Часть 1

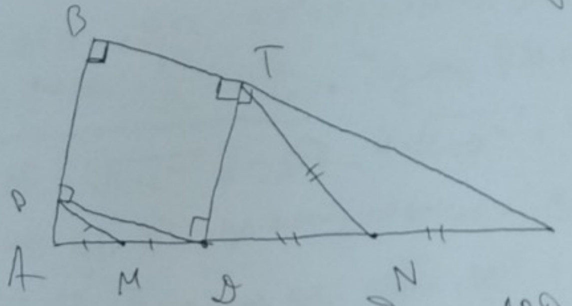
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006319**

ID профиля: **364092**

Вариант 11

Чистовик. Задача 1.



BD – диаметр окр-ти, описанной около $BPDT$ =>

=> $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. (т.к. на диаметр опирается прямой угол). Тогда $\triangle APD$ – прямоугольный, PM – его медиана из вершины прямого угла => $PM = AM = MD$.

$\triangle DTC$ – прямоугольный, TN – его медиана из вершины прямого угла => $DN = TN = NC$.

Пусть $\angle$ ~~PAM~~ $AMP = 2\alpha$, т.к. $PM \parallel TN$ (по усл-ю) =>

=> $\angle DNT = 2\alpha$; Тогда, т.к. $\triangle AMP$: $AM = MP$, $\angle AMP = 2\alpha$ =>

=> $\underline{\angle PAM = 90^\circ - \alpha}$. $\angle DNT = 2\alpha$ => $\angle TNC = 180^\circ - 2\alpha$, $TN = NC$ =>

=> $\underline{\angle NCT = \alpha}$. Тогда $\underline{\angle BAC = \angle PAM = 90^\circ - \alpha}$,

$\underline{\angle BCA = \angle NCT = \alpha}$ => $\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$ =>

=> $\underline{\angle ABC = 90^\circ}$ (пункт а))

б) $MP = \frac{1}{2}$; $AM = MD$ => $\underline{AD = 1}$; $TN = 2$;

$DN = NC = TN$ => $\underline{DC = 4}$.

~~В 4-угольнике~~ В 4-угольнике $PBTD$: $\angle B = \angle P = \angle T = 90^\circ$, $\angle P + \angle B + \angle T + \angle D =$

$= 360^\circ$ => $\angle PDT = 90^\circ$ => $PBDT$ – прямоугольник =>

=> $PB \parallel DT$ => $AP \parallel DT$ => $\angle PAD = \angle TDC$, как соотв.

1

Чистовик. Задача 1.

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow \Delta APD \sim \Delta DTC$ по 2-м углам с коэф. $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{4}$. Пусть $PD = a$, по th. Пифагора

$AP = \sqrt{1-a^2} \Rightarrow DT = 4\sqrt{1-a^2}$ (из $\Delta APD \overset{\frac{1}{4}}{\sim} \Delta DTC$),

но $BPDT$ – прямоугольник $\Rightarrow BP = 4\sqrt{1-a^2}$.

По th. Пифагора для ΔBPD: $BP^2 + PD^2 = BD^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16(1-a^2) + a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{13}{15}}$.

$PD = a \Rightarrow TC = 4a$ (из $\Delta APD \overset{\frac{1}{4}}{\sim} \Delta DTC$), $BT = PD = a$, т.к.

$BPDT$ – прямоугольник $\Rightarrow BC = BT + TC = 5a = 5\sqrt{\frac{13}{15}} =$

$= \sqrt{\frac{65}{3}}$. $BA = BP + PA = 4\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-a^2} =$

$= 5\sqrt{1-a^2} = 5\sqrt{1-\frac{13}{15}} = 5\sqrt{\frac{2}{15}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

ΔABC прямоугольный $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} =$

$= \frac{\sqrt{\frac{65}{3}} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{26}$.

Ответ: а) 90°

б) $\frac{5}{6}\sqrt{26}$

Чистовик. Задача 2.

