Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006103**

ID профиля: **104297**

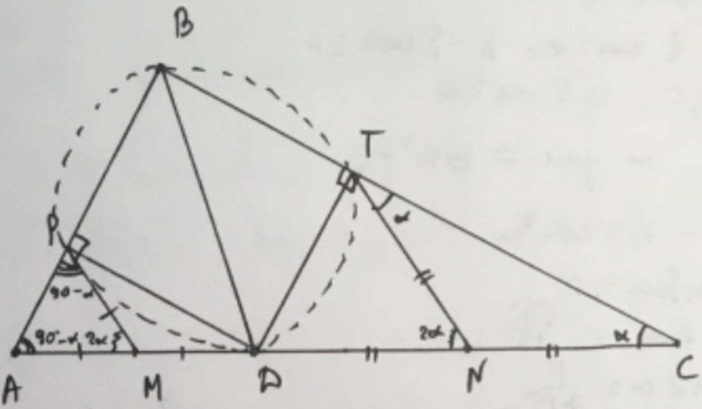
Вариант 11

Чистовик.

1. Дано:
$\triangle ABC$
т. $D \in AC$
$\omega(O; \frac{BD}{2})$
O – сер. BD
окр ω с BD – диаметр
$\omega \cap AB =$ т. P
$\omega \cap BC =$ т. T
M – сер. AD
N – сер. CD
$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ – ?
б) $MP = \frac{1}{2}$
$NT = 2$
$BD = \sqrt{3}$
$S_{\triangle ABC}$ – ?

Решение:



1) Заметим, что т. $P \in \omega$, а BD – диаметр $\Rightarrow$ $\angle DPB$ – вписанный, опир. на диаметр $\Rightarrow \angle DPB = 90°$.
Аналогично, $T \in \omega \Rightarrow \angle BTD = 90°$ как впис., опир. на диаметр $BD \Rightarrow DP \perp AB$, $DT \perp BC \Rightarrow$ $\triangle APD$ – прямоуг., т.к. $\angle APD = 90°$ и $\triangle DTC$ – прямоуг., $\angle DTC = 90°$; PM и TN – медианы пр/уг $\triangle$ к гипотенузам, т.к. M – сер. AD по усл., N – сер. CD по усл. $\Rightarrow$ $PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$, $TN = \frac{1}{2}CD = DN = NC$

2) Пусть $\angle BCA = \alpha$, тогда т.к. $\triangle TNC$ – р/б (по определ., т.к. $TN = NC$), то по св. р/б $\triangle$ $\angle NTC = \angle NCT = \alpha$; $\angle TND = \angle NTC + \angle NCT = 2\alpha$ как внешний; $TN \parallel PM$ по усл. $\Rightarrow \angle PMA = \angle TND$ как соотв. углы при $\parallel$ прямых и сек. MN; $\triangle PMA$ – р/б $\triangle$ с осн. AP, т.к. $AM = MP \Rightarrow$ по св. р/б $\triangle$ $\angle MAP = \angle MPA = \frac{180° - \angle AMP}{2} = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha \Rightarrow$ $\angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle CAB = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90° \Rightarrow \angle BAC = 90°$

3) $PM = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}AD = AM = MD \Rightarrow AD = 1$; аналогично $TN = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CD = 2NT = 2 \cdot 2 = 4$
$AC = AD + DC$, т.к. $D \in AC \Rightarrow AC = 1 + 4 = 5$.

4) В 4-ёхуг. $PBTD$ $\angle BPD = 90°$ и $\angle BTD = 90°$ и также по доказ. $\angle PBT = 90° \Rightarrow$ $PBTD$ – прямоугольник;
$BD^2 = BP^2 + PD^2$ по т. Пифагора для $\triangle BPD$
$BP = TD$ как противополож. ст. прямоуг. $\Rightarrow$
$BD^2 = PD^2 + DT^2$
По т. косинусов для $\triangle DNT$
$DN^2 + NT^2 - 2ND \cdot NT \cdot \cos\angle DNT = DT^2 \Rightarrow DT^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha$
$= 8 - 8\cos 2\alpha$

Чистовик.

