Часть 1

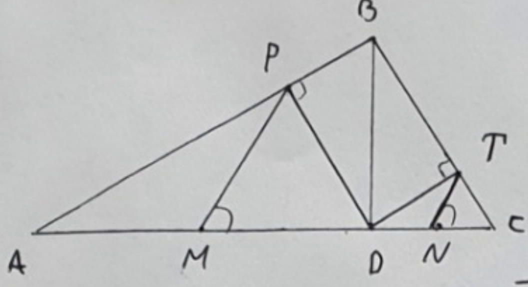
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006252**

ID профиля: **377527**

Вариант 11

№1 ЧИСТОВИК



а) $\triangle BPD$ и $\triangle BTD$ – вписные, т.к. $\angle P$ и $\angle T$ опираются на диаметр. ⇒ $\angle P = \angle T = 90° \Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$. ⇒

⇒ $\begin{cases} \triangle APD \text{ – прямоугольный} \Rightarrow MP \text{ – медиана к гипотенузе.} \\ \triangle DTC \text{ – прямоугольный} \Rightarrow NT \text{ – медиана к} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} MP = \frac{1}{2} AD \\ NT = \frac{1}{2} DC \end{cases}$$

$MP \parallel NT \Rightarrow \angle DMP = \angle CNT \Rightarrow \triangle DMP \sim \triangle CNT$ (по отношению сторон и углу) ⇒

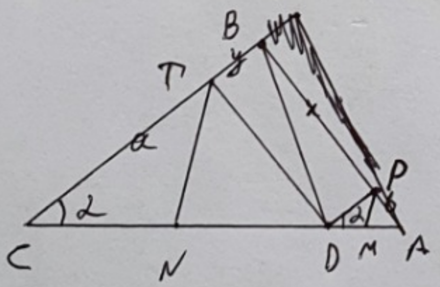
⇒ $\angle PDA = \angle TCA \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ (по 2-ём углам) ⇒

⇒ $\angle PDA + \angle TDC = \angle PDA + \angle PAD = 180 - 90 = 90° \Rightarrow PDT = 180 - 90 = 90°$

~~Четырёху~~

В $BTDP$ $\angle P$, $\angle T$ и $\angle D = 90° \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90°}$

б)



$CD = 2TN = 4$; $DA = 2PM = 1$

$\exists\, x = BP$ $\exists\, a = CT$ $\exists\, \angle BCA = \alpha$

$\exists\, y = BT$ $\exists\, b = PA$

$$\begin{rcases} \sin\alpha = \frac{x}{4};\ \cos\alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \\ \sqrt{x^2+y^2} = BD \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \end{rcases} \begin{matrix} x = \sqrt{2\frac{2}{15}} = 4\sqrt{\frac{2}{15}} \\ y = \sqrt{\frac{13}{15}} \end{matrix}$$

$$a = \sqrt{16 - 2\frac{2}{15}} = \sqrt{13\frac{13}{15}} = 4\sqrt{\frac{13}{15}}$$

$$b = \sqrt{1 - \frac{13}{15}} = \sqrt{\frac{2}{15}};$$

$$S_{ABC} = \frac{(a+y)(x+b)}{2} = \frac{\left(4\sqrt{\frac{13}{15}} + \sqrt{\frac{13}{15}}\right)\left(4\sqrt{\frac{2}{15}} + \sqrt{\frac{2}{15}}\right)}{2} =$$

$$= 12{,}5\sqrt{\frac{26}{225}}$$

211006252 (U377527 M1276422)

1 Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{ABC} = 12{,}5\sqrt{\frac{26}{225}}$

ЧИСТОВИК.

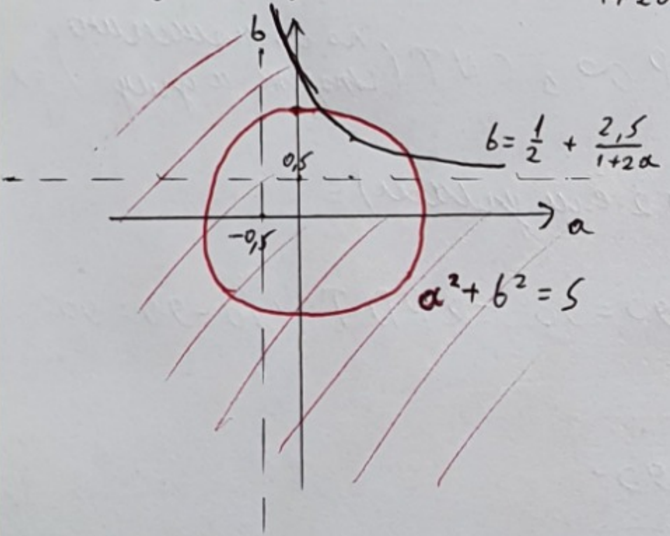
№2.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+2}&=a \geq 0\\ \sqrt{3-x}&=b \geq 0\end{aligned}\right\} \quad a-b+3=2ab$$

