Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006229**

ID профиля: **825594**

Вариант 11

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$ Черновик

ОДЗ $x \geq -2$

$x \leq 3$

$x^2 - x - 6 \leq 0$

$x \in [-2; 3]$

$\cancel{x} + 2 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + 3 - \cancel{x} = 4(6+x-x^2) + 9 - 12\sqrt{6+x-x^2}$

$\cancel{10\sqrt{6+x-x^2} = 24 + 4x - 4x^2 + 4 = -4x^2 + 4x + 28}$

$\cancel{5\sqrt{6+x-x^2} = -2x^2 + 2x + 14}$

$10\sqrt{6+x-x^2} = 4(6+x-x^2) + 4$

$t = \sqrt{6+x-x^2}, \quad t \geq 0$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{4} = 2 \\ t = \frac{2}{4} = 0,5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 6+x-x^2 = 4 \\ 6+x-x^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ 4x^2 - 4x - 23 = 0 \end{array}\right.$ $x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

$\frac{D}{4} = 4 + 23 \cdot 4 = 4 + 92 = 96$

$\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 2,5$

$6 \vee 6,25$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{96}}{4} = \frac{2 \pm 4\sqrt{6}}{4}$

$x_3 = 0,5 + \sqrt{6} \quad x_4 = 0,5 - \sqrt{6}$

$96 : 4 = 24$

$0,5 \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$

$25 \cdot 25 = 625$

~~$x \in (0,8; 1+5$~~

$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{22}}{2}\right) \cup \left(0,5; \frac{1+\sqrt{22}}{2}\right)$

$x = -1$ ✗

$x = 2$ ✓

$x = 0,5 + \sqrt{6}$ ✗

$x = 0,5 - \sqrt{6}$ ✓

$\begin{cases} x > 0,5 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{22}}{2}; \frac{1+\sqrt{22}}{2}\right) \end{cases}$ $x \in \left(0,5; \frac{1+\sqrt{22}}{2}\right)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2} > \sqrt{3-x} \\ 2\sqrt{6+x-x^2} > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2} < \sqrt{3-x} \\ 2\sqrt{6+x-x^2} < 3 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x+2 > 3-x \\ 4(6+x-x^2) > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > 1 \\ 4x^2 - 4x - 21 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x < 1 \\ 4x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,5 \\ x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{22}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{22}}{2}; \infty\right) \end{cases}$

$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{22}}{2}\right)$

$4x^2 - 4x - 21 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 + 84 = 88$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{22}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{2}$

Чистовик

(2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

ОДЗ $x\in[-2;\ 3]$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{6+x-x^2}-3$

$\cancel{x}+2+3-\cancel{x}-2\sqrt{6+x-x^2}=4(6+x-x^2)+9-12\sqrt{6+x-x^2}$

$t=\sqrt{6+x-x^2},\quad t\geq 0$

$4t^2-10t+4=0$

$\sqrt{6}<2{,}5$

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=0{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6+x-x^2=4 \\ 6+x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ 4x^2-4x-23=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \in ОДЗ \\ x=2 & \in ОДЗ \\ x=0{,}5+\sqrt{6} & \in ОДЗ \\ x=0{,}5-\sqrt{6} & \in ОДЗ \end{array}\right.$$

При этих корнях лев. и прав стороны уравнения $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{6+x-x^2}-3$ равны по модулю. Теперь нужно проверить что их знаки тоже равны

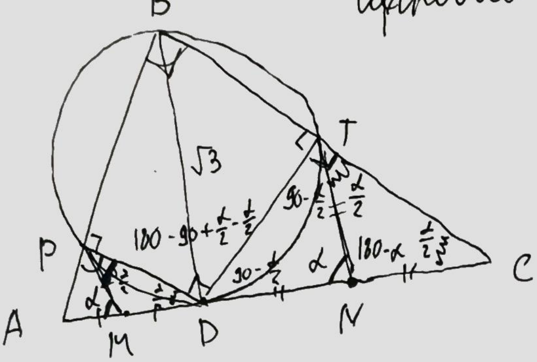
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2}>\sqrt{3-x} \\ 2\sqrt{6+x-x^2}>3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2}<\sqrt{3-x} \\ 2\sqrt{6+x-x^2}<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2>3-x \\ 4(6+x-x^2)>9 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2<3-x \\ 4(6+x-x^2)<9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0{,}5 \\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{22}}{2};\ \frac{1+\sqrt{22}}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x<0{,}5 \\ x\in\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{22}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{22}}{2};\infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

