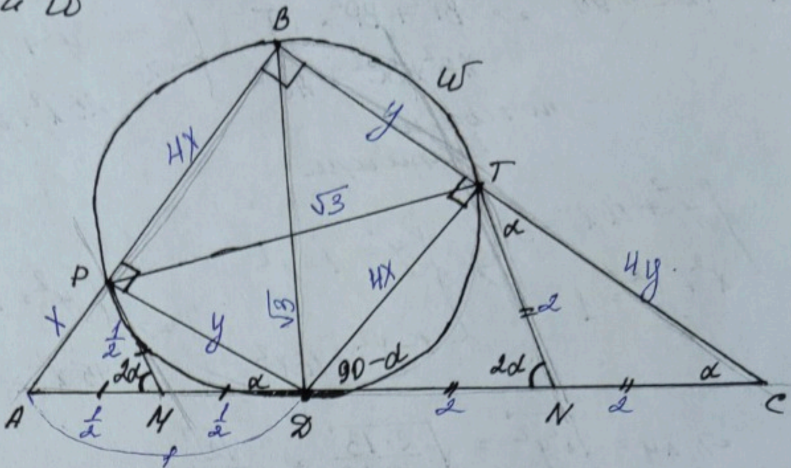
$PM = \frac{1}{2}$

$TN = 2$

$BD = \sqrt{3}$

- - - - - - - - - - -

Найти: $\angle ABC$; S_{ABC}.



Решение: 1) т.к. BD – диаметр ω, $\angle BPD$ и $\angle BTD$ – вписанные $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$
$+$ $AM = DM$, $DN = CN$ $\Rightarrow$ $AM = DM = PM$, $CN = DN = TN$ – по св-ву медианы в прямоуг. $\triangle$-ке.

2) т.к. $BTDP$ – вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle ABC + \angle TDP = 180^\circ$
$+$ $\angle ADP + \angle TDP + \angle TDC = 180^\circ$ $\Rightarrow \angle ABC = \angle ADP + \angle TDC$.

3) $\exists \angle BCA = \alpha$.

т.к. $TN = CN \Rightarrow \angle TCN = \angle NTC = \alpha$.
$+$ $\angle TND$ – внешний к $\triangle TNC$ $\Rightarrow \angle TND = 2\alpha$
$+$ $TN = ND \Rightarrow \angle NTD = \angle TDN$ $\Rightarrow \angle TDN = \angle NDT = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$ – по теореме о сумме углов $\triangle$-ка.

4) т.к. $PM \parallel TN$, AC – секущая $\Rightarrow \angle TND = \angle PMA = 2\alpha$
$+$ $\angle PMA$ – внешний к $\triangle PMD$, $PM = DM$ $\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

5) $\angle ABC = \angle ADP + \angle TDC = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

6) т.к. $\angle APD = \angle CTD = 90^\circ$, $\angle PDA = \angle TCD = \alpha$ $\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle CTD$ (I).

$$\frac{AP}{TD} = \frac{PD}{CT} = \frac{AD}{CD} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

$+$ $\exists AP = x$; $PD = y$ $\Rightarrow TD = 4x$; $TC = 4y$.

211006338 (U848007 M1276162)

Чистовик

Задача 1 (продолжение).

7) т.к. $BTDP$ - вписанный
$\angle ABC = 90° = \angle BTD$ $\Big\}$ => $BTDP$ - прямоугольник => $BT = PD = y$, $BP = TD = 4x$, $BD = PT = \sqrt{3}$.

8) $\angle ABC = 90°$ => $\left.\begin{array}{l} BT^2 + BP^2 = PT^2 \\ AB^2 + BC^2 = AC^2 \end{array}\right\}$ => $y^2 + 16x^2 = 3$, $25x^2 + 25y^2 = 25 \;/ :25$

- по теореме Пифагора

$\begin{cases} y^2 + 16x^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ 1 - x^2 + 16x^2 = 3 \end{cases}$ => $\begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ 15x^2 = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} y^2 = \frac{13}{15} \\ x^2 = \frac{2}{15} \end{cases}$ =>

=> $xy = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13}{15 \cdot 15}} = \frac{\sqrt{26}}{15}$

9) т.к. $\angle ABC = 90°$ => $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{5x \cdot 5y}{2} = \frac{25\,xy}{2} = \frac{\cancel{25}^{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\cancel{15}_3} = \frac{5\sqrt{26}}{6}.$

$\boxed{S_{ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}}$

$\boxed{\text{Ответ: } \angle ABC = 90°;\ S_{ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}.}$