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$; $a=\sqrt{x+2}$, $b=\sqrt{3-x}$; $a,b\geq 0$

$ab=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x}=\sqrt{(x+2)(3-x)}=\sqrt{6+x-x^2}$; Тогда:

$a-b+3=2ab\,(1)$. С другой стороны: $a^2+b^2=x+2+3-x=$
$=5$, т.е. $a^2+b^2=5\,(2)$. Имеем систему:

$(*)\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ a-b+3=2ab, \end{cases}$ ~~Причём~~ Причём $a,b\geq 0$. Т.о.:

$\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ 2ab=a-b+3; \end{cases}$ $\ominus \Rightarrow a^2+b^2-2ab=2-(a-b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2=2-(a-b) \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-b)-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1, \\ a-b=-2; \end{array}\right.$ 1) ~~Случай~~ Пусть $a-b=1$, тогда:

$\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ 2ab=4, \\ a,b\geq 0; \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2=9,\ \underset{(a,b\geq 0)}{a+b\geq 0} \Leftrightarrow a+b=3$, но

$a-b=1 \Rightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=1; \end{cases}$

2) Пусть $a-b=-2 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5, \\ 2ab=1, \\ a,b\geq 0; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b)^2=6,\ \underset{(a,b\geq 0)}{a+b\geq 0} \Leftrightarrow a+b=\sqrt{6}$, но $a-b=-2 \Rightarrow$

③

211006319 (U364092 M1276992)

Чистовик, задача 2

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}, \\ b = \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}; \end{cases} \right. \quad (\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow a > 0)$$

Итак, решением системы (*) с учётом, что $a, b \geq 0$ является совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2, \\ b = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}, \\ b = \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}; \end{cases} \end{array} \right.$$

Возвращаемся к замене:

1) $\begin{cases} \sqrt{x+2} = 2, \\ \sqrt{3-x} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = 2}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+2} = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}, \\ \sqrt{3-x} = \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\cancel{x = \dfrac{1-2\sqrt{6}}{2}}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \dfrac{10-4\sqrt{6}}{2}, \\ 3-x = \dfrac{10+4\sqrt{6}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = \dfrac{1-2\sqrt{6}}{2}};$

Ответ: $x \in \left\{ \dfrac{1-2\sqrt{6}}{2}; 2 \right\}$.

Чистовик. Задача 3.

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y)^2+2\cdot 2y\cdot(2x+a)+8x^2+12ax+5a^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y)^2+2\cdot 2y(2x+a)+(2x+a)^2=(2x+a)^2-8x^2-12ax-5a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y+2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2-8x^2-12ax-5a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y+2x+a)^2+4(x^2+2ax+a^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y+2x+a)^2+4(x+a)^2=0$; Но $4(x+a)^2\geq 0$ и

$(2y+2x+a)^2\geq 0 \Rightarrow$ ~~рав-во когда и только~~ то

а $(2y+2x+a)^2+4(x+a)^2\geq 0$, рав-во $\Leftrightarrow (x+a)^2=0$ и $(2y+2x+a)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-a$ и $2x+2y+a=0 \Leftrightarrow x=-a$ и $y=\frac{a}{2}$.

Таким образом, координаты точки A: $\left(-a;\frac{a}{2}\right)$ (1).

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0 \Leftrightarrow ay=ax^2-2a^2x+a^3+4$.

Если $a=0$: $0=4$ — ~~нет~~ $\varnothing \Rightarrow a\neq 0$. Если $a\neq 0$:

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=(x-a)^2+\frac{4}{a} \Rightarrow$ вершина

B имеет координаты $\left(a;\frac{4}{a}\right)$ (2).

Тогда мы хотим, чтобы точки $\left(-a;\frac{a}{2}\right)$ и $\left(a;\frac{4}{a}\right)$ лежали по разные стороны от прямой

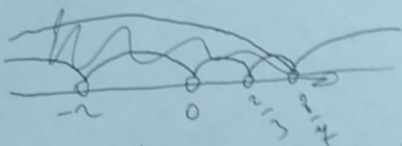
Чистовик. Задача 3.