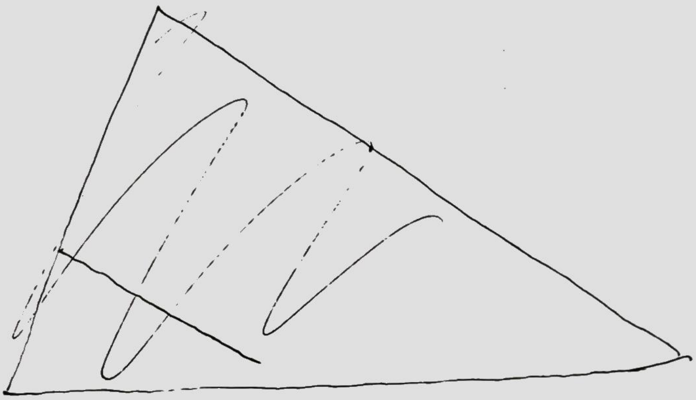
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(0{,}5;\ 0{,}5+\sqrt{\frac{11}{2}}\right) \\ x\in\left(-\infty;\ 0{,}5-\sqrt{\frac{11}{2}}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\ 0{,}5-\sqrt{\frac{11}{2}}\right)\cup\left(0{,}5;\ 0{,}5+\sqrt{\frac{11}{2}}\right)$$

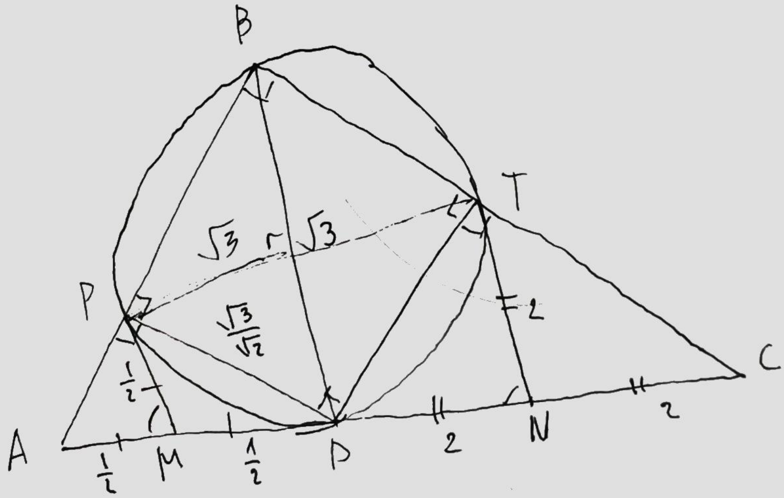
Остаются только корни 2 и $0{,}5-\sqrt{6}$

Ответ: $x=2$; $x=0{,}5-\sqrt{6}$.

Черновик







$$S_{BPPT} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{9}{4}$$

$$AP^2 = 1 - \frac{3}{2} = -0{,}5 \quad ?$$

Чистовик

(1) Точки P и T лежат на окружности и опираются на диаметр BD $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ т.к. TN — медиана в прямоугольном треугольнике $DN = TN = NC$, аналогично $AM = PM = DM$. По условию $PM \parallel TN$, тогда пусть $\angle AMP = \angle DNT = \alpha$ т.к. $\triangle PMD$ - равнобедр $(PM = MD)$ $\angle MPD = \angle MDP = \frac{\alpha}{2}$, $\triangle DNT$ - равноб. $(DN = TN) \Rightarrow \angle NDT = \angle NTD = 90 - \frac{\alpha}{2}$. $\angle PDT = 180^\circ - \angle MDP - \angle NDT = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ$. т.к. $PBTD$ - вписан. $\angle PBT + \angle PDT = 180^\circ \Rightarrow \angle PBT = 180^\circ - \angle PDT = 90^\circ$. $\angle ABC = \angle PBT = 90^\circ$

$MP = 0{,}5$ $NT = 2$ $BD = \sqrt{3}$ $PBTD$ - квадрат. $\Rightarrow PD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$MP + MD = 1 < PD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ не выполняется. $\triangle$ не существует.