211006338 (U848007 M1276162)

Чистовик

Задача 2.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3. \\ -x^2+x+6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in [-2; 3]}.$

$x^2 - x - 6 \leq 0$

$x^2 - x - 6 = 0.$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

$x \in [-2; 3]$

$a = \sqrt{x+2}, \ a \geq 0$

$b = \sqrt{3-x}, \ b \geq 0.$ $\quad \underline{a^2 + b^2 = 5.} \Rightarrow$

$a - b + 3 = 2ab.$ $\quad \Rightarrow \underline{5 - 2ab = (a-b)^2}$

$a - b + 3 - 2ab = 0.$

$a - b + 5 - 2ab - 2 = 0.$

$(a-b) + (a-b)^2 - 2 = 0$ $\quad \underline{a - b = t}$

$t^2 + t - 2 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{3-x} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} - 2 & (2) \end{array}\right.$

1 $x + 2 = 3 - x + 2\sqrt{3-x} + 1$

$2\sqrt{3-x} = 2x - 2 \ | :2$

$\sqrt{3-x} = x - 1$

$3 - x = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - x - 2 = 0.$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array}}$ удовлетворяют ОДЗ.

2 $x + 2 = 3 - x - 4\sqrt{3-x} + 4$

$4\sqrt{3-x} = -2x + 5$

$16(3-x) = 4x^2 - 20x + 25.$

$4x^2 - 4x - 23 = 0.$

$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-23) = 16 + 16 \cdot 23 = 16 \cdot 24.$

$\sqrt{D} = \pm\sqrt{16 \cdot 4 \cdot 6} = \pm 8\sqrt{6}.$

$\boxed{x_1 = \frac{4 - 8\sqrt{6}}{8} = \frac{1}{2} - \sqrt{6}} > \frac{1}{2} - \sqrt{6{,}25} = 0{,}5 - 2{,}5 = -2.$

$\boxed{x_2 = \frac{4 + 8\sqrt{6}}{8} = \frac{1}{2} + \sqrt{6}} < \frac{1}{2} + \sqrt{6{,}25} = \frac{1}{2} + 2{,}5 = 3.$

удовлетворяют ОДЗ.

$\boxed{\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{6}; \ x_2 = -1; \ x_3 = 2; \ x_4 = \frac{1}{2} + \sqrt{6}.}$

Чистовик

Задача 2 (продолжение)

Проверка:

1) $x = 2$

$\sqrt{4} - \sqrt{1} + 3 = 2\sqrt{6+2-4}$

$2 - 1 + 3 = 2 \cdot \sqrt{4}$

$4 = 2 \cdot 2 = 4$

2) $x = -1$

$\sqrt{1} + \sqrt{4} + 3 = 2\sqrt{6-1-1}$

$4 = 2\sqrt{4} = 4$

3) $x = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$

$\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{6}} + 3 = 2\sqrt{\cancel{6} + \frac{1}{2} - \cancel{\sqrt{6}} - \frac{1}{4} + \cancel{\sqrt{6}} - \cancel{6}}$

$1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 3 + \sqrt{2,5 - \sqrt{6}} - \sqrt{2,5 + \sqrt{6}}$

$\sqrt{2,5 + \sqrt{6}} - \sqrt{2,5 - \sqrt{6}} = 2$

$2,5 + \cancel{\sqrt{6}} - 2\left(\sqrt{2,5+\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{2,5-\sqrt{6}}\right) + 2,5 - \cancel{\sqrt{6}} = 4.$

$5 - 2\sqrt{6,25 - 6} = 4.$

$5 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 - 1 = 4$

4) аналогично 3.

① $a = b + 1$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 1$

$x + 2 = 3 - x + 2\sqrt{3-x} + 1$

$2\sqrt{3-x} = 2x - 2 \,/ :2$

$\sqrt{3-x} = x - 1$

$3 - x = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - x - 2 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$

② $a = b - 2.$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 2.$

$x + 2 = 3 - x - 4\sqrt{3-x} + 4$

$4\sqrt{3-x} = -2x + 5.$ $\quad (5-2x)^2$

$48 - 16x$

$16(3-x) = 25 - 20x + 4x^2.$

$4x^2 - \cancel{20x} + 16x + 25 - 48 = 0.$

$4x^2 - 4x - 23 = 0.$

$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-23) =$

$= 16(1 + 23) = 16 \cdot 24.$

$\sqrt{D} = 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = 8\sqrt{6}.$

$\boxed{x_1 = \frac{4 - 8\sqrt{6}}{8}} = \frac{1}{2} - \sqrt{6} \cancel{Z} -2 \,|\, (-1)$