По т. косинусов для △ AMP

$AM^2 + MP^2 - 2\,AM \cdot MP \cdot \cos\angle AMP = AP^2$

$\angle AMP = 180^\circ - \angle AMP = 180^\circ - 2\alpha$

$AP^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$

$AP^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$

$BD^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + 8 - 8\cos 2\alpha$

$BD^2 = 8{,}5 - 7{,}5\cos 2\alpha$

$BD = \sqrt{3}$ по усл. $\Rightarrow BD^2 = 3$

$3 = 8{,}5 - 7{,}5\cos 2\alpha$

$7{,}5\cos 2\alpha = 5{,}5$

$\cos 2\alpha = \frac{55}{75}$

$\cos 2\alpha = \frac{11}{15}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{11}{15} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{26}{15} = 2\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{13}{15}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{13}{15}}$, т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$ по опр cos остр. уг. $\Rightarrow$

$BC = \cos\alpha \cdot AC = \sqrt{\frac{13}{15}} \cdot 5$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{13}{15}} = \sqrt{\frac{2}{15}}$, т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$ по опр. sin остр. уг. $\rightarrow$

$AB = AC \cdot \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{15}} \cdot 5$.

$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC$, т.к. △ABC − прямоуг. $\Rightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{\frac{13}{15}} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{15}} = \frac{25}{2 \cdot 15} \cdot \sqrt{26} = \frac{5}{6}\sqrt{26}$

Ответ: а) 90°; б) $\frac{5}{6}\sqrt{26}$

Чистовик.

2. $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$;

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{-(x^2-x-6)} - 3$;

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{-(x-3)(x+2)} - 3$;

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+2)(3-x)} - 3$;

$$\begin{cases} x+2+3-x-2\sqrt{(3-x)(x+2)} = 4(x+2)(3-x)+9-12\sqrt{(x+2)(3-x)}; \\ x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4 = 0, \\ x \geq -2, \\ 3 \geq x, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4 = 0, \\ x \in [-2; 3], \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

Сноска. $y = \sqrt{x+2}$ – возр. ф. на пр. $[-2; +\infty)$, $y = \sqrt{3-x}$ – уб. ф. на пр. $(-\infty; 3]$, а $y = -\sqrt{3-x}$ – возр. ф. на пр. $(-\infty; 3] \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$ – возр. ф. на пр. $[-2; 3]$ как сумма двух возр. ф. $\Rightarrow$ наим. зн. имеет в наим. x, т.е. при $x = -2$; $f(-2) = \sqrt{-2+2} - \sqrt{5} = -\sqrt{5} \geq -3$, т.к. $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow -\sqrt{5} > -\sqrt{9} = -3$. $\Rightarrow$ при $x \in [-2; 3]$ условие выполняется

$$\begin{cases} 4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4 = 0 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$$

Чистовик

$4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4 = 0$

Замена: $\sqrt{(3-x)(x+2)} = t,\ t \geq 0$

$4t^2 - 10t + 4 = 0$

$\cancel{2t^2 - 5t + 2 = 0}$

$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$

$(t-2)(t-\frac{1}{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Обр. замена:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{(3-x)(x+2)} = 2 \\ \sqrt{(3-x)(x+2)} = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \\ x \in [-2;3]; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (3-x)(x+2) = 4, \\ (3-x)(x+2) = \frac{1}{4}; \end{array}\right. \\ x \in [-2;3]; \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 6 + x - x^2 = 4, \\ 6 + x - x^2 = \frac{1}{4}; \end{array}\right. \\ x \in [-2;3]; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x - \frac{23}{4} = 0; \end{array}\right. \\ x \in [-2;3]; \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+1) = 0, \\ x^2 - x - \frac{23}{4} = 0, \end{array}\right. \\ x \in [-2;3]; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{6} \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{6} \end{array}\right. \\ x \in [-2;3] \end{cases}$

$x^2 - x - \frac{23}{4} = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot \frac{23}{4} \cdot 1 = 24$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{2}$

$x = \frac{1 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{6}$

$\frac{1}{2} + \sqrt{6} \vee 3$

$\sqrt{6} \vee \frac{5}{2}$

$\cancel{\sqrt{36}}$ $\sqrt{6} \vee \sqrt{\frac{25}{4}}$

$\sqrt{6} < \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} + \sqrt{6} \in [-2;3]$