Черновик

$\cancel{5x^2}$

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$\cancel{8x^2+12ax+}$

$(2x+2y)^2+(4x^2+8ax+4a^2)+a^2+4ax+4ay$

$(2x+2y)^2+(2x+2a)^2+a^2+4ax+4ay=0$

$(2x+2y)^2+(2x+2a)^2+a^2+4a(x+y)=0$

$(4y^2+4ay+a^2)+(\cancel{4a^2+8ax+4x^2)+4ax+4x^2}+8xy$

$(a^2+4ax+4x^2)+(4ay+4x^2+8xy+4y^2)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$ay=ax^2-2ax+a^3+4$

$y=x^2-2x+\frac{a^3+4}{a}>3x-4$

$x^2-5x+\frac{a^3+4a+4}{a}>0$

$D=25-4\frac{a^3+4a+4}{a}=9-4a^2+\frac{16}{a}<0$

$4a^3-9a-16>0$

$\cancel{4\cdot 27}\ \cancel{327}\qquad \cancel{327}\ 18\ 16$

$\cancel{327}\quad 9$

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$(4x^2 + 8xy + 4y^2) + (4x^2 + 12ax + 9a^2) \cancel{+} - 4a^2 + 4ay = 0$

$(2x + 2y)^2 = 0$ т.к это точка $\Rightarrow x = y$

$4x^2 + 8x + 5a^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 - 20a^2 = 0$

$a^2 = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$x^2 - 5x \cancel{+} \quad \frac{4}{5} + 4 + \frac{^2\cancel{4}\sqrt{5}}{\cancel{2}} =$

$x^2 - 5x \cancel{+} 4,8 + 2\sqrt{5} = 0$

$D = 25 - 4(4,8 + 2\sqrt{5}) = < 0$

$+ 2\sqrt{5}$

$6,25 - 4,8 \vee 2\sqrt{5}$

$<$

$1,45 \vee 2\sqrt{5}$

$$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$$

$$(2x+2y)^2 \cancel{+(4x^2+12ax+6a^2)}-a^2$$

$$(2x+2y)^2+(2x+2a)^2+a^2+4a(x+y)$$

$$\cancel{5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2<y-3x}$$

$$a^2+4a^2+4ax+8ax+4ay+4x^2+4x^2+8xy+4y^2$$

$$\cancel{(2x+2}\ (2x+a)^2+(2x+2y)^2+4a(a+2x+y)$$

Чистовик

③ $5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$(2x + 2y)^2 + (4x^2 + 12ax + 9a^2) - 4a^2 + 4ay = 0$

т.к. это точка $(2x + 2y)^2 = 0 \Rightarrow x = -y$

$4x^2 + 8x + 5a^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 - 24a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006229**

ID профиля: **825594**

Вариант 11

Черковин

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5\\ x^4+y^4+3x^2y^2=20\end{cases}$$

Замена $x^2y^2=v, \ge 0$ $\quad x^2+y^2=u \ge 0$

$$\begin{cases}\dfrac{4}{u}+v=5\\ u^2+v=20\end{cases} \qquad \begin{cases}v=20-u^2\\ \dfrac{4}{u}+20-u^2=5\end{cases}$$

$$-u^3+15u+4=0$$

$$u^3-15u-4=0$$

$$16\cdot 4-15\cdot 4-4=0$$

$$\begin{array}{l|l} u^3+0u^2-15u-4 & u-4 \\ \cline{2-2} -\ u^3-4u^2 & u^2+4u+1 \\ \hline \quad 4u^2-15u & \\ \quad -\ 4u^2-16u & \\ \hline \qquad u-4 & \\ \qquad -\ u-4 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$(u-4)(u^2+4u+1)$$

$$\begin{cases}u=4\\ v=4\end{cases} \qquad u=\frac{-2\pm\sqrt{4-1}}{}=-2\pm\sqrt{3}$$

не уд $u \ge 0$

$$\begin{cases}x^2y^2=4\\ x^2+y^2=4\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2=2\\ y^2=2\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ $(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ ....

④ Беловик

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Замена $v = x^2y^2$, $v \geq 0$; $u = x^2+y^2$, $u > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{u} + v = 5 \\ u^2 + v = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 20 - u^2 \\ \dfrac{4}{u} + (20-u^2) = 5 \quad \Big| \cdot u \quad (\text{т. к } u \neq 0) \end{cases}$$

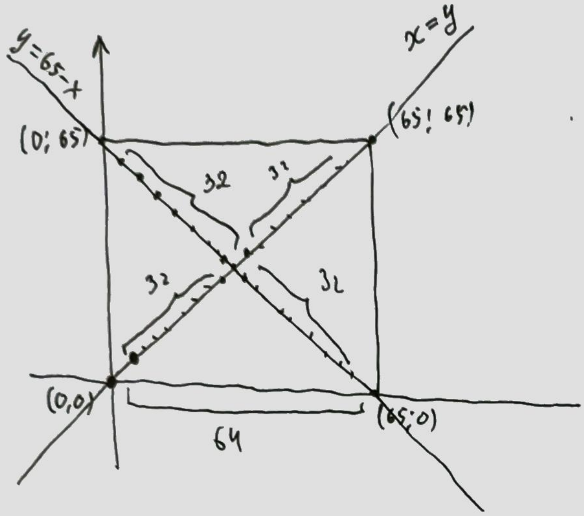
$$u^3 - 15u - 4 = 0$$

$$(u-4)(u^2+4u+1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 4 \\ u = -2 \pm \sqrt{3} \quad \text{не. уд. } u > 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} u = 4 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