$\sqrt{6} - \frac{1}{2} < 2.$

$\sqrt{6} < \frac{5}{2}$

$\sqrt{6} < \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 = \frac{5}{2}$

$\boxed{x_2 = \frac{4 + 8\sqrt{6}}{8}} =$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{6} <$

$< \frac{1}{2} + \sqrt{6{,}25} = 3.$ $\quad (\sqrt{6{,}25} = 2{,}5)$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

ОДЗ:
$x \geq -2$.
$x \leq 3$.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$ $(3-x)(x+2)$.

$-x^2 + x + 6 \geq 0$.

$x^2 - x - 6 \leq 0$.

$(x-3)(x+2)$ $x = 3$, $x = -2$.

$x \in [-2; 3]$.

$a = \sqrt{x+2}$, $a \geq 0$

$b = \sqrt{3-x}$, $b \geq 0$. $a^2 + b^2 = x + 2 + 3 - x = 5$

$a^2 + b^2 = 5$

$a - b + 3 = 2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$

$a - 2ab - b + 3 = 0$. $a(a+1) + b(b-1) + 3 > a - b + 3 = 2ab$

$-(b-3)$

$a(1-2b)$ $a^2 + a + b^2 - b + 3 = (a+b)^2$

$a^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} +$

$-b(2a+1) + 3(2a+1) - 5a$. $(a + \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2 + 2{,}5 = (a+b)^2$

$a - 3ab + ab - b + 3$. $(a+b)^2$

$a(1-3b) + b(a-1$ $= a^2 + a + b^2 - b + 3$

$= a(a+1) + b(b-1) + 3 >$

$(a+b)^2 - a^2 - b^2 + a - b + 3$

$\geq a - b + 3 = 2ab$

a^2

$a - b + 8 = (a+b)^2$

$5 + 2ab = (a+b)^2$

$a \geq b - 8$. $t = a - b$

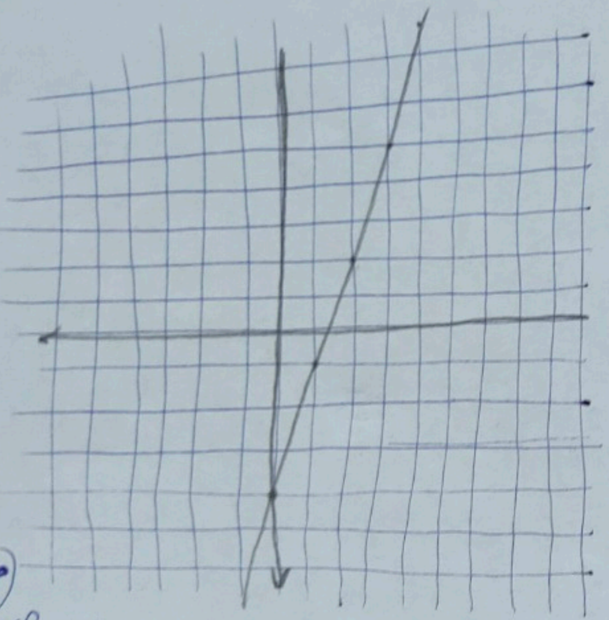
$(a-b)^2$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(a-b) + (3+2) - 2ab = 0$

-2

$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$. $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.



$5a^2 + 12ax + 40ay + 8x^2 + 6xy + 4y^2 = 0$. — точка A

$9a^2$ $4x^2 + (2x+2y)^2$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$ — парабола   верш. B.

$(3a+2x)^2 - 4a^2 + 4ay + 4y^2$

найти a при котор. A и B лежат по разн. ст.

$(3a+2x)^2 + 4a(y - b) + (2x+2y)^2 = 0$.

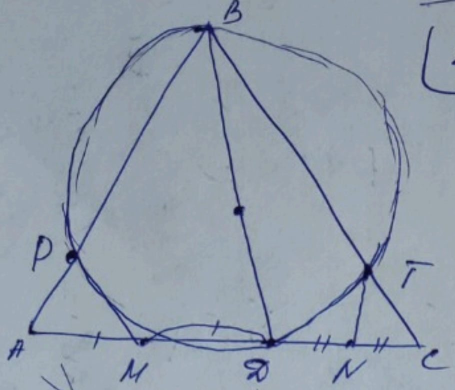
от $y = 3x + 4$.