$\frac{1}{2} - \sqrt{6} \vee -2$

$\cancel{-\sqrt{6}}$ $\frac{5}{2} \vee \sqrt{6}$

$\frac{5}{2} > \sqrt{6}$ по ранее доказ. $\Rightarrow$

$\frac{1}{2} - \sqrt{6} \in [-2;3] \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x = -2}\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{6} \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{6} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{2} - \sqrt{6};\ \frac{1}{2} + \sqrt{6};\ -1;\ 2.$

3. 1) Заметим, что т. B лежит в вершине параболы с ур-ием $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0 \Rightarrow a\neq 0$, т.к. иначе мы получим $0x+0y=0$, т.е. такое ур-ие будет определять не точку, а по существу ему будет удовлетворять вся координатная плоскость.

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0\ ,\ a\neq 0$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay\ ,\ a\neq 0 \Rightarrow$

$x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a}=y$

$x_B=\frac{-b}{2a}$, где ур-ие параболы $y=ax^2+bx+c$

$x_B=\frac{-(-2a)}{2\cdot 1}=a$

$f(a)=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=\frac{4}{a} \Rightarrow$

т. $B(a;\frac{4}{a})$

2) Разберёмся теперь с т. A, решив кв. ур-ие отн. y.

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$

$4y^2+4y(2x+a)+8x^2+12ax+5a^2=0$

$D=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=4(2x+a)^2-(8x^2+12ax+5a^2)\cdot 4=$

$=4\cdot 4x^2+16ax+4a^2-32x^2-48ax-20a^2=$

$=-16a^2-32ax-16x^2=-16(a+x)^2.$

т.к. это D, то чтобы ~~тоже~~ такие y и при соотв. x существовали необходимо, чтобы $D\geq 0$, т.е.

$-16(a+x)^2\geq 0 \Rightarrow (a+x)^2\leq 0 \Rightarrow$ т.к. $(a+x)^2\geq 0$ $\forall a,x\in\mathbb{R}$, то $a+x=0 \Rightarrow x=-a$.

$y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b}{2a}$; т.к. $D=0 \Rightarrow$

$y=\frac{-4(2x+a)}{8}=-x-\frac{1}{2}a \Rightarrow$ т.к. $x=-a$, то

$y=-(-a)-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a \to$ т. $A(a;\frac{1}{2}a)$

з) Заметим, что прямая $y = 3x + 4$ или $y = 3x + 4$ делит | Чистовик

координатную плоскость на две полуплоскости, расположенные выше и ниже неё соответственно, таким образом либо т. A лежит выше, а т. B ниже, либо наоборот; $g(x) = 3x+4 \to g(a) = 3a+4$

Если при ~~соотв~~ одном x $f(x) > g(x)$, то эта точка лежит выше, если $f(x) < g(x)$, то ниже $\Rightarrow$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{1}{2}a > 3a+4, \\ \frac{4}{a} < 3a+4; \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{1}{2}a < 3a+4, \\ \frac{4}{a} > 3a+4; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} -4 > \frac{5}{2}a, \\ 3a+4-\frac{4}{a} > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} -4 < \frac{5}{2}a, \\ \frac{4}{a} - 3a - 4 > 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a < -1{,}6, \\ \frac{3a^2+4a-4}{a} > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} a > -1{,}6, \\ \frac{4-3a^2-4a}{a} > 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} a < -1{,}6, \\ a(3a^2+4a-4) > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} a > -1{,}6, \\ a(4-3a^2-4a) > 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$3a^2+4a-4=0$

$a^2+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=0$

$(a+2)(a-\frac{2}{3})=0$

$$\left[\begin{aligned} &a=-2 \\ &a=\frac{2}{3} \end{aligned}\right.$$

$4-3a^2-4a=0$

$3a^2+4a-4=0$

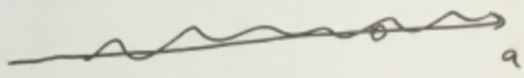
$$\left[\begin{aligned} &a=-2, \\ &a=\frac{2}{3}; \end{aligned}\right.$$

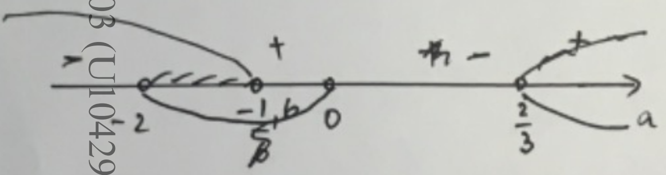
$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a < -1{,}6, \\ a(a+2)(a-\frac{2}{3}) > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} a > -1{,}6, \\ -a(a+2)(a-\frac{2}{3}) > 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} a < -1{,}6, \\ a(a-\frac{2}{3})(a+2) > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} a > -1{,}6, \\ a(a-\frac{2}{3})(a+2) < 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

Чистовик.