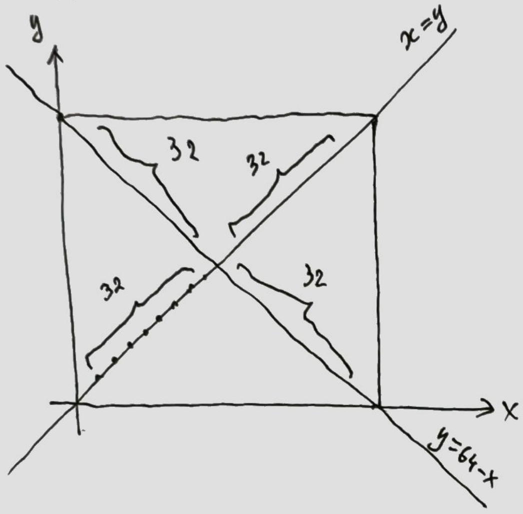


$$\cancel{\frac{(32+31+31)\cdot 32\cdot 4}{2} = 94\cdot 2\cdot 32}$$

$(63+62)$

Чистовик

2



Узла лежащего на обеих прямых нет. Количество способов для каждой вершины выбрать пару не паралельную осям координат 63 - на той же прямой, 62 - на другой прямой.

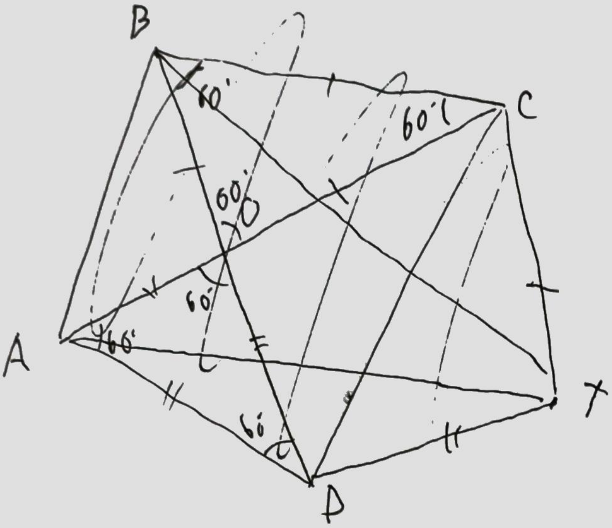
Всего точек $64 \cdot 2$

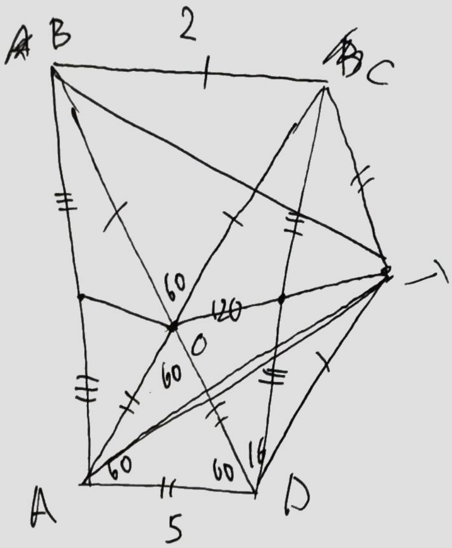
Каждую пару посчитали дважды

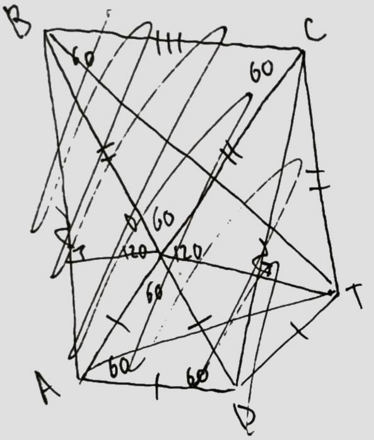
Получаем

$$\frac{(63+62)\cdot 64\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 125\cdot 64 = 2^3\cdot 10^3 = 8000$$