$5a^2 + 12ax + 40ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$.

$(2a+3x)^2 + (a+2y)^2 - x^2 + 8xy = 0$.

$(2x+2y)^2 - 5x^2 - 4y$

1



$PM \parallel TN$

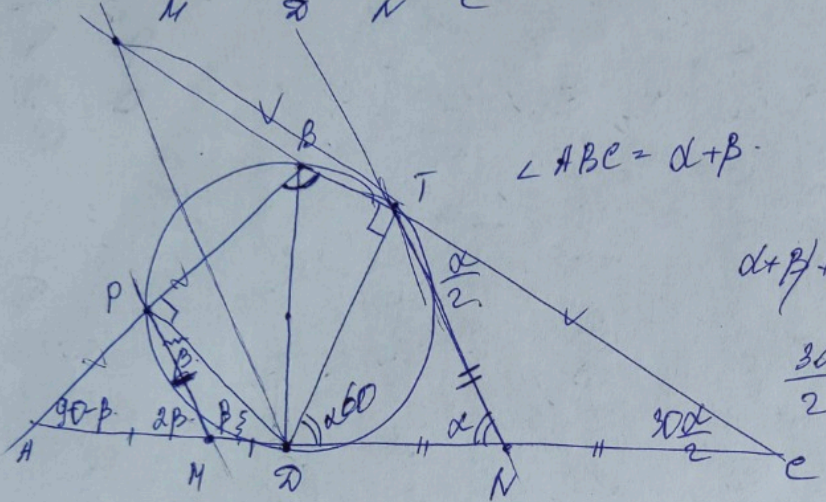
$\angle ABC - ?$

$PM = \frac{1}{2}$

$NT = 2$

$BD = \sqrt{3}$.

$S_{ABC} - ?$

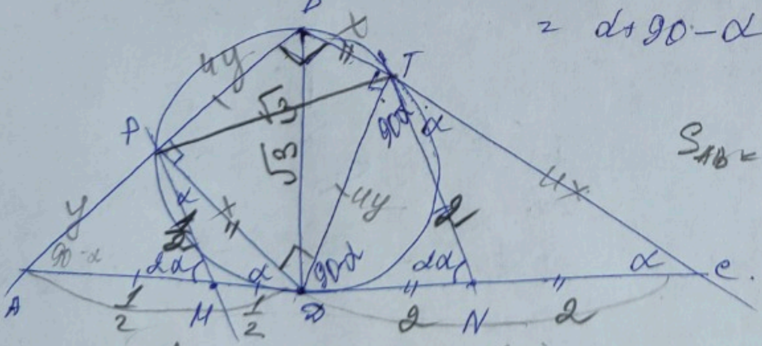


$\angle ABC = \alpha + \beta$.

$\alpha + \cancel{\beta} + \cancel{90} - \cancel{\beta} + \frac{\alpha}{2} = 1\cancel{8}\cancel{0}$. 90.

$\frac{3\alpha}{2} = 90$

$\boxed{\alpha = 60.}$



$\angle ABC = \angle ADP + \angle TDN =$

$= \alpha + 90 - \alpha = \boxed{90}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$

$\begin{cases} (5x)^2 + (5y)^2 = 25. \\ (4y)^2 + x^2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 + 25y^2 = 25. \\ 16y^2 + x^2 = 3. \end{cases} \to \quad x^2 + y^2 = 1$

$x^2 = 1 - y^2$.

$16y^2 + 1 - y^2 = 3$.

$15y^2 = 2$

$y^2 = \frac{2}{15} \Rightarrow x^2 = \frac{13}{15}$.

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{\frac{13}{15}} \cdot 5\sqrt{\frac{2}{15}} =$

$= \frac{\cancel{25}^{5}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{15}_{3}} \sqrt{26} = \boxed{\frac{5\sqrt{26}}{6}.}$

211006338 (U848007 M1276162)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006338**

ID профиля: **848007**

Вариант 11

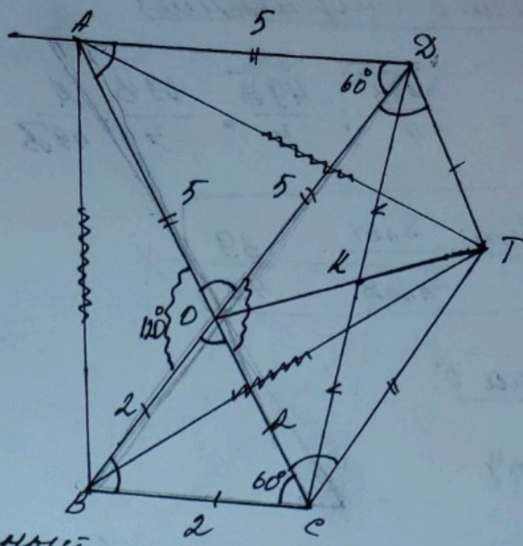
Чистовик

Задача 6.