$a < -1,6$

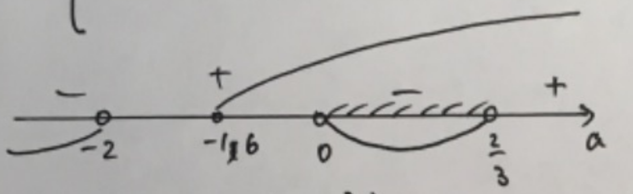
$a\left(a-\frac{2}{3}\right)(a+2) > 0;$





$a \in (-2; -1,6)$

$\begin{cases} a > -1,6 \\ a\left(a-\frac{2}{3}\right)(a+2) < 0 \end{cases}$



$a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$

$\left[\begin{array}{l} a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \\ a \in (-2; -1,6); \end{array}\right. \iff \left\{ a \in (-2; -1,6) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)\right.$

$a \in \left(-2; -\frac{8}{5}\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$

Ответ: $\left(-2; -\frac{8}{5}\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006103**

ID профиля: **104297**

Вариант 11

Чистовик.

4. $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5, \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20; \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2=a$, $a \geq 0$, т.к. $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$x^2+y^2 \geq 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$x^2y^2 = b$, $b \geq 0$, аналогично как сверху.

Сноска: $a^2 = (x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5, \\ a \geq 0,\ b \geq 0, \\ a^2 + b = 20; \\ a \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a^2 - \dfrac{4}{a} = 15; \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$a^2 - \dfrac{4}{a} = 15;$

$$\begin{cases} a^3 - 4 = 15a, \\ a \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 - 15a - 4 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Решим ур-ие $a^3-15a-4=0$, подобрав 1 корень и воспользовавшись схемой Горнера.

при $a=4$: $4^3 - 4 - 15 \cdot 4 = 64 - 4 - 60 = 0$. Верно $\Rightarrow$

	1	0	-15	-4
4	1	4	$16-15=1$	$4 \cdot 1 - 4 = 0$
	1	4	1	

$(a-4)(a^2+4a+1)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} a-4=0, \\ a^2+4a+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=4, \\ a^2+4a+1=0; \end{array}\right.$$

$a^2+4a+1=0$

$D = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = 4 - 1 = 3$

$a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{3}}{1}$

$$\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Вернёмся в предыдущ. систему:

Страница 1.

Чистовик.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 4, \\ a = -2 \pm \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Вернёмся в предыдущую систему

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right. \\ \frac{a}{4} + b = 5 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

Однако, т.к. $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$, то $-2 \pm \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 4, \\ \frac{a}{4} + b = 5, \\ a > 0, \\ b > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4. \end{cases}$$

обр. замена:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 y^2 = 4; \end{cases}$$

Отметим, что $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 4^2 = 16$

$2x^2y^2 = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow x^4 + y^4 = 8 \Rightarrow x^4 + y^4 = 2x^2y^2 = 8 \Rightarrow$

$(x^2 - y^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2, \\ 2x^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}, \\ x^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y|, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \pm|x|, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}; \\ y = -\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{array}\right.$$

Ответ $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Чистовик.