Пусть точка X $(x_0;y_0)$ лежит выше прямой $y=3x+4$, тогда $y_0>3x_0+4$, если X лежит ниже, чем $y=3x+4$, то $y_0<3x_0+4$. Тогда, т.к. мы хотим, чтобы точки A и B находились по разные стороны от прямой $y=3x+4$ ($y-3x=4$), то есть 2 случая:

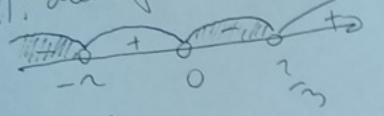
1) $\begin{cases} A \text{ ниже } y=3x+4, \\ B \text{ выше } y=3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} < 3(-a)+4, \\ \frac{4}{a} > 3(a)+4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{8}{7}, \\ \frac{3a^2+4a-4}{a} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{8}{7}, \\ \frac{(a+2)(3a-2)}{a} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{8}{7}, \\ \frac{(a+2)(a-\frac{2}{3})}{a} < 0 \ (2); \end{cases}$



(2): метод интервалов



$\Rightarrow$ ~~$a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})$~~ $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})$,

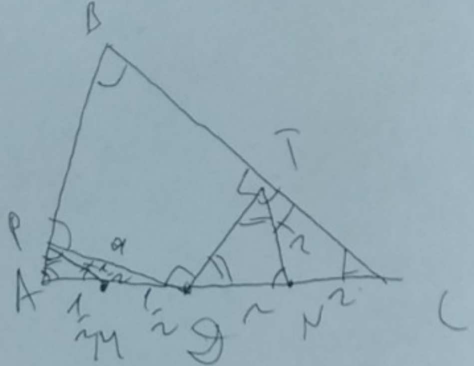
$\frac{2}{3}<\frac{8}{7} \Rightarrow$ это решение системы

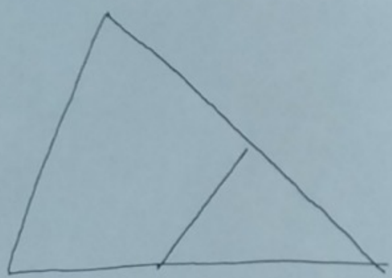
2) $\begin{cases} A \text{ выше} \\ B \text{ ниже} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} > -3a+4, \\ \frac{4}{a} < 3a+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{8}{7}, \\ \frac{(a+2)(a-\frac{2}{3})}{a} > 0 \ (*) \end{cases}$

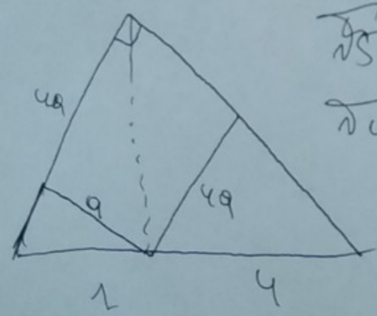
(*): метод интервалов: , но при этом $a>\frac{8}{7}>\frac{2}{3} \Rightarrow a\in(\frac{8}{7};+\infty)$. Объединяя случаи (1 и 2), получаем

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})\cup(\frac{8}{7};+\infty)$.