Дано: $ABCD$: $AC \cap BD = O$.
$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные.
$DK = CK$.
T – точка, симметричная O относительно K.

$BC = 2$
$AD = 5$

Найти: $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$; Д-ть: $\triangle ABT$ – правильный.



Решение: 1) т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные $\Rightarrow AD = AO = OD$
$BO = OC = BC$
$\angle OAD = \angle ADO = \angle DOA =$
$= \angle BOC = \angle OBC = \angle OCB = 60°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOB = \angle DOC = 120°$ (т.к. смежные)

2) т.к. T симметрична $O \Rightarrow OK = TK$
$DK = CK$
$\Rightarrow$ $DTCO$ – параллелограмм $+ \angle DOC = 120°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow DT = OC$; $OD = TC$; $\angle ODT = \angle TCO = 60°$

3) $AD = CT = OA$
$DT = BC = OB$
$\angle ADT = \angle TCB = \angle AOB = 120°$
$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle TCB = \triangle AOB$ (I).
$\Rightarrow AT = BT = AB \Rightarrow$ $\boxed{\triangle ABT \text{ – правильный, ч.т.д.}}$

4) $OA = AD = 5$
$OB = BC = 2$
$\angle AOB = 120°$
$\Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos O$ – по теореме косинусов.
$AB^2 = 25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 29 + 20 \cdot \cos 60° = 29 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 39$.

$\Rightarrow S_{ABT} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}$.

5) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{AOB} + S_{COD}$ $\Rightarrow$

$OA = OD = 5$
$OB = OC = 2$
$\angle AOB = \angle COD = 120°$
$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$ (I).

$S_{AOB} = S_{COD} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin O = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \sin 120° = 5 \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. $\Rightarrow$

$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – прав.

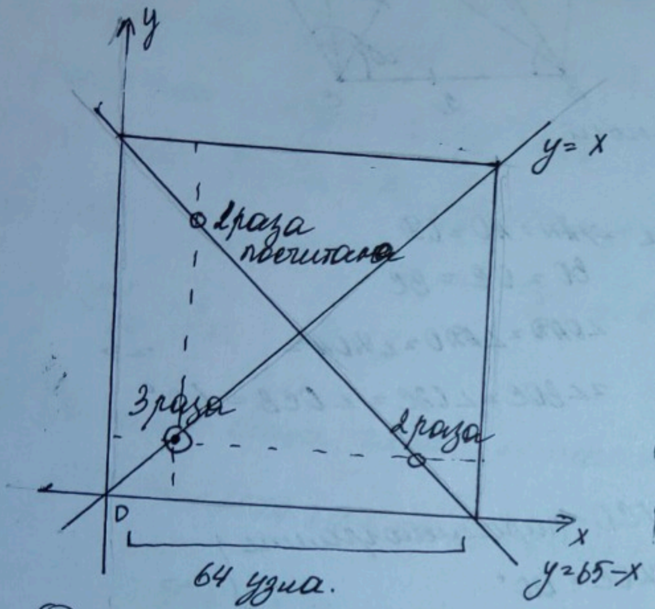
$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} + \dfrac{4\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{29\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{4} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$

Задача 6 (продолжение)

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39\sqrt{3}}{4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{49\sqrt{3}} = \frac{39}{49}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}}$

Задача 5.



(1) Длина стороны квадрата 65. => длина половины его диагонали $\frac{65}{\sqrt{2}} = \frac{65\sqrt{2}}{2}$.

Диагональ квадрата состоит из диагоналей маленьких квадратов 1×1 => половину диагонали квадрата составляют $\frac{65\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{65}{2}$ квадрата.

Это значит, что точка пересечения диагоналей не лежит в узле клетки => нет узла, лежащего одновременно в 2х функциях ($y=x$ и $y=65-x$ — это диагонали).

(2) Посчитаем способы, когда один узел лежит на диагонали, а второй — нет.