5\. 1) Сначала рассмотрим случай, когда одна из точек лежит на одной из двух диагоналей, а другая нет, а потом рассмотрим случай, когда ~~обе~~ обе точки лежат на ~~одной~~ диагоналях квадрата, коими являются прямые $y=x$ и $y=65-x$, тогда общее кол-во способов будет суммой этих двух величин

2) Т.к. мы выбираем точки в узлах, то ~~∄ эта точка~~ $\forall$ такая точка имеет $\mathbb{N}$ координаты, т.к. весь квадрат расположен в I полуплоскости и $x\neq 0, y$ не может иметь $x=0, y=0$, $x=65$ или $y=65$, т.к. это и точки, у которой хотя бы одна из координат такая лежат на прямой, содержащей границу квадрата. $\Rightarrow \forall$ т. A внутри имеет вид

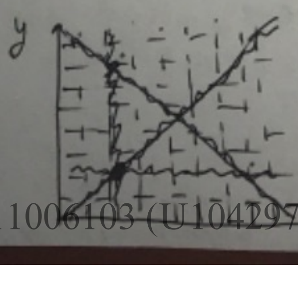
~~т. $A(x;y)$; x, y~~ $\{$т. $A \mid (x;y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ 0<x, y<65\}$

Найдём кол-во таких точек на диагоналях. У каждой из диагоналей таких точек равно 64, т.к. от 1 до 64 — 64 натур. ч. При этом общих точек с натуральными координатами у них нет, т.к. тогда $x=65-x$; $2x=65$; $x=\frac{65}{2}\in \mathbb{Q}$, но $\notin \mathbb{N} \Rightarrow$ не удовлетворяют условию.

Всего точек на диаг. $64+64=128$.

3) При этом выбор одной из 128 этих точек не позволяет выбрать в пару к ней ещё 63 клетки по гор. и 63 кл. по вертикали, т.е. вычёркивает $63+63=126$ кл, также вычтем клетки на диагоналях. Так, на диагонали, на которой отмечена эта клетка мы не можем выбрать ещё 63 кл. (всего 64; -1 сама эта клетка, а гор. и вертикали пересекают её ровно по ней самой), а на другой диагонали мы не можем выбрать так ещё 62 клетки (всего 64; -2 клетки от пересечения с диаг. и с вертик.) $\to$ всего мы вычеркнули

$63+63+63+62 = 64\cdot 4-3-2 = 256-5 = 251$ кл. $=2^8-5$



Всего клеток, удовлетворяющих всем условиям про координаты $64\cdot 64 = 2^6\cdot 2^6 = 2^{10}\cdot 2^2 = 4096 = 2^{12}$

~~$4096-251$~~ $= 2^{12}-2^8+5 = 2^8\cdot(2^4-1)+5=$

Чистовик.

$= 256 \cdot 15 + 5 = 2^8 \cdot 5 \cdot 3 + 5 = 5(2^8 \cdot 3 + 1)$

Умножим это на кол-во диаг клеток, равное 128 и 2^7

получим $2^7 \cdot 5 \cdot (2^8 \cdot 3 + 1) = 2^{15} \cdot 15 + 5 \cdot 2^7$ – это число вариантов для случая, когда одна из клеток на диагонали, а другая нет. Теперь посчитаем кол-во способ, если обе на диагоналях.

~~Если они на одной диагонали, то способов выбрать 2 клетки на одной из двух диагоналей – это $C_2^1 \cdot C_{64}^2 =$~~

~~$= 2 \cdot \frac{64!}{63! \cdot 2!} = 2 \cdot 63 = C_2^1 \cdot C_{64}^2 = 2 \cdot \frac{64!}{62! \cdot 2!} =$~~

~~$= 64 \cdot 63 = 2^6(2^6 - 1) = 2^{12} - 2^6.$~~

~~Если они на разных диагоналях вариантов разместить одну из клеток на первой диагонали 64, а на второй 62, т.к. из всего 64 и –2 клетки от пересечения с диаг. горизонт. и вертикально идём $64 \cdot 62 = 2^6(2^6 - 2) = 2^{12} - 2^7 \Rightarrow$~~

~~Всего вариантов, когда обе клетки на диаг.~~

~~$2^{12} - 2^6 + 2^{12} - 2^7 = 2^{13} - 2^7 - 2^6 \Rightarrow$ Всего~~

способов

Способов выбрать первую клетку C_{128}^1, а вторую $C_{(128-1-2)}^1 = C_{125}^1$, т.к. одна из 128 кл. занята, а ещё 2 вычеркнуты для горизонтально и вертикально, проходящими через выбранную клетку, однако т.к. данное число учитывает порядок выбора обеих клеток, а они одинаковые, то все вариантов учтены 2 раза $\Rightarrow$ всего $C_{128}^1 \cdot C_{125}^1 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 128 \cdot 125 \cdot \frac{1}{2} = 2^6 \cdot 5^3 \Rightarrow$ Всего

