Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006111**

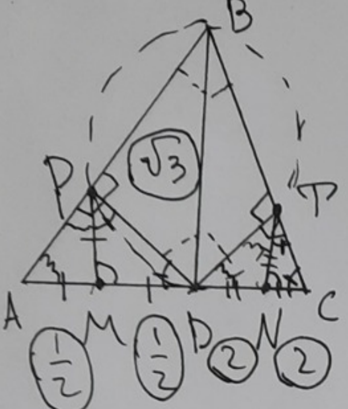
ID профиля: **327538**

Вариант 11

Вариант 11. Математика 10 кл.

Чистовик №1.

№1



Выполним доп. построение проведём PD и DT.

(·)P, (·)D, (·)T и (·)B лежат на одной окружности, диаметром которой является BD.

Углы BPD и DTB опираются в окружности на диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle DTB = 90°$.

Тогда и $\angle APD = \angle DTC = 90°$ (составляют в сумме 180° с вышеперечисленными углами)

Рассмотрим $\triangle APD$; M – середина гипотенузы AD $\Rightarrow$ PM – медиана и $AM = MP = MD$

Аналогично с $\triangle DTC$: $DN = NT = NC$

Из условия $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMC = \angle TNC$

$\angle MPD = \angle MDP = \angle NTC = \angle NCT$

Из $\triangle APM$: $\angle MAP = \angle APM$; $\angle APM + \angle MPD = 90° \Rightarrow$

т.к. $\angle MPD = \angle NCT$ и $\angle MAP = \angle APM$, то

$\angle PAM + \angle NCT = 90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$

1

Ответ: 90°.

задача №2 на ②

Математика 10кл.

Вариант 11

Чистовик №2.

№2

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$. $x\le3$

$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)^2=\left(2\sqrt{6+x-x^2}-3\right)^2$; $x\ge-2$

$5-2\sqrt{6+x-x^2}=4(6+x-x^2)+9-12\sqrt{6+x-x^2}$;

$4(6+x-x^2)-10\sqrt{6+x-x^2}+4=0$;

$2(6+x-x^2)-5\sqrt{6+x-x^2}+2=0$;

Пусть $T=\sqrt{6+x-x^2}$; $T\ge0$

Тогда: $2T^2-5T+2=0$;

$T=\left[\begin{matrix}2\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

Вернемся к прежней переменной.

$6+x-x^2=4$;

$x^2-x-2=0$;

$x=\left[\begin{matrix}2\\ -1\end{matrix}\right.$ – не подходит

$6+x-x^2=\frac{1}{4}$;

$x^2-x-5\frac{3}{4}=0$;

$x=\left[\begin{matrix}\frac{-1+2\sqrt6}{2}\\ \frac{-1-2\sqrt6}{2}\end{matrix}\right.$

2

Ответ: 2

задача №3 на 3

Математика 10 кл.

Вариант 11

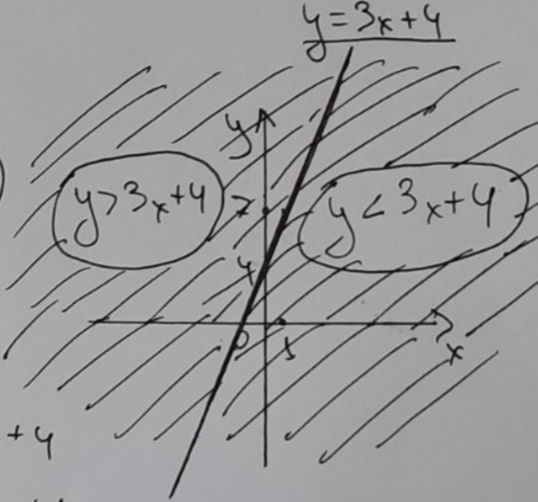
Чистовик №3

$\boxed{№3}$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0;$

вершина параболы: $x_B=a$ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$y_B=\frac{4}{a}$



Возможны 2 случая:

(1) $\begin{cases} y_A>3x_A+4 \\ y_B<3x_B+4 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} y_B>3x_B+4 \\ y_A<3x_A+4 \end{cases}$