Т.к. длина стороны квадрата 65 => использовать можно 64 узла по горизонтали. Аналогично 64 узла по вертикали. Значит, всего узлов $64 \cdot 64 = 2^{12} = 4096$. Выбираем 1 точку на ф-ции, а вторую — ни на какой из ф-ций и не на пунктирных линиях, т.к. точки не могут лежать на прямой $\parallel OX$ или $\parallel OY$.

$$\Rightarrow C_{64}^{1} \cdot C^{1}_{(4096-128-128+4)} = 64 \cdot 3844.$$

точки на функциях; точки на параллельных прямых; т.к. вычла точки несколько ра

Аналогичное количество вариантов, когда точка лежит на другой диагонали: $64 \cdot 3844$

Задача 5 (продолжение)

Чистовик

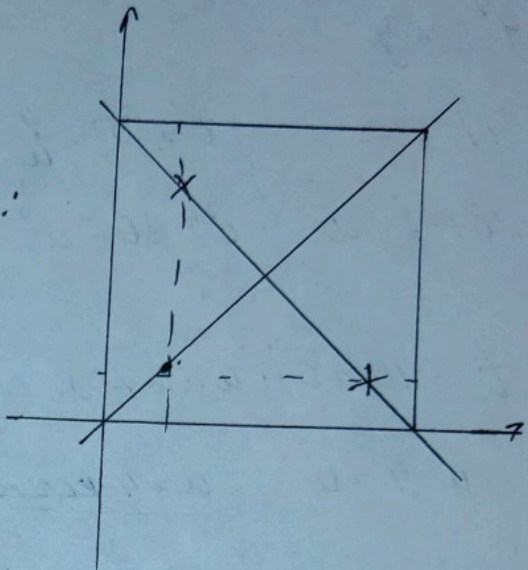
③ Посчитаем кол-во способов, когда обе точки лежат на ф-циях

1) лежат на одной ф-ции:

$C_{64}^{1} \cdot C_{63}^{1} = 64 \cdot 63$

Аналогично для второй ф-ции:

$64 \cdot 63$.



2) лежат на разных ф-циях:

Выбираем любую точку на ф-ции, тогда на второй не будут подходить 2 точки (т.к. точки не могут лежать на прямых, ∥ OX или ∥OY).

$\Rightarrow C_{64}^{1} \cdot C_{62}^{1} = 64 \cdot 62$

④ Считаем общее число способов:

$3844 \cdot 64 + 3844 \cdot 64 + 64 \cdot 63 + 64 \cdot 63 + 64 \cdot 62 =$

$= 64(2 \cdot 3844 + 2 \cdot 63 + 62) = 64 \cdot 7876 = 504\,064$

$\boxed{\text{Ответ: } 504\,064}$

211006338 (U848007 M1276163)

Задача 4. Чистовик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$a = x^2+y^2$, $a > 0$.
$b = x^2y^2$, $b \geq 0$ (т.к. $x^2+y^2 \neq 0$). $\Rightarrow x^4+y^4 = \underline{a^2-2b}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a}+b=5 \\ a^2-2b+3b=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5-\frac{4}{a} \\ b = 20-a^2 \end{cases} \Rightarrow \underline{5-\frac{4}{a} = 20-a^2}.$$

$a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0 \,|\cdot a. \ (a \neq 0).$

$a^3 - 15a - 4 = 0$ $\quad$ $\underline{a = 4 \text{ - корень}}$

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \underline{a^3-4a^2} & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a & \\ \underline{4a^2-16a} & \\ a-4 & \\ \underline{a-4} & \\ 0. & \end{array}$$

$(a-4)(a^2+4a+1) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} a^2+4a+1 = 0. \ (1). \\ a = 4 \end{array}\right.$$

(1) $D = 16-4\cdot1\cdot1 = 12$
$\sqrt{D} = \pm 2\sqrt{3}$.

$a_1 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} < 0.$ - не уд.

$a_2 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} < 0$ - не уд. (т.к. $2 > \sqrt{3}$).