черновик







$\sqrt{5}$

$\sqrt{17}\,a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{17}}$

$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3-x}}_{b} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

$a \geq 0$

$b \geq 0$

$a^2+b^2 = x+2+3-x = 5$

$a-b+3 = 2\cancel{\sqrt{ab}}\; ab$

$(x+2)(3-x) =$

$= 3x - x^2 + 6 - 2x =$

$= 6 + x - x^2$

$a^2+b^2 = 5$

$a-b+3 = ab$

$ab - a + b - 3 = 0$

$a(b-1) + b - 1 = 2$

$(a+1)(b-1) = 2$

$a^2+b^2-2ab = 5-2(a-b+3)$

$(a-b)^2 = 5-$

$* \; y^2 = 5-2(y+3)$

$5-2y-6$

$-2y-1$

$a-b=-1$

$(y+1)^2 = 0 \Rightarrow y=-1$

$\sqrt{x+2} = 1$

$\sqrt{3-x} = 2$

$a^2+b^2 = 5$

$2 = ab$

$(a+b)^2 = 9$

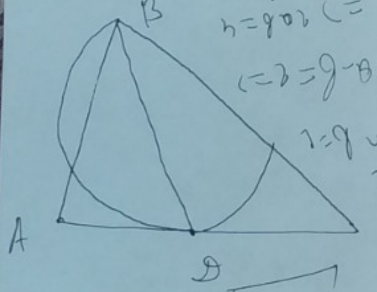
$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ a-b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1 \;\; b=2$

$x+2=1$

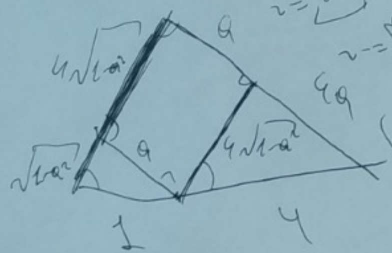
$x=-1$

~~[illegible]~~ Черновик

Задача 1



$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3$



$16 - 16a^2 + a^2 = 3$

$13 = 15a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$a^2 = \frac{13}{15}$

$1 - a^2 = \frac{2}{15}$

$5a = \sqrt{\frac{25\cdot 13}{15}} = \sqrt{\frac{5\cdot 13}{3}}$

$\frac{25\cdot 13}{15}$

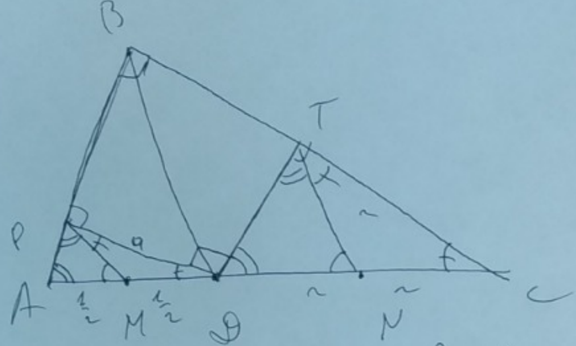
$\sqrt{\frac{5\cdot 13\cdot 10}{3^2}}$

$\frac{5}{6}\sqrt{26}$

$\sqrt{\frac{2\cdot 13\cdot 5^2}{3^2}}$

$\frac{\frac{5}{3}\sqrt{26}}{2}$

Черновик



$\sqrt{1-a^2}$

$4\sqrt{1-a^2}$

$(4\sqrt{1-a^2})^2+a^2=3$

$16-16a^2+a^2=3$ $\quad a^2=\frac{13}{15}$

$13=15a^2 \Rightarrow$

$3-x=\frac{10+4\sqrt{6}}{4}=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$

$-2+3=1$

$\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

$x+2=\frac{8\ 10-4\sqrt{6}}{4}$

$x=\frac{2-4\sqrt{6}}{4}=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

$3-x$

Черновик

5)

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}$

$(2y)^2+2y(4x+2a)+8x^2+12ax+5a^2=0$

$(a;\frac{4}{a})$

$D/4=(2x+a)^2-(8x^2+12ax+5a^2)$

$2a$

$4x^2+4ax+a^2-8x^2-12ax+5a^2$

a

$-4x^2-8ax-4a^2$

$=-4(x^2+2ax+a^2)\geq 0$

$x+a=0$

$x=-a$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$(2y)^2+2y(-2a)+8a^2+5a^2-12a^2$