Для координат (·)A:

$5a^2+12ax_A+4ay_A+8x_A^2+8x_Ay_A+4y_A^2=0;$

$4y_A^2+4y_A(a+2x_A)+8x_A^2+5a^2+12ax_A=0;$

$D=16(a+2x_A)^2-16(8x_A^2+5a^2+12ax_A)=16(a^2+4x_A^2+2\cdot2ax_A-8x_A^2-$
$-5a^2-12ax_A)=16(-8x_A^2+4x_A^2-10ax_A+2ax_A-4a^2)=$
$=16(-4x_A^2-8ax_A-4a^2)=-4\cdot16(x_A^2+2ax_A+a^2)=\underline{-4\cdot16(x_A+a)^2}$

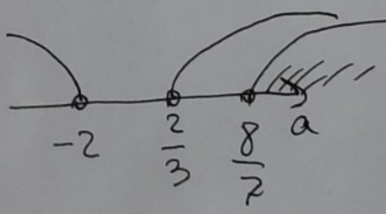
$(x_A+a)^2\geq0$ – всегда; $-4\cdot16<0 \Rightarrow D\leq0$

$\underline{D=0}$, когда $x_A=-a$ – единственный возможный случай в действительных числах

$\underline{y_A}=\frac{-4(a+2x_A)\pm0}{8}=-\frac{1}{2}(a-2a)=\frac{a}{2}$

Тогда

(1) $\begin{cases} \frac{a}{2}>-3a+4; \\ \frac{4}{a}<3a+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a>\frac{8}{7} \\ 3a^2+4a-4>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>\frac{8}{7}; a\in\left(\frac{8}{7};+\infty\right). \\ a\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right). \end{cases}$



$\Rightarrow \boxed{a\in\left(\frac{8}{7};+\infty\right)}$

3

продолжение см. на ⑨ →

211006111 (U327538 M1273453)

Математика 10 кл.

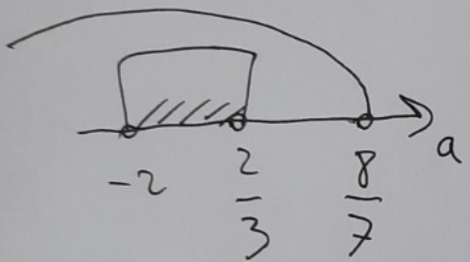
Вариант 11.

Чистовик №4

$\boxed{№3}$

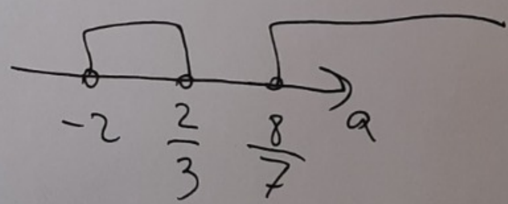
(продолжение)

(2) $\begin{cases} \frac{4}{a} > 3a+4; \\ \frac{a}{2} < -3a+4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3a^2+4a-4<0; \\ a<\frac{8}{7}; \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{a \in \left(-2; \frac{2}{3}\right)} \\ a \in \left(-\infty; \frac{8}{7}\right) \end{cases}$



$\boxed{a \in \left(-2; \frac{2}{3}\right)}$

Объединяя (1) и (2):



Ответ: при $a \in \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$.

4

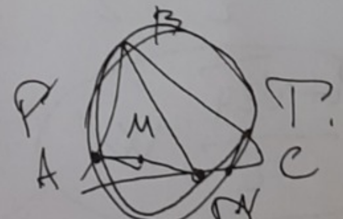
Черновик

$$\cancel{x}+2+3-\cancel{x}-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=\left(2\sqrt{6+x-x^2}-3\right)^2$$