О.Д.З. $\left.\begin{aligned} x+2\geq 0 &\Rightarrow x\geq -2\\ 3-x\geq 0 &\Rightarrow x\leq 3\end{aligned}\right\} x\in[-2;3]$

$$a^2=x+2;\ b^2=3-x \Rightarrow a^2+b^2=5.$$

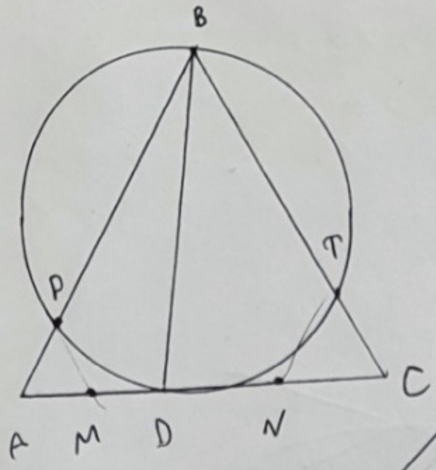
$$a-b+3=2ab \Rightarrow b=\frac{a+3}{1+2a}=\frac{1}{2}+\frac{2,5}{1+2a}$$

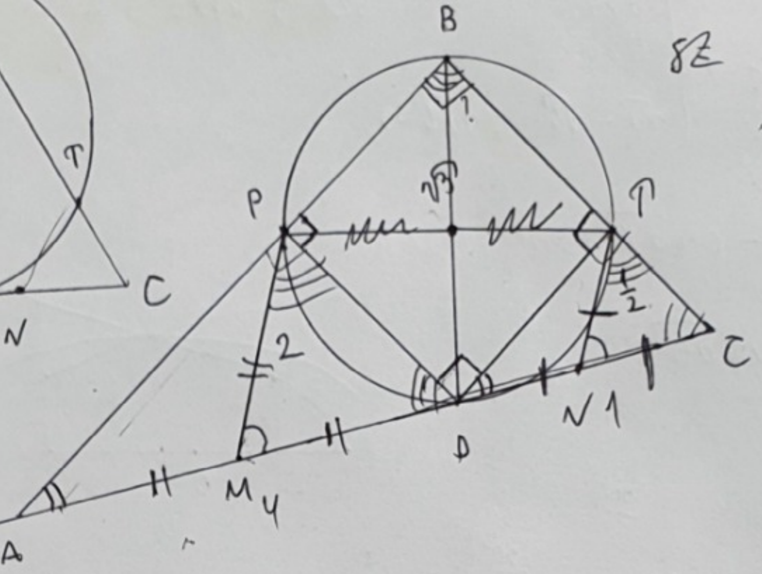


$a\geq 0;\ b\geq 0$ в этой четверти.
оба графика-выпуклые, причём
в разные стороны.

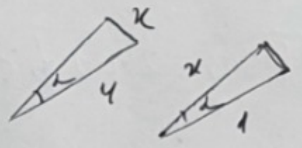
211006252 (U377527 M1276422)

ЧЕРНОВИК





8Z



$\sin\alpha = \frac{x}{4}$

$\cos\alpha = x$

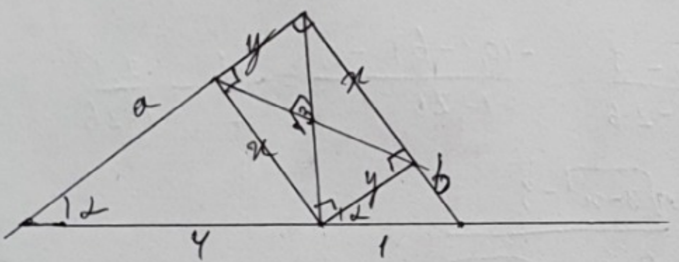
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$x^2 + \frac{x^2}{16} = 1$

$\frac{17}{16}x^2 = 1$

$x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\sqrt{2}x = \sqrt{3}; \; x = \sqrt{\frac{3}{2}}$