$4y=ax^2-2a^2x+a^3+4$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}$

$4y^2-4ay+a^2=0$

$2y-a=0$

$x=-a$

$2y-a$

$y=\frac{a}{2}$

$x=-a$

$y=3x-4$

$6(x+a)^2$

$y=\frac{a}{2}$

$a>3\cdot\frac{4}{a}-4$

$(2y)^2+2y(4x+2a)$

$=(2x+a)^2-(8x^2+12ax+5a^2)$

$(2y)^2+2\cdot 2y\cdot(2x+a)+(2x+a)^2$

$\frac{4}{a}>3a-4$

$(2y+2x+a)^2+4(x+a)^2=0$

$\frac{a}{2}>-3a-4$

$(-a;\frac{a}{2})$

$y = 3x+4$ и на прямой не лежали, рассмотрим 2 случая:

1) A лежит выше прямой $y = 3x+4$, т.е. $\frac{a}{2} > 3(-a)+4$ (т.к. $A=(-a; \frac{a}{2})$), а B лежит ниже прямой $y=3x+4$, т.е. $a < 3\left(\frac{4}{a}\right)+4$ (т.к. $B=(a; \frac{4}{a})$).

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > -3a+4, \\ a < \frac{12}{a}+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a > 4, \\ a < \frac{12}{a}+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < \frac{12}{a}+4 \ (2); \end{cases}$$

(2): $a < \frac{12}{a}+4$, т.к. $a>1$, оно равносильно:

$a^2 < 4a+12 \Leftrightarrow a^2-4a+4 < 16 \Leftrightarrow (a-2)^2 < 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 < a-2 < 4 \Leftrightarrow -2 < a < 6$, но $a > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решение системы: $a \in (1; 6)$

2) A лежит ниже прямой $y=3x+4$, т.е. $\frac{a}{2} < 3(-a)+4$, а B лежит выше, т.е. $a > 3\left(\frac{4}{a}\right)+4$;

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

$a < -6a+8$

$7a < 8$ $\quad a < \frac{8}{7}$

$\frac{2}{3} \vee \frac{8}{7}$

$14 < 24$

$\frac{a}{2} = -3a+4$

$a = -6a+8$

$a = \frac{8}{7}$

$\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$ $\frac{5-2\sqrt{6}}{2} = \frac{10-4\sqrt{6}}{4} = \frac{6-2\cdot\sqrt{6}\cdot 2+4}{4} =$

$= 10\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2$ $\sqrt{6}-2$ 5

$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006319**

ID профиля: **364092**

Вариант 11

Чистовик.

4. Замена: $\begin{cases} x^2+y^2 = a > 0, \\ x^2y^2 = b \geq 0; \end{cases}$ Тогда:

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5, \\ a^2 + b = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - \frac{4}{a}, \\ a^2 + 5 - \frac{4}{a} = 20; (2) \end{cases}$$

(2): $a^2 - 15 - \frac{4}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^3 - 15a - 4}{a} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(a-4)(a^2+4a+1)}{a} = 0$; Если $a > 0$, то $a^2+4a+1 > 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 4$. Возвращаясь к замене:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2y^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-y^2, \\ y^2(4-y^2)=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-y^2, \\ 4y^2-y^4=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-y^2, \\ y^4-4y^2+4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-y^2, \\ (y^2-2)^2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2, \\ x^2=2 \end{cases}$$

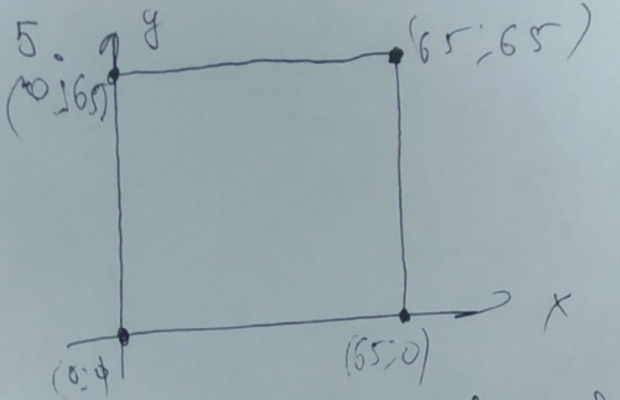
$y^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2}, \\ y=-\sqrt{2}; \end{array}\right.$ $x^2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}; \end{array}\right.$ Итого, имеем следующие решения:

Ответ: $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

1

Чистовик.