$$5-2\sqrt{(x+2)(3-x)}=4(6+x-x^2)+9-12\sqrt{6+x-x^2}.$$

$3x-x^2+6-2x.$

$6+x-x^2.$



$$5-2\sqrt{6+x-x^2}=4(6+x-x^2)+9-12\sqrt{6+x-x^2}$$

$$10\sqrt{6+x-x^2}=4(6+x-x^2)+4 \quad -5$$

$6+x-x^2=t.$ $\quad 2\sqrt{6+x-x^2}=1.$

$10t=4t^2+4$ $\quad \sqrt{6+x-x^2}=2.$

$2t^2-5t+2=0.$ $\quad 6+x-x^2=4;$

$\cancel{x_1+x_2=}$ $\quad 16$ $\quad x^2-x-2=0$ $\quad -3\frac{3}{4}$

$D=25-4\cdot4=9.$ $\quad D=1+8=9.$ $\quad -2$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}2\\0{,}5\end{array}\right.$ $\quad \sqrt{x+2}\geq0.$ $\quad x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}$

$x+2\geq0.$ $\quad -2 \quad -\frac{23}{4} \quad -1$

$4(6+x-x^2)=1;$ $\quad x\geq-2.$

$24+4x-x^2=1;$ $\quad x^2-4x-23=0$ $\quad 108.$ $\quad \frac{1-24}{4}$ $\quad \frac{1}{4}-6.$

$D=16+$

$1-2+3$ $\quad 2-1+3.$ $\quad 2\cdot2=2\sqrt{6-1}$ $\quad 2+1+3=$

Черновик

$D = 1 + \cancel{4}\cdot\frac{23}{\cancel{4}} = 24$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{2} \sim 5$

$\frac{1+5}{2}$ $\frac{6}{2}$ 3

$\boxed{\frac{1+\sqrt{24}}{2}}$ ✓

$\frac{1-\sqrt{24}}{2}$ ✓

4·6

$D = \cancel{1} + 4 \cdot \frac{23}{4} = \sqrt{24} < 5$

$2\sqrt{6}$

$\frac{-1 \pm 2\sqrt{6}}{2} = x$

$\frac{\cancel{1}-4}{2}$

$\frac{1-5}{2}$

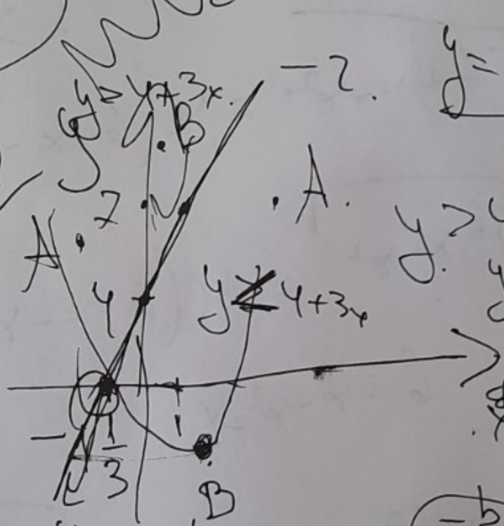
-2

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$

$y = 3x + 4$

$\underline{y = 4 + 3x}$



$y > 4 + 3x$

$y > 4$

$d\,S_{00} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 - \frac{h}{1} + \frac{h}{1} = {}_2 9$

$r\,S_{00} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot 2 - \frac{h}{1} + \frac{h}{1} = {}_2 b$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$

$-\frac{4}{3}$

$dS_{00} + rS_{00}$

$-\frac{b}{2a}$

~~8)(2+x) - 2 - x - 8 + 2 + x)~~

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4$

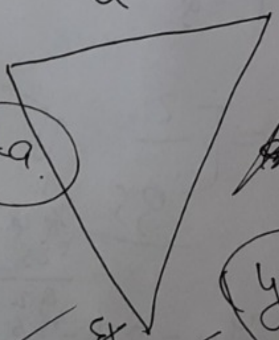
$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{4}{a}$