$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1$

$\left.\frac{1x^2}{16} + y^2 = 1 \right\} \; \frac{15}{16}x^2 = 2; \; x = \sqrt{\frac{32}{15}} \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 3$

$\Rightarrow x^2 = \frac{32}{15} \Rightarrow y^2 = \frac{13}{16} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$a = \sqrt{16 - \frac{32}{15}} = \sqrt{}$

$2{,}5\sqrt{3}$ „v" $\sqrt{19}$

$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{x}{4}\right)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}\right\} \; \frac{15}{16}x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2\frac{2}{15}}$

$2\frac{2}{15} + y^2 = 3; \; y^2 = \frac{13}{15}$

$a = \sqrt{16 - 2\frac{2}{15}} = \sqrt{13\frac{13}{15}}$

$b = \sqrt{1 - \frac{13}{15}} = \sqrt{\frac{2}{15}}$

5

$\sqrt{16p} + \sqrt{p} = 5\sqrt{p} \cdot 5\sqrt{q} = 12{,}5\sqrt{pq}$

$S = \frac{\left(\sqrt{2\frac{2}{15}} + \sqrt{\frac{2}{15}}\right)\left(\sqrt{13\frac{13}{15}} + \sqrt{\frac{13}{15}}\right)}{2}$

211006252 (U377527 M1276422)

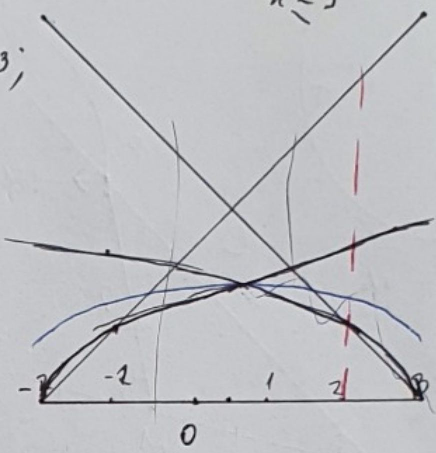
$\cancel{a-b+3}$

$x+2>0 \Rightarrow x\geq -2$

$3\cancel{x}-(3-x)>0 \quad 3 \cancel{>x}$

$x<3$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+3=2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{ab}-3; \end{cases}$



$a-2\sqrt{ab}+b=4ab-6\sqrt{ab}+9$

$\cancel{a}\ a+b-4ab-9=4\sqrt{ab}$

$a-b+3=2ab$ $\qquad \int x^2=\frac{x^3}{3}$

$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$

$a-2ab-b=-3$

$a-2ab=b-3$ $\qquad a-b+3=2ab.$

$a(1-2b)=b-3$

$a=\frac{b-3}{1-2b}$ $\qquad a=\frac{b-3}{1-2b}=\frac{-(0,5-b)-2,5}{1-2b}=-\frac{1}{2}-\frac{2,5}{1-2b}$

$b=\frac{a-3}{1-2a}$ $\qquad \sqrt{x+2}=\frac{\sqrt{3-x}-3}{1-2\sqrt{3-x}}$

$(x+2)^{\frac{1}{2}}{}'=\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{x+2}+\frac{1}{2}=-\frac{2,5}{1-2\sqrt{3-x}}$

$\sqrt{3-x}^{\frac{1}{2}}{}'=\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}}$

$b=\frac{a+3}{1+2a}$

$a-b=2ab-3 \quad (a+b)$ $\qquad a^2+b^2=5.$

$\cancel{a^2-2ab+b^2=4a^2b^2-12ab+9}$

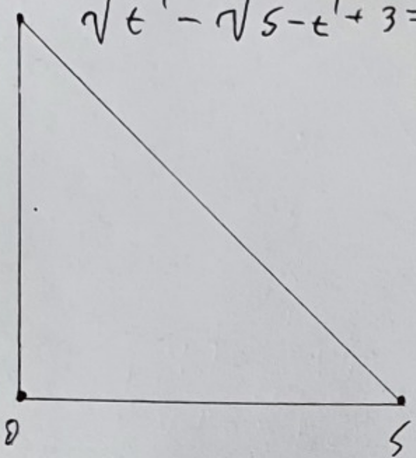
$\cancel{a-b}=a^2-b^2=2a^2b-3a+2ab^2+3b$

$\frac{(0,5+a)+2,5}{1+2a}=\frac{1}{2}+\frac{2,5}{1+2a}$

211006252 (U377527 M1276422)