Ответ: 8000







$S_{\Delta ADT} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin(120) =$

$= 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AT^2 \cdot \sin 60^\circ$

$AT = 4 + 25 - 20 \cdot \frac{1}{2} = 19$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 19^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{361 \cdot \sqrt{3}}{4}$

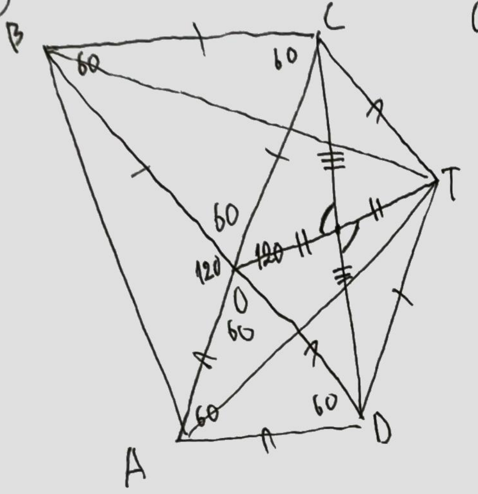
$S_{ABCTD} = S_{ABT} + 2 S_{ADT} = \frac{20\sqrt{3}}{4} + \frac{361\sqrt{3}}{4} = \frac{381\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{ABCTD} - S_{ADT} = \frac{371\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{361 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{371 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{361}{371}$

Чистовик

⑥



а) Если отразить точку T ~~отно~~ симметр. O относительно середины CD. Четырехугольник OCTD будет пар-ммом. $\angle COD = 180 - \angle BOC = 120°$, $\angle ODT = 180° - \angle COD = 60°$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle CDO = 120°$

Пусть $OC = CB = BO = a$, тогда $DT = a$ по свойству пар-мм.

Пусть $AO = OD = DA = b$, тогда $CT = b$ по свойству пар-мм.

$\angle OCT = \angle ODT$ по свойству пар-мм.

Получаем $BO = BC = DT = a$, $AO = AD = CT = b$, $\angle BOA = \angle BCT = \angle TDA = 120°$

Треугольники $\triangle OAB$, $\triangle CTB$, $\triangle DAT$ равны по двум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный треуг. ч.т.д.

б) $S_{ADT} = S_{BCT} = S_{BOA} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 120° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$AT^2 = AO^2 + OT^2 - 2AO \cdot OT \cos 120 = 4 + 25 - 20 \cdot (-\frac{1}{2}) = 39 \Rightarrow AT = \sqrt{39}$

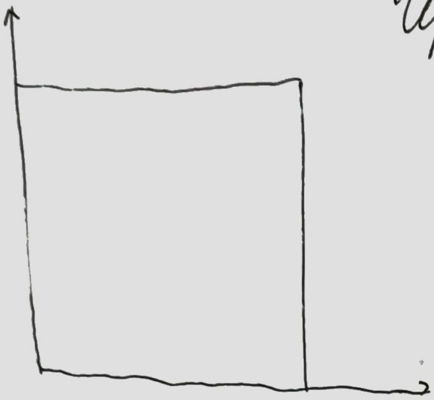
$S_{ATB} = \frac{1}{2} \cdot AT^2 \cdot \sin 60 = \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

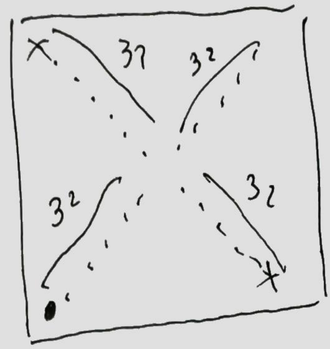
Пятиугольник ABCTD состоит из $\triangle ABT$, $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$ или из ABCD и $\triangle CTD$. $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABT} + S_{ADT} = \frac{39\sqrt{3}}{4} + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$$

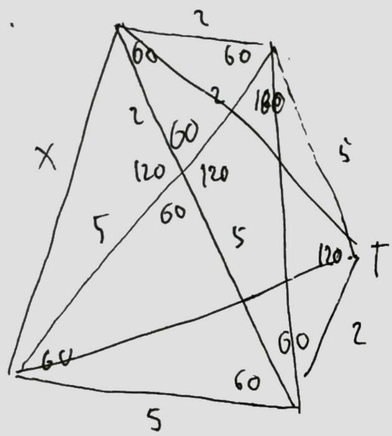
Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$

Черновик





$$\frac{(63+62)64\cdot 2}{2} = 125\cdot 64 = 8000$$



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2 =$$

$$x = 4+25-2\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 29+10 = 39$$