$\forall$

$x = \frac{2a}{2}$, $x = a$

$\boxed{r = {}_2 9 + {}_2 b}$



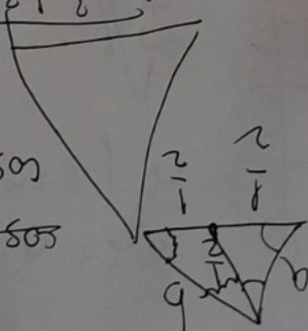
$S_{00} + S_{00} = 120$

~~dS_{00}~~

$\cancel{x}$

$y = \frac{4}{a}$

$y = \cancel{a^2} - \cancel{2a^2} + \cancel{a^2} + \frac{4}{a}$



211006111 (U327538 M1273453)

Черновик

$5a^2+12ax_A+4a\cancel{y_A}+8x_A^2+8\cancel{x_Ay_A}+4\cancel{y_A^2}=0;$

$4y_A^2+y_A(4a+8x_A)+8x_A^2+5a^2+12ax_A=0;$

$D=(4a+8x_A)^2-16(8x_A^2+5a^2+12ax_A);$

$y_A=\frac{-4a-8x_A\pm\sqrt{\dots}}{8}$

$D=16a^2+64x_A^2+64ax_A-16($

$D=16(a^2+\cancel{4x_A^2}+\cancel{4ax_A}-\cancel{8x_A^2}+5a^2-\cancel{12ax_A})$

$D=16(-4x_A^2-8ax_A-4a^2)$

$D=16(2x_A+2a)^2$

$D=-16\cdot4(x_A+a)^2$

$D\le0$ неравен.

$y=3x+4$

$x=\frac{y-4}{3}$

$x>\frac{y-4}{3}$

$3x>y-4$

$y<3x+4$

$x<\frac{y-4}{3}$

$3x<y-4$

$y>3x+4$

$2\cdot4-5\cdot2+2=0$

$10+2=0$

$-\frac{1}{2}-5\cdot\frac{1}{2}+2=0$

$-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

$4\cdot2$

$2\sqrt{6-2}$

$1-2+3$

$8+$

$2(4)-5\cdot2+2=0$

$D=1+4\cdot2$

$\frac{1\pm3}{2}$

$1-2+3=2\cdot2$

$z=\frac{4}{2}$

Чернетка

$a > -6a + 8.$

$7a > 8.$

$a > \frac{8}{7}$

$4 < 3a^2 + 4a$

$3a^2 + 4a - 4 > 0.$

$D = 16 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot 4^2$

$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 4 \cdot 2}{6} = [$

$\frac{-4 \pm 8}{6}$

$\frac{1 + (\sqrt{5})}{2}$ $< \frac{4}{2}$ < 2

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $< \frac{6}{2}$ < 3

$x = a.$

$2ax - 2a^2 =$

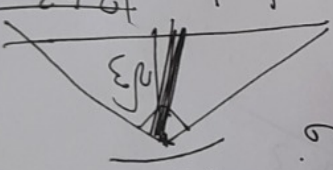
$\boxed{\begin{array}{l} 4 > 3a^2 + 4a; \\ 3a^2 + 4a - 4 < 0 \\ a < -6a + 8 \\ 7a < 8. \\ a < \frac{8}{7} \end{array}}$

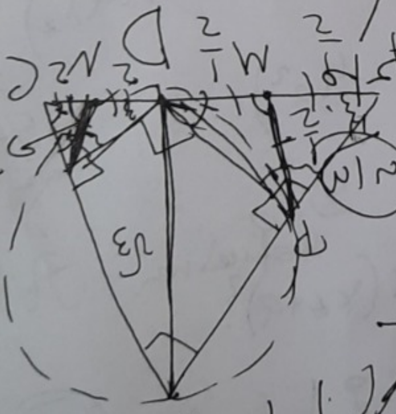
$5 - 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 + 9 - 12 \cdot 2.$

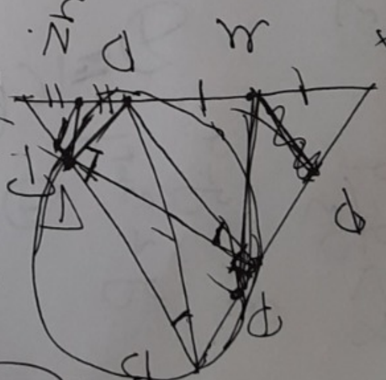
$y - \frac{5}{2}$

$ay - 4$

$a \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 \cdot a - ay + a^2 + 4 = 0.$







$8x(x + y)$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0;$

211006111 (U327538 M1273453)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006111**

ID профиля: **327538**

Вариант 11

Математика Юк.