5.



Заметим, что прямые $y=x$ и $y=65-x$ – прямые, содержащие диагонали данного квадрата. Поэтому далее будем говорить в терминах диагоналей.

1) Посчитаем кол-во удовлетворяющих условию пар узлов таких, что оба лежат на одной диагонали. На каждой диагонали 64 узла, значит 2 узла на каждой диагонали можно выбрать $\frac{64\cdot 63}{2}$ способами, диагоналей 2, поэтому считаемых пар $\underline{64\cdot 63}$. (Здесь и далее пользуемся тем, что общих узлов у диагоналей нет, т.к. нет целочисленного решения у ур-я $x=65-x$).

2) Посчитаем кол-во удовлетворяющих условию пар таких, что один узел лежит на диагонали, а второй ~~лежат~~ не лежит ни на одной диагонали. Пусть мы выбрали узел на диагонали одним из $\underline{2\cdot 64}$ способов. Тогда нам ~~нужно~~ в качестве второго узла запрещены:

• узлы, помимо него, на этой диагонали, таких 63

• узлы, помимо него, лежащие на одной вертикали с ним, таких 63

• узлы, помимо него, лежащие на одной горизонтали с ним, таких 63.

• узлы, помимо всех предыдущих, не лежащие на дру-

читовин
гой диагонали. Заметим, что на этой диагонали из
64 узлов 2 уже встречались в предыдущих
запрещённых (1 узел, лежащий на вертикали с выбранным
и один, лежащий на горизонтали с выбранным), поэтому
уникальных случаев всего 62.
Итого запрещённых узлов: $3\cdot 63+62=251$.
При этом всего узлов, помимо выбранного: 64^2-1.
Тогда допустимых узлов: $64^2-1-251=64^2-252$.
А, значит, искомых пар: $\underline{2\cdot 64\cdot(64^2-252)}$
3) Посчитаем кол-во удовлетворяющих условию пар,
таких, что один узел лежит на одной диагонали, а
второй на другой. Пусть одним из 64 способов
выбран узел на диагонали $y=x$, для него на другой
диагонали можно выбрать любой из 64 узлов,
кроме 2-х, лежащих один на одной вертикали,
другой на одной горизонтали с выбранным. Итого
$\underline{64\cdot 62}$ способа.
4) Теперь посчитаем общее число удовлетворяющих условию пар как сумму рассмотренных 3-х случаев:
$64\cdot 63+2\cdot 64\cdot(64^2-252)+64\cdot 62=64(125+2\cdot 64^2-504)=$
$=64\cdot(2^{13}-389)=64(8192-389)=64\cdot 7803$

$$\begin{array}{r} \times\ 7803 \\ 64 \\ \hline +\ 31212 \\ 46818 \\ \hline 499392 \end{array}$$

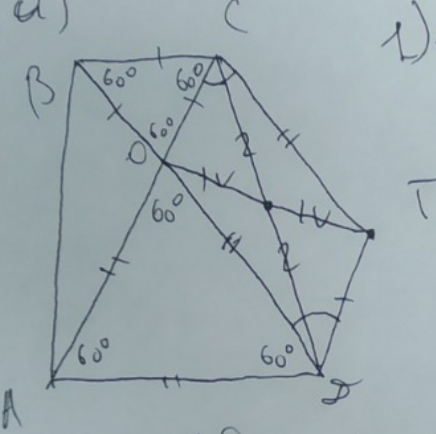
Ответ: 499392

(3)

211006319 (U364092 M1276993)

чистовик

6. а)



1) $\angle COB = 60^\circ$, т.к. BOC – р/с $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle CTD = 120^\circ$ из симметрии.