$2^{15} \cdot 15 + 5 \cdot 2^7 + 2^6 \cdot 5^3 = 5(2^{15} \cdot 3 + 2^7 + 2^6 \cdot 5^2) =$

$= 5(2^5 \cdot 2^{10} \cdot 3 + 128 + 2^4 \cdot 10^2) =$

$= 5(32 \cdot 1024 \cdot 3 + 128 + 1600) = 5(32768 + 128 + 1600) =$

$= 5(32896 + 1600) = 16.448 \cdot 10 + 8000 =$

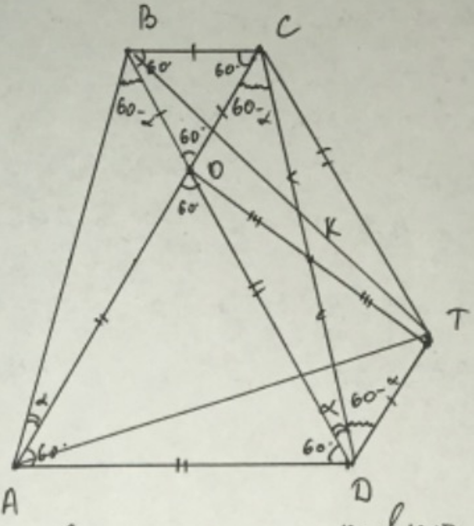
$= 164.480 + 8000 = 172.480.$

Ответ: 172.480 способов.

6. Дано:
ABCD – выпукл. 4-ёх уг.
AC ∩ BD = т. O
△BOC и △AOD – правильн.
T – симметрична т. O отн. сер. CD

а) Д-ть △ABT – правильн.
б) BC = 2
AD = 5
$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$?

Решение: Чистовик



1) т.к. △BOC – правильный, то все его углы равны по 60°; аналогично в △AOD все углы равны по 60° ⇒ ∠BCO = ∠AOD = 60° ⇒ BC ∥ AD, т.к. равны н/л углы при ∥ прямых и сек. AC.

2) ∠AOB = 180° − ∠BOC как смежный, ∠BOC = 60° как угол прав. △ ⇒
∠AOB = 180° − 60° = 120°
∠COD = ∠AOB = 120° как вертикальный
△AOB = △DOC по I пр. △ = △ BO = CO как ст. прав. △BOC
AO = DO как ст. прав. △AOD, ∠AOB = ∠COD = 120° как вертикальн. ⇒ т.к. в равных △ против равных ст. лежат равные углы, то ∠BAO = ∠CDO = α, ∠ABO = ∠DCO = 180° − ∠AOB − α = ~~120~~ 180° − 120° − α = 60° − α

3) Пусть K – сер. CD; т.к. T – симметрична т. O отн. т. K, то OK = KT ⇒ OCTD – параллелогр., т.к. в нём диагонали пересекаются в точке, которая делит их пополам OK = KT из симметрии CK = KD по усл. ⇒ OD = CT; DT = CO как противополож. ст. параллелогр. OCTD – параллелогр ⇒ OC ∥ DT, OD ∥ CT как противополож. ст. параллелогр. ⇒ ∠OCD = ~~∠TCD~~ = ∠TDC как н/л углы при OC ∥ TD и сек. CD; ∠ODT = ∠ODC + ∠TDC = α + 60° − α = 60°, ∠OCT = ∠ODT = 60° как противополож. углы параллелогр.

4) △BCT = △TDA по I пр. △ = △. TD = OC = BC из параллелогр. и прав. △ и AO = OD = CT аналогично; ∠BCT = ∠BCO + ∠OCT = 60° + 60° = 120° = ∠ADO + ∠ODT = ∠ADT ⇒ AT = BT ⇒ ∠CTB = ∠DAT, т.к. в равных △ против равных ст., лежат равные углы ⇒
∠BTA = ∠CTD − ∠CTB − ∠ATD 3 ∠CTD = ∠DOC = 120° из параллел

Страница 4/5.

трапеции OCTD; $\angle CTB = \angle DAT$ по ранее доказ. => Итак, вычисл.