Вариант 11.

Чистовик №1.

$\boxed{№4}$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5. \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20. \end{cases}$$

Пусть $x^2y^2=A$; $x^2+y^2=B$; $A\geq0$; $B\geq0$.

Тогда $\begin{cases} \frac{4}{A}+B=5; \quad B=\frac{5}{1}-\frac{4}{A}; \\ A^2+B=20; \end{cases}$

$A^2+5-\frac{4}{A}=20$; $A^3-15A-4=0$. Заметим, что один из корней: $4=A_1$

Тогда из т. Безу:

$$\begin{array}{r|l} A^3+0\cdot A^2-15A-4 & A-4 \\ \underline{A^3-4A^2} & \overline{A^2+4A+1} \\ +4A^2-15A & \\ \underline{4A^2-16A} & \\ A-4 & \end{array}$$

$A^3-15A-4$

$(A-4)(A^2+4A+1)=0$;

$A^2+4A+1=0$. оба корня не подходят

$A\neq\sqrt{3}-2$; $A\neq-2-\sqrt{3}$ $A\geq0$ $\pm\sqrt{3}-2\leq0$.

$B_1=5-\frac{4}{A_1}=5-\frac{4}{4}=5-1=4 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4. \\ x^2y^2=4; \end{cases}$ $y^4-4y^2+4=0$; $t=y^2\geq0$

$t^2-4t+4=0$;

$t=2$; $y=\sqrt{2}$;

$x^2=\frac{4}{2}=2$; $x=\sqrt{2}$

Ответ: $\boxed{x=\sqrt{2};\ y=\sqrt{2}}$

1

№5 →

211006111 (U327538 M1273454)

Математика 10кл.

Вариант 11.

Чистовик №2.

$\boxed{№5}$

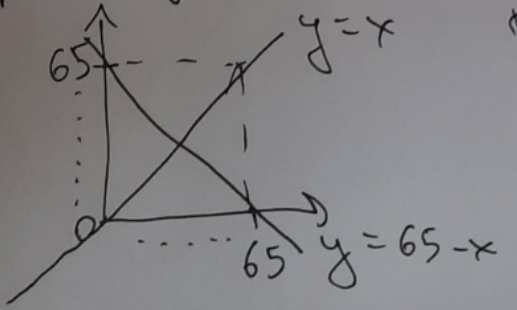
Выведем общую формулу для подсчета.

Всего клеток, которые могут быть заняты точками $(N-1)^2$, т.к. по условию не включая границу.

Также из условия точки не должны лежать на прямой, параллельной одной из осей координат. $\Rightarrow$

Кол-во вариантов постановки второй точки уменьшается: $(N-1)^2 - \underbrace{1}_{\text{первая, поставленная на нужные прямые, точка}} - (N-2)\cdot 2$ (в этой задаче $N = 65$)

Заметим, что указанные прямые являются диагоналями квадрата.



Всего узлов на диагоналях: $(N-1)\cdot 2$

Т.к. N - нечетно в нашем случае, центральной точки нет, мы её не считаем повторно.

Всего кол-во способов: $(64^2 - 1 - 63\cdot 2)(64\cdot 2) = 508032$

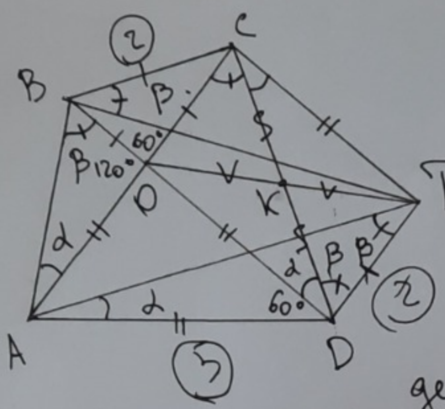
Ответ: 508032 способами

2

Математика 10 кл.