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ \frac{4}{a}+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = 8 \\ x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 = 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = 0. \\ x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 = 8 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

(I) $\begin{cases} (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 8 \\ (x-y)^2 = 0. \end{cases}$

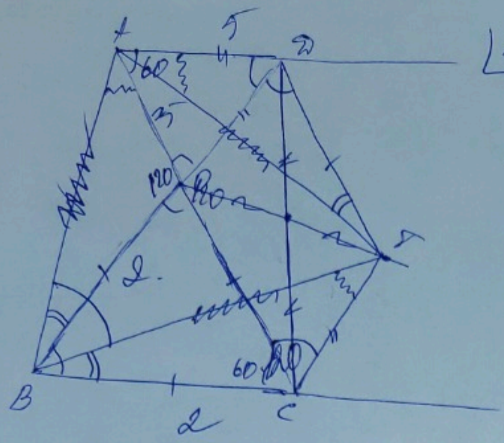
$\Rightarrow \begin{cases} x=y. \\ (2x)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2=8 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$\boxed{(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})}$

(II) $\begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ (x-y)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ 4x^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \mp\sqrt{2} \end{cases}$

$\boxed{(\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}; \sqrt{2})}$

Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.



$\triangle ABT$ – прав. – ?

$BC = 2$

$AD = 5$

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} - ?$

$S_{ABT} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{AD^2\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot \sin 120 = \dfrac{BC^2\sqrt{3} + AD^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{AO\cdot OB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}+25\sqrt{3}}{4} + \dfrac{5\cdot 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{29\sqrt{3}+20\sqrt{3}}{4} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$

$\sin 120 = \sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$AB^2 = 25 + 4 - 2\cdot 5\cdot 2\cos 120 = 29 + 20\cdot\cos 60 = 39$

$\cos 120 = -\cos 60$, $\cos 60 = \dfrac{1}{2}$

$AB = \sqrt{39}$

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{4}{49\sqrt{3}} = \dfrac{39}{49}$

$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$

$x^2+y^2 = a$

$x^2y^2 = b$

$x^4+y^4 = a^2-2b$

$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2-2b+3b = 20 \end{cases} \Rightarrow$

$b = 5 - \dfrac{4}{a}$

$b = 20 - a^2$

$5 - \dfrac{4}{a} = 20 - a^2$

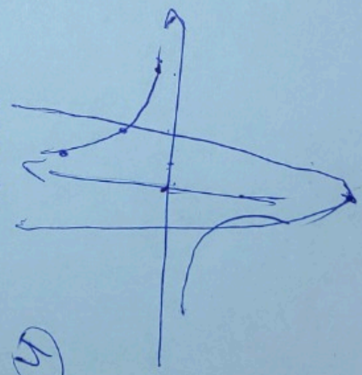
$a^2 - \dfrac{4}{a} - 15 = 0$

$a^3 - 15a - 4 = 0$

16

4

4



$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ a^3-4a^2 & a^2+4a \\ \hline 4a^2-15a & \\ 4a^2-16a & \\ \hline a-4 & \end{array}$

50464

47256

31504

64

7876

62

4184

126

7688

2

1384

106

63

$a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0.$ $a = 4$ корень.

$a^3 - 15a - 4 = 0$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 15a - 4 & a - 4 \\ \underline{a^3 - 4a^2} & a^2 + 4a + 1 \\ 4a^2 - 15a & \\ \underline{4a^2 - 16a} & \\ a - 4 & \\ \underline{a - 4} & \\ 0. & \end{array}$$

$a^2 + 4a + 1$

$D = 16 - 4 \cdot 1 = 12.$

$\sqrt{D} = \pm 2\sqrt{3}.$

$a_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} =$

$-2 - \sqrt{3}$

$a_2 = -2 + \sqrt{3}.$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \mid \cdot 4. \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20.$

$x^4+y^4-x^2y^2 - \frac{16}{x^2+y^2} = 0.$

$(x^2-y^2)-x^2y^2$

$5 - \frac{4}{x^2+y^2} = x^2y^2 = 20 - (x^2+y^2)^2$

$(x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15 \mid \cdot a.$

$a^2 + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a}} = 4\sqrt{a}.$

$-27 + 108$

$a^3 - 15a - 4 = 0.$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \mid \\ a^2 + b = 20. \end{cases}$$