$\angle BTA = 120^\circ - \angle DAT - \angle ATD = 120^\circ - (\angle DAT + \angle ATD)$

$\angle DAT + \angle ATD = 180^\circ - \angle ADT = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ из $\triangle ADT$

$\angle BTA = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ATB$ - р/б $\triangle$ с осн. AB и углом $\angle ATB = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle BAT = \angle ABT = \dfrac{180^\circ - \angle ATB}{2} = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ATB$ - р/ст $\triangle$, т.е.

$\triangle ATB$ - правильный, ч.т.д.

5) $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \angle BCA$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \angle \cancel{BCA}\ CAD$.

$AC = AO + OC = AD + BC$ из р/ст $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ =>

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(AD + BC)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2+5)^2 =$$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{4}.$$

Найдём ст. $\triangle ABT$.

По т. косинусов для $\triangle BCT$

$BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos \angle BCT = BT^2$

$CT = OD = AD$ по ранее доказ.; $\angle BCT = 120^\circ$ по ранее доказ. =>

$BC^2 + AD^2 - 2\,BC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = BT^2$

$BC^2 + AD^2 + 2\,BC \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = BT^2$

$BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD = BT^2$

$4 + 25 + 2 \cdot 5 = BT^2$

$BT^2 = 39$

$BT = \sqrt{39}$

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} BT \cdot TA \cdot \sin \angle ATA = \frac{1}{2} \cdot BT^2 \cdot \sin 60^\circ = 39 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$$

Ответ: $\frac{39}{49}$

XXXIX Турнир имени М. В. Ломоносова
25 сентября 2016 года

Бланк для выполнения заданий № 18863035-35-23973794

$24 \cdot 32 = 24 \cdot 30 + 2 \cdot 24 = 720 + 48 = 768$

$+128$

896

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой,
не пишите за пределами рамки и на обороте,
не мните листы и не складывайте их пополам.

Черновик.

5. $896 \,|\, 2$; 1644 ; -32 ; 12 ; -12 ; 08

$C_{128}^1 \cdot C_{125}^1 =$

$= 2^7 \cdot (2^7 - 3) =$

$= 2^{14} - 3 \cdot 2^7$

128

$2^7 (2^{12} - 63 - 63 - 63 - 62)$

$= 2^7 (2^{12} - 4 \cdot 2^6 + 5) =$

$= 2^7 \cdot (2^{12} - 2^8 + 5) =$

$= 2^7 \cdot 2^8 (16 - 1) + 5 \cdot 2^7 =$

$2^6 (128 - 2 - 1)$ $\quad = 2^{15} \cdot 15 + 5 \cdot 2^7$

карточка номер лист из (включая титульный лист)

211006103 (U104297 M1276049)

Место для скрепки

211006103 (U104297 M1276049)

XXXIX Турнир имени М. В. Ломоносова
25 сентября 2016 года

Бланк для выполнения заданий № 18863035-35-23973794

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой,
не пишите за пределами рамки и на обороте,
не мните листы и не складывайте их пополам.

Черновик.

4. $\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = \cancel{8}\ 20 \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2=a,\ a\geq 0$

$x^2y^2=b,\ b\geq 0$

$a^2 \geq x^4+y^4+2x^2y^2 \geq 4b.$

$a^2\geq 4b$

$\begin{cases} \frac{4}{a}+b=5 \\ a^2+b=20. \end{cases}$

$a^2-\frac{4}{a}=15$

$\frac{a^3-4}{a}=15$

$a^3-15a-4=0$

a	1	0	−15	−4
4	1	4	1	0

$64-60-4..$

Обр. замена:

$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$(a-4)(a^2+\cancel{2}4a+1)=0$

$\cancel{a}\quad a^2+4a+1=0$

$\begin{cases} \frac{4}{4}+x^2y^2=5 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$D=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=4-1=3$

$a=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{1}$

$a\geq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x^2y^2=4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$a=4.$

$|x|=|y|$

$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2=16$

$\left[x^2=2 \right.$

$y=\pm|x|$

$y=\pm\sqrt{2}$

$x^4+y^4\geq 2x^2y^2$

$\left[|x|=|y| \right.$

$(x^2-y^2)=0$

$\left[x^2=y^2 \right.$

$\left[\begin{matrix} x=\pm\sqrt{2} \\ |x|=|y| \end{matrix} \right.$

$(-\sqrt{2};-\sqrt{2});\ (-\sqrt{2};\sqrt{2});\ (\sqrt{2};-\sqrt{2});\ (\sqrt{2};\sqrt{2})$