Вариант 11. Чистовик №3

№6



а) Выполним доп. построение.
Построим CT и TD.
По условию: OK = KT,
CK = KD =>
в четырехугольнике OCTD диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Следовательно, OD = CT; OC = DT.
Рассмотрим △AOB и △DOC: AO = OD; OB = OC;
∠COD = ∠AOB как вертикальные.
Значит, △AOB = △DOC.
Теперь рассмотрим △ADT и △AOB.
AO = AD; DT = BO; ∠ADT = ∠AOB, т.к. из △AOB: $\alpha+\beta=60°$.
$\angle ADT = 60° + \alpha + \beta = 120° = \angle AOB$
Тогда △ADT = △AOB. Аналогично с △BTC = △OCD;
Значит, все вышеперечисленные треугольники равны между собой
=> $\angle DAT = \alpha$, а $\angle TBC = \beta$.
Рассмотрим ∠BAD: $\angle BAT = \alpha + \angle OAD - \alpha$;
$\angle OAD = 60°$ => $\angle BAT = 60°$.
Аналогично с $\angle ABT = \angle OBC = 60°$
Тогда в △ATB: $\angle ABT = 60°$; $\angle BAT = 60°$ => $\angle ATB = 60°$

⇓

△ABT − правильный

3

продолжение см. →

Математика 10кл.

Вариант 11.

Чистовик №4

$\boxed{№6}$ продолжение.

б) $S_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{(2+5)(2+5) \cdot \sin 60^\circ}{2}$;

$S_{ATB} = \frac{\sqrt{3} a^2}{4}$

4

$a = BT$;

Из т. косинусов для $\triangle ADT$:

$a^2 = 25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$;

$\frac{S_{ATB}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (29 - 40 \cos 120^\circ) \cdot 2}{4 \cdot 7^2 \sin 60^\circ} = k = 1$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = \frac{\cancel{\sqrt{3}}(29 - 40 \cos 120^\circ) \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot 7^2 \cdot \cancel{\sqrt{3}}} = \frac{(29 + 20)}{7^2} = \frac{49}{49} = 1$

$\frac{S_{ATB}}{S_{ABCD}} = 1$.

Ответ: 1.

211006111 (U327538 M1273454)

Черновик.

$(16-1-6)\,8.$

$\boxed{308032}$

$$\begin{cases} \dfrac{4x^9}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20. \end{cases}$$

$64 \times 64 = 4096$

$4096 - 127 = 3969$

$3969 \times 64 = 254016$

$63 \times 2 = 126$

$36 \times 2 = 72$

$+2x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20.$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

$\boxed{308032}$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5; \quad b = 5 - \dfrac{4}{a}. \\ a^2 + b = 20; \quad 4 + ba = 5a; \end{cases}$$

$xy = 2$

$xy = 2^{64}.$ 60

$\frac{5}{2}$ 2,5 -1.

$a(5-b) = 4$

$a = \dfrac{4}{5-b}$

$a^2 + 5 - \dfrac{4}{a} = 20;$

15×4

$a^3 + 5a - 4 = 20a;$

$a^3 - 15a - 4 = 0;$

$4 + x^2y^2(x^2+y^2) = 5(x^2+y^2)$

$a^3 + 0a^2 - 15a - 4 \,|\, a-4$

$a^3 - 4a^2 \qquad a^2 - 4a$

$-4a^2 - 15a$

$-4a^2 + 16a$

$-29a - 4$

$13 + 16 = 29$

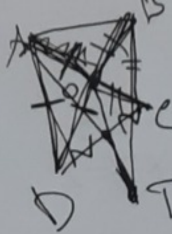
$(65-1)^2$

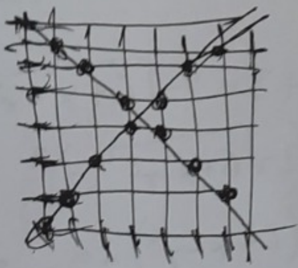
$2\cdot(65-1)$ км.