$a - b + 3 = 2ab$

$\sqrt{t} - \sqrt{5-t} + 3 = 2\sqrt{5t - t^2}$



$a - b + 3 = 2ab$

$a - 2ab = b - 3$

$a(1 - 2b = b - 3$

$a = \dfrac{b-3}{1-2b}$; $b + 2ab = a + 3$; $b = \dfrac{a+3}{(1+2a)}$

$a(1-2b) = b - 3$

$a - 2ab = b - 3$

$b + 2ab = a + 3$

$b = \dfrac{a+3}{1+2a}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006252**

ID профиля: **377527**

Вариант 11

Задача №4 [Чистовик]

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

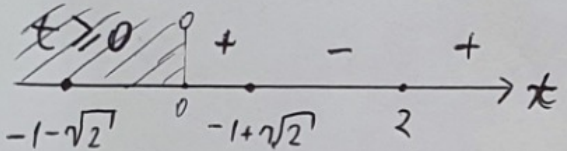
$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq |xy| \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \frac{4}{2|xy|} + (xy)^2 \geq 5 \Rightarrow \frac{2}{|xy|} + (xy)^2 \geq 5 \,\Big|\cdot |xy| \geq 0$$

$2 + |xy|^3 \geq 5|xy|$;] $|xy| = t \geq 0$

$t^3 - 5t + 2 \geq 0$

$(t-2)(t^2+2t-1) \geq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} t^2+2t-1=0 \text{ (ветви вверх)} \\ D = 4+4 = 8;\ \sqrt{D} = 2\sqrt{2} \\ t_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} > 0 \\ t_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} < 0 \\ t^2+2t-1>0 \text{ при } t \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}; +\infty) \\ t^2+2t-1<0 \text{ при } t \in (-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}) \end{array}}$$



$x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \Rightarrow 5t^2 \leq 20 \Rightarrow t^2 \leq 4 \xRightarrow[\text{т.к. } t \geq 0]{} t \leq 2.$

$t \in [0; -1+\sqrt{2}] \cup \{2\}$

] $t = 2$: $\frac{2}{t} + t^2 = 5 \Rightarrow x^2+y^2 = 2|xy| \Rightarrow |x| = |y| \} \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{2}$

$y = \pm\sqrt{2}$

Если $|x| = |y| \Rightarrow 20 = 5t \Rightarrow$ при $t \neq 2$: $|x| \neq |y|$

] $a = x^2 \geq 0$

] $b = y^2 \geq 0$

] $b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a} = 5 \\ a^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing \Rightarrow a, b > 0 = 2\ ab > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a+b} + ab = 5;\ a+b = \dfrac{4}{5-ab} = \dfrac{4}{5-t^2} \Rightarrow \underset{a^2+b^2}{\underset{\vee}{(a+b)^2}} = \dfrac{16}{(5-t^2)^2} \Bigg\} \Rightarrow \\ a^2+b^2+3ab = 20 \Rightarrow a^2+b^2 = 20-3ab = 20-3t^2 \end{cases}$$

[ЧИСТОВИК]

$\Rightarrow \dfrac{16}{(5-t^2)^2} > 20-3t^2$

при $t \in [0; -1+\sqrt{2}]$ $\begin{cases} t<1 \Rightarrow \dfrac{16}{(5-t^2)^2} < 1 \\ t<1 \Rightarrow 20-3t^2 > 17 \end{cases}$ $17>1 \Rightarrow$ на

промежутке $[0; -1+\sqrt{2}]$ - нет решений

Ответ: $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

Задача № 2 [чистовик]

$\sum$ узлов внутри квадрата со стороной $n = (n-1)^2$

на прямых $x = y$ и $y = n - x$ лежит по $(n-1)$ узел - всего $2(n-1)$ узла

Разобьём то, что мы хотим посчитать на 2 части

1) только 1 узел на диагонали

2) оба узла на диагонали

1. возьмём случайный узел на диагонали.