Но $\angle CBD = 60^\circ \Rightarrow \angle CBD + \angle CTD = 180^\circ \Rightarrow$ $BCTD$ – вписанный 4-хугольник. $\angle CAD = 60^\circ$, $\angle CTD = 120^\circ \Rightarrow \angle CAD + \angle CTD = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $ACTD$ – вписанный 4-хугольник $\Rightarrow$ на описанной окр-ти $\triangle CTD$ лежат точки B и $A \Rightarrow A, B, C, T, D$ – лежат на одной окр-ти $\Rightarrow \angle BTA = \angle BCA = 60^\circ$

2) В 4-хугольнике $OCTD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow OCTD$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $CT = OD = AD$, $DT = OC = BC$, $\angle OCT = \angle ODT \Rightarrow$ $\Rightarrow 60^\circ + \angle OCT = 60^\circ + \angle ODT \Leftrightarrow \angle BCT = \angle ADT \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ADT = \triangle TCB$ по 2-м сторонам и углу между ними $\Leftrightarrow AT = BT$

3) Объединяя пункты 1) и 2) получаем, что в $\triangle ABT$ $\angle BTA = 60^\circ$, $BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – р/с, ч.т.д.

б) В равностороннем $\triangle$-ке со стороной a площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, (т.к. высота по th. Пифагора $= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $S = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$). Тогда площадь $\triangle BOC = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$,

$S_{\triangle AOD} = 5^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

Чистовик.

~~Во~~ $S_{\Delta BOA} = S_{\Delta COD}$ (т.к. треугольники ~~равны~~ ΔBOA и COD равны по 2-м сторонам и углу между ними)

и равны по $\frac{BO \cdot OA \cdot \sin\angle BOA}{2}$, т.е. по $\frac{2 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ}{2}$,

тогда $\underline{\underline{S_{ABCD}}} = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} =$

$= 2 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ + \sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} =$

$= \sqrt{3}\left(6 + \frac{25}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{49\sqrt{3}}{4}}}.$

По Th. cos: $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos\angle BOA =$

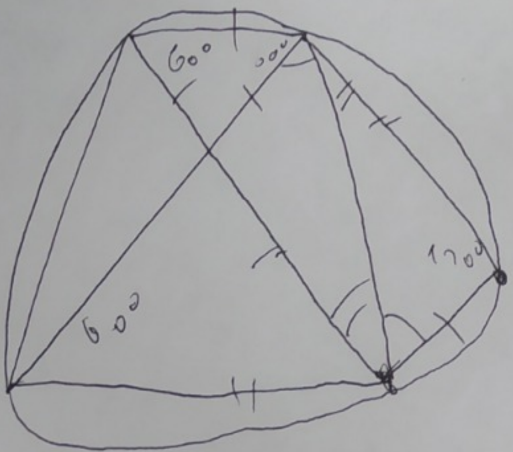
$= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 4 + 25 + 10 = 39.$

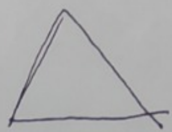
Но тогда, т.к. $\Delta AB\Gamma$ – р/с: $S_{\Delta AB\Gamma} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{39}{4}\sqrt{3}$. Тогда $\frac{S_{\Delta AB\Gamma}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{39}$

$\underline{\text{Ответ:}}$ б) $\frac{49}{39}$.