65

65

Черновик.





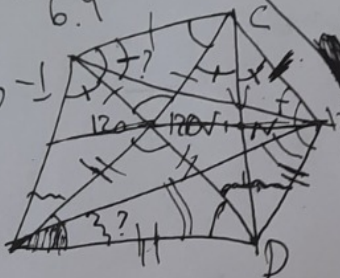
$x^2 = \frac{y}{y^2}$

$y^2 + \frac{y}{y^2} = y$

$10 - 1$

$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 81 \\ -17 \\ \hline 6.4 \end{array}$

$81 - 16 - 1$



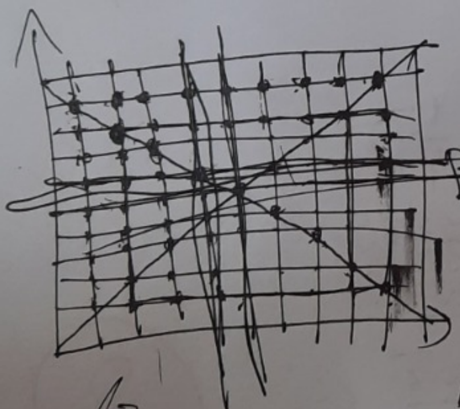
$\left(\left[\frac{65}{2}\right] - 1\right) \cdot 4$

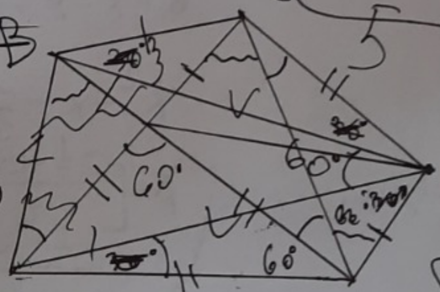
$10 \left[\frac{65}{2}\right] - 1$

2

$(65-1)^2 - (65-2) \cdot 2$

-1





$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin}{2}$

$(10-2)^2$

$(10-3)^2$

$(10-4)^2$

$\begin{array}{r} 36 \\ -11 \\ \hline 25 \end{array}$

$\begin{array}{r} 49 \\ \hline 49 \\ -13 \\ \hline 36 \end{array}$

$(65-1)^2 - 1 - (65-2) \cdot 2$

$12 - 1 \; (65-1)^2 - 1 - \cancel{(65-2)} \cdot 2$

Черновик

$(64^2 - 1 - 63\cdot 2)(64\cdot 2$

$64\cdot 64 = 4096$

$4096 - 127 = 3969$

$3969 \cdot 64 = 254016$

508032

$x^2 - 2x + 1 \,|\, x-1$

$((x+y)^2 - 2xy)(x^2+y$

$D = 16 - 4 = 12$

$\sqrt{12}$

$\dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$-2 \pm \sqrt{3}$

$a^3 + 0a^2 - 15a - 4 \,|\, a-4$

$a^3 - 4a^2 \quad a^2 + 4a + 1$

$4a^2 - 15a$

$4a^2 - 16a$

$a - 4$

$\dfrac{4}{((x+y)^2 - 2xy)}$ $\quad x^2y^2 = 5$

$x + y = A$

$xy = B$

$4 - 2B^2 + 10B + (B^2 - 2B)(5 - B^2)$

$((x+y)^2 - 2xy) + x^2y^2 = 20$

$(\sqrt{3} - 2)^3 - 15(\sqrt{3} - 2) = 4$

$\dfrac{4}{A^2 - 2B} + B^2 = 5; \quad 4 + A^2B^2 - 2B^3 = 5A^2$

$(3 + 4 - 4\sqrt{3})(\sqrt{3} - 2)$

$A^2 - 2B + B^2 = 20;$

$4 + A^2B^2 - 2B^3 = 5A^2 - 10B;$

$4 - 2B^2 + 10B = A^2(5 - B^2)$

$A^2 = \dfrac{4 - 2B^2 + 10B}{5 - B^2}$

$3\sqrt{3}$

211006111 (U327538 M1273454)