$a^2 + b - 20 - \frac{4}{a} - b + 5 = 0.$

$a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0.$

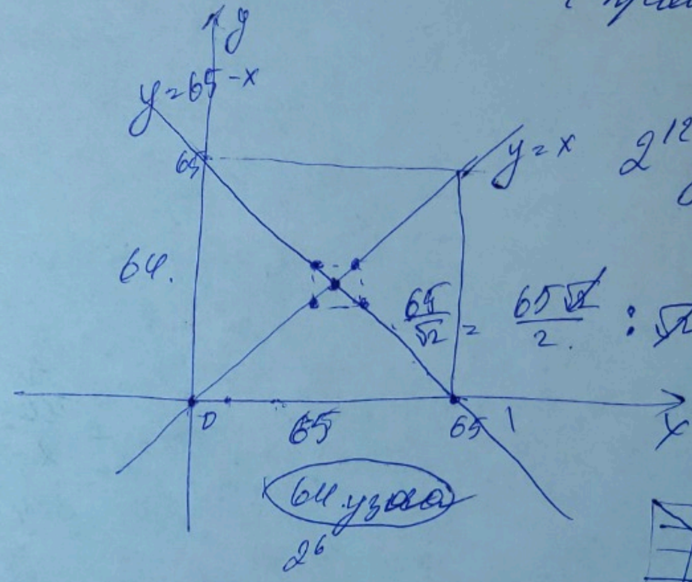
квадрат 0;0 0;65 65;65 65;0

2 узла

$y = x$ хотя бы (1)

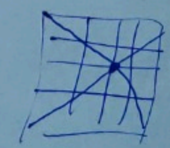
$y = 65 - x$

Оба не леж. на 1 прям ∥Ox ∥Oy



2^{12} узлов.

$\frac{65}{\sqrt{2}} = \frac{65\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{65}{2}$ квадрат



64 узла лежит на $y=x$

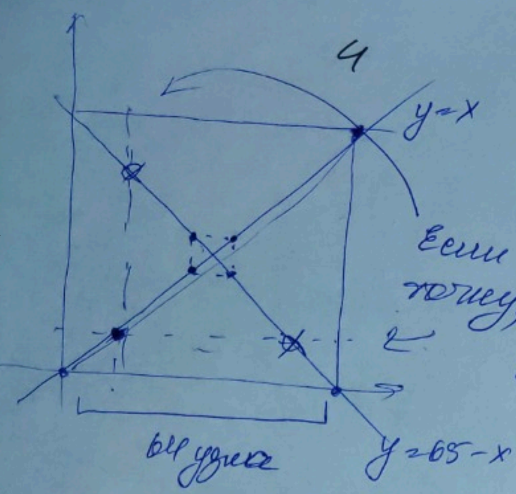
64 узла лежит на $y = 65 - x$

леж на 1 всего узлов 2^{12}

леж на 2.

(1) $C^1_{64} \cdot C^1_{(2^{12}-128)} + C^1_{64} \cdot C^1_{2^{12}}$

4



$1024 \cdot 4 =$
4096

Если выбрана какую-то точку, то не могу брать узлы на этих прямых

$\left[C^1_{64} \cdot C^1_{2^{12}} - 128 - 128 + 2 \right]$] когда лежит на $y=x$

(узлы; $-256+2$; узлы на прямых)

т.к. точки вычли дважды.

$$4096 - 252 = 3844$$

когда лежит на $y=65-x$ то аналог. подсчет.

$\left[C^1_{64} \cdot C^1_{2^{12}-254} \right]$

-252
$-256+4$

когда оба лежат на ф-циях.

1) на одной $\Rightarrow$ $\underbrace{C^1_{64} \cdot C^1_{63}}_{y=x} + \underbrace{C^1_{64} \cdot C^1_{63}}_{y=65-x}$

2) на разных. $\left[C^1_{64} \cdot C^1_{62} \right]$ т.к. не лежит на прямой

① $a = b+1$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 1$

$x+2 = 3-x+2\sqrt{3-x}+1$

$2\sqrt{3-x} = 2x-2 \,/ :2$

$\sqrt{3-x} = x-1$

$3-x = x^2-2x+1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$

② $a = b-2$.

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 2$.

$x+2 = 3-x-4\sqrt{3-x}+4$

$4\sqrt{3-x} = -2x+5$. $(5-2x)^2$

$48-16x$

$16(3-x) = 25 - 20x + 4x^2$.

$4x^2 - 20x + 16x + 25 - 48 = 0$.

$4x^2 - 4x - 23 = 0$.

$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-23) =$

$= 16(1+23) = 16 \cdot 24$.

$\sqrt{D} = 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = 8\sqrt{6}$.

$\left[x_1 = \frac{4-8\sqrt{6}}{8} = \frac{1}{2} - \sqrt{6} \right] \geq -2 \; (1)$

$\left[x_2 = \frac{4+8\sqrt{6}}{8} = \right.$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{6} <$

$< \frac{1}{2} + \sqrt{6{,}25} = 3$.

$\sqrt{6} - \frac{1}{2} < 2$.

$\sqrt{6} < \frac{5}{2}$

$\sqrt{6} < \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 = \frac{5}{2}$