5

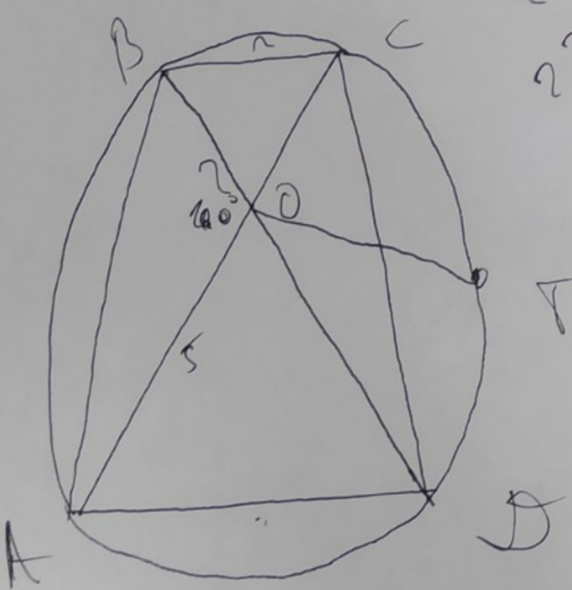




$-\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}$



$2^2+5^2-2 \cdot 5 \cdot \cos 120$

2^2+5^2+10

$4+30=34$

$\sqrt{34}$

$3^2 - 16$ 9

$4^2+5^2-2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \frac{4}{5}$

черновик

$\frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=$

$x^2=a\geq 0$

$y^2=b\geq 0$

$\frac{4}{a+b}+ab=5$

$a+b=m\geq 0$

$ab=n\geq 0$

$a^2+3ab+b^2=20$

$m\neq 0$

2^{13}

2^7

8092 − 289

7892 − 89

$\frac{4}{m}+n=5$

$\frac{4}{m}+20-m^2=5$

64 − 60

7812 − 9

8192 7810 − 17

7809

$m^2+n=20$

$n=20-m^2$

4720m

$\frac{4}{m}+15-m^2=0$

2^6

$m^3-15m+4=0$

$(m-4)(m^2+4m+1)=0$

$(m+2)^2=3$

$m+2=\pm\sqrt{3}$

$m=4$

$x^2-4x+4=0$

2^{12}

$x=2$

$-2+\sqrt{3}$

$-2\pm$

$\sqrt{3}-2<0$

$m=4$

$a+b=4$

$n=4$

$ab=4$

$a=b=2$

28000

3200

32

3222

504 − 125

8000

$2\cdot 64^2-379$

404 − 25

160

32

384 − 5

2^{19}

8192

379

42000

4800

2

48213

8092 − 284

1024 − 8

7892 − 89

17

211006319 (U364092 M1276993)

чернетка

$x^2 = a \geq 0$

чернетка

$y=x$ або $y=65-x$

$4 \cdot 51$

64^2-1

$65-x$

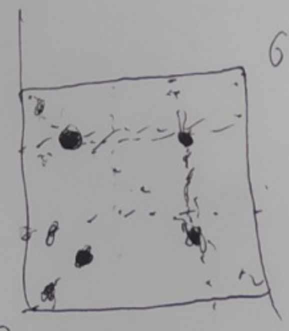
$64(63+62+2\cdot64^2-504$

$y=x$

$2\cdot64$

$y=x$ $64(64^2-339)$

$x=65-y$



$63-64$ 64 64 $2\cdot64$ $1\cdot64$

$(64^2-1)-(3\cdot63+6^2)$ $4\cdot63-1$

$125-504$

63^2 $64^2-4\cdot63$ $189+62=$

$=191+60$

$64\cdot(63^2-63)$

$504-125$

$404-25=384-5=379$

$64\cdot63$

$\frac{64\cdot63}{2}\cdot2$

64 $63+62+63+63$

$(63+1)^2$

64 $4\cdot63$

$63^2+2\cdot63+1$

$2\cdot64\cdot(64^2-4\cdot63)$

$64\cdot64$ 63^2 $64^2-3\cdot63$

63^2-63+1

$64\cdot63$

$2\cdot64\cdot63+2\cdot64(64^2-4\cdot63)$ 63^3+1

$2\cdot64(63+64^2-4\cdot63)$ $2(63^3+1)$