всего узлов не на диагоналях $((n-1)^2 - 2(n-1)) = (n-3)(n-1)$

с ним в одной параллели (и перпендикуляре) по $(n-2)$ узла, но

один из них мы уже посчитали т.к. он $\in$ диаг. $\Rightarrow$ по $(n-3)$ узла

$\Downarrow$

~~из нашего узла мо~~ нашему узлу можно выбрать в пару $(n-1)(n-3) - 2(n-3) = (n-3)^2$ узла

2. Всего способов выбрать 2 узла $\in$ диаг: $C^2_{2(n-1)}$, но $\exists$ $(n-1)$

прямая $\parallel O_x$ и $(n-1)$ прямая $\parallel O_y$, на каждой из которых

лежит по 2 узла $\Rightarrow$ всего мы можем составить $C^2_{2(n-1)} - 2(n-1)$

пар удовлетворяющих условию из узлов $\in$ диаг.

$$C^2_{2(n-1)} = \frac{2(n-1)\cdot(2n-3)}{2} = (n-1)(2n-3) \cancel{- 2(n-1)} =$$

$$(n-1)(2n-3) - 2(n-1) = (n-1)(2n-5)$$

~~Итого: $(n-3)^2 + (n-1)(2n-5)$ пар~~ ; $n = 65$

~~$62^2 + 64 \cdot 125$~~

Итого: $2(n-1)(n-3)^2 + (n-1)(2n-5) = (n-1)(2(n-3)^2 + 2n - 5)$ пар; $n = 65$

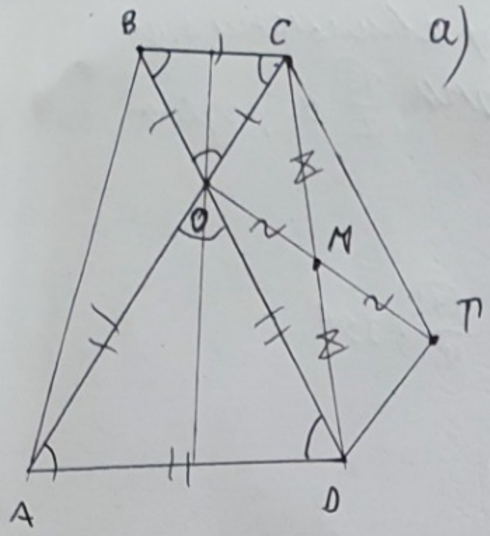
$64(2 \cdot 3844 + 125) = 64 \times 7813 = 500032$

Ответ: 500032 способа

211006252 (U377527 M1276423)

3

ЗАДАЧА № 7 [ЧИСТОВИК]



а) Дано: 4-ёх угольник $ABCD$; O – $\{\cdot\} \cap$ диагоналей; $\triangle OBC$ и AOD – равносторонние; M – середина CD; T – симметрична O относительно M

Доказать: $\triangle ABT$ – равносторонний

Proof:

$$\left.\begin{cases} BO = OC \\ AO = DO \\ \angle BOA = \angle COD \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow \angle \cancel{COD} =$$

$$\Rightarrow \angle COD = \frac{360 - \angle BOC - \angle AOD}{2} = 120.$$

рассмотрим четырёхугольник $(OCTD)$

$$\left.\begin{matrix} CM = MD \\ OM = MT \end{matrix}\right\} \Rightarrow OCTD \text{ – параллелограмм} \Rightarrow \angle COD = \angle CTD = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$$

$$\left.\begin{matrix} BO = BC = DT \\ AO = CT = AD \\ \underset{\underset{120}{\parallel}}{\angle BOA} = \underset{\underset{\angle BCO + \angle OCT}{\parallel}}{\angle BCT} = \underset{\underset{\angle ADO + \angle ODT}{\parallel}}{\angle ADT} \end{matrix}\right\} \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$$ (по 2 сторонам и $\angle$ между ними)

$\Downarrow$

$AB = BT = AT$ как соответствующие элементы $\Rightarrow \triangle ABT$ – равносторонний Ч.Т.Д.

б) $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot \rho(BC; AD) = \frac{BC+AD}{2} \cdot (\rho(O; BC) + \rho(O; AD))$

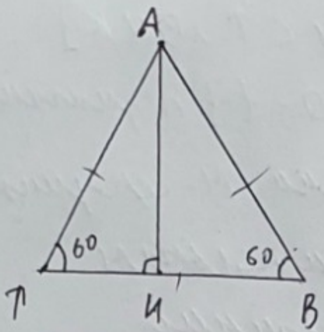
~~$S_{ABCD} =$~~ $\rho(O; BC) = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \sqrt{3}$; $\rho(O; AD) = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = 2{,}5\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 3{,}5 \cdot 3{,}5\sqrt{3} = (3{,}5)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$AB = BT = AT = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot BO \cdot AO \cdot \cos 120$

$AB = BT = AT = \sqrt{4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{39}$ *по Th косинусов.