карточка номер

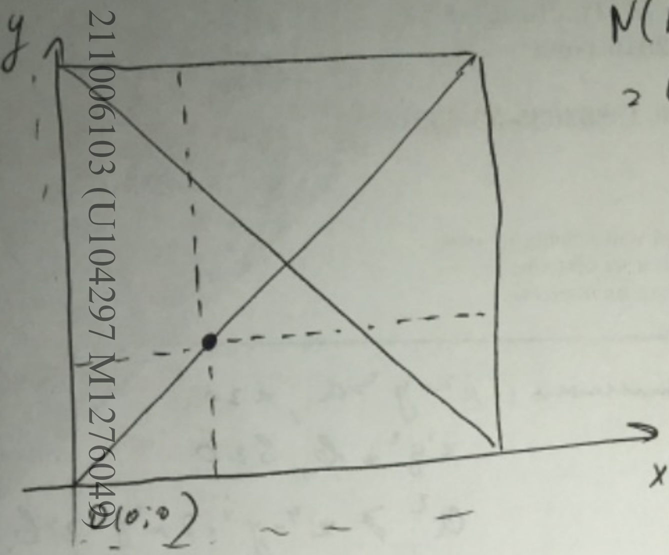
лист из

(вкладыш/титульный лист)

Черновик.

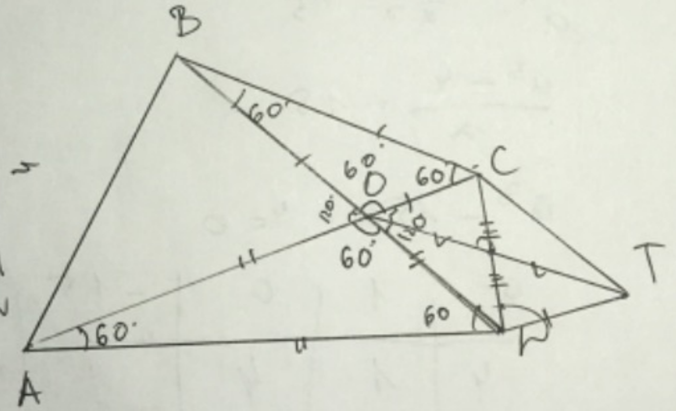
$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)=$

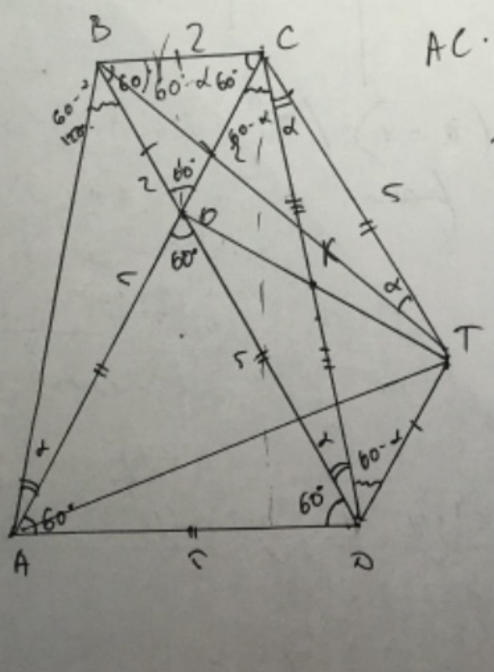
$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)=\cancel{65}+\cancel{65}-1=129-2=127$
$\quad 64 \quad 64$



$\frac{4\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{2\cdot5\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=$

$=\frac{49\sqrt{3}+20\sqrt{3}}{4}.$





$AC\cdot\sin 60^\circ=(2+5)\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{2}\cdot\sin 30^\circ=$

$=7\cdot\sin 60^\circ$

$=\frac{49\sqrt{3}}{4}.$

$BT^2=BC^2+CT^2-2BC\cdot CT\cdot\cos 120^\circ=$

$=BC^2+CT^2+BC\cdot CT=$

$=4+25+2\cdot5=49$

$BT=7.$

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{4}.$