4



$AH = AT \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} AT$ [ЧИСТОВИК]

* расстояние от вершины правильного Δ до противоположной стороны $\frac{\sqrt{3}}{2} a$, где a – длина стороны

$$S_{ABT} = \frac{AH \cdot BT}{2} = \frac{AT \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AT}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AT^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 39$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 39}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot 49} = \frac{39}{49}$$

Ответ: Отношение площадей $= \frac{39}{49}$

211006252 (U377527 M1276423)

5

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$x^2 = a > 0$

$y^2 = b > 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{a+b} + ab = 5 \le \frac{4}{2xy} + (xy)^2 = \frac{2}{xy} + x^2y^2 \le \frac{2}{|xy|} + (xy)^2 \\ a^2 + b^2 + 3ab = 20 \ge 2ab + 3ab = 5ab \end{cases}$$

$20 \ge 5ab$; $ab \le 4$; $x^2y^2 \le 4 \Rightarrow (xy)^2 \le 4 \Rightarrow |xy| \le 2$

$\frac{2}{|xy|} + (xy)^2 \le 5 \;\Big|\cdot |xy| \ge 0$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x^2+y^2}{2}$

$2 + |xy|^3 \le 5|xy|$; $|xy| = t \ge 0$

$\frac{x^2+y^2}{2} \ge \frac{(x+y)^2}{4}$

$t^3 - 5t + 2 \ge 0$

$(t-2)(t^2+2t-1) \ge 0$

$x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$

$20 \ge 5t^2 \Rightarrow 4 \ge t^2 \Rightarrow t \le 2$

$\frac{1}{1000} - 0{,}5 + 2$

$0{,}1 + 0{,}2 \ge 2\sqrt{\frac{2}{100}}$

$0{,}3 \ge \frac{2\sqrt{2}}{10}$

$3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ ✓

$\frac{4}{2x^2} + x^4 = 5$; $x^2 = t \ge 0$

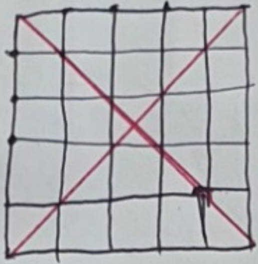
$\frac{4}{a+b}$ $\frac{4}{2xy} + (xy)^2 = 5$

$\frac{2}{t} + t^2 = 5 \,|\, t$

$t^2 - 5t + 2 = 0$

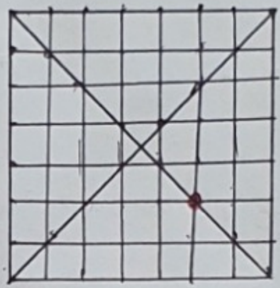
211006252 (U377527 M1276423)

$xy=2$



$(n-1)^2$ – узлов

$2n-2$ на диаг.



$2(n-1)+2(n-3)=4n$

$2(2n-4)$

$C_6^2 \cdot 2 = 30+6\cdot 4=54$

C_{12}^2-12

$6\cdot 11=66-12=54$

$2(n-1)\times(n^2-2n+1-4n-8)+C_{2(n-1)}^2-2(n-1)$

$62\times 62=3844$

$3844\times 2=7688$

$7813\times 64=500032$

$\frac{4}{a+b}+ab=5$

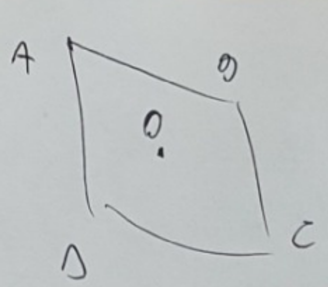
$a^2+b^2+3ab=20$

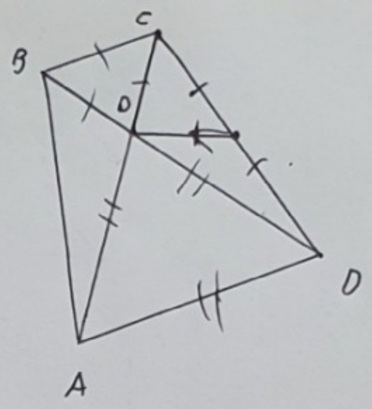
$a^2+b^2=20-3ab$

$\frac{4}{a+b}=5-ab$

$a+b=\frac{4}{5-ab}$

$a+b^2=\frac{16}{(5-ab)^2}>20-3ab$


A
B
O
D
C


C
B
O
D
A