Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006053**

ID профиля: **354164**

Вариант 11

№2.

ОДЗ:
$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \\ (3-x)(x+2) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leq 3 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$$

$x \in [-2; 3]$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(3-x)(x+2)} - 3$$

$$x+2 - 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + 3 - x = 4(3-x)(x+2) - 12\sqrt{(3-x)(x+2)} + 9$$

$$4(3-x)(x+2) - 10\sqrt{(3-x)(x+2)} + 4 = 0$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{(3-x)(x+2)} \\ 2a^2 - 5a + 2 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D} = 25 - 16 = 9$

$a_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$

$a_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ (3-x)(x+2) = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (3-x)(x+2) = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -x^2 + x + 6 - 4 = 0 \\ -x^2 + x + 6 - \frac{1}{4} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x - \frac{23}{4} = 0 \end{array}\right.$$

$\mathcal{D} = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

$x_2 = 2$

Проверка: $x = -1$: $\sqrt{-1+2} - \sqrt{3-(-1)} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6-1-(-1)^2}$

$1 - 2 + 3 \overset{?}{=} 2 \cdot 2$ $\quad 2 \overset{?}{=} 4$ —

$B(a; \frac{4}{a})$

$$\left[\begin{array}{l} a \in (0; \frac{2}{3}) \\ a \in (-2; -1{,}6) \end{array}\right. \Rightarrow a \in (-2; -1{,}6) \cup (0; \frac{2}{3})$$

и берём эти 2 случая

Ответ: $a \in (-2; -1{,}6) \cup (0; \frac{2}{3})$;

$$\begin{cases} a \in (0; \frac{2}{3}) \\ a \in (-2; -1 \end{cases}$$

$x = 2$

$\sqrt{2+2} - \sqrt{3-2} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6+2-4}$

Проверка; $x = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$

$$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6 + \frac{1}{2} - \sqrt{6} - \frac{1}{4} + \sqrt{6} - 6}$$

$$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}} \overset{?}{=} -2$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} \overset{?}{=} -2\sqrt{2}$$

$$5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} - 2\cdot\sqrt{25-24} \overset{?}{=} 8$$

$$10 - 2 \overset{?}{=} 8$$

$+$

Ответ; $x = 2; \frac{1}{2} - \sqrt{6};$

$B(a; \frac{4}{a})$

$A(a; \frac{a}{2})$

$y = 3x + 4$

если точки ~~т.~~ A и B расположены по разные стороны от прямой $y = 3x + 4$, то ~~они~~ одна из них принадлежит ~~т~~ либо промежутку $y > 3x + 4$, а другая $y < 3x + 4$, либо ~~т.~~ $y < 3x + 4$, а другая $y > 3x + 4$;

Рассмотрим случай, когда $A \in (y < 3x + 4)$, а $B \in (y > 3x + 4)$,

тогда $\begin{cases} \frac{a}{2} < 3a + 4 \\ \frac{4}{a} > 3a + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2,5a + 4 > 0 \\ \frac{3a^2 + 4a - 4}{a} < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a > -1,6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (\cancel{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}; +\infty) \\ a < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-2; \frac{2}{3}) \\ a > 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} a > -1,6 \\ \left[\begin{array}{l} a \in (-\infty; -2) \\ a \in (0; \frac{2}{3}) \end{array} \right. \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (0; \frac{2}{3})$$

Рассмотрим 2 случай, когда $A \in (y > 3x + 4)$, а $B \in (y < 3x + 4)$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} > 3a + 4 \\ \frac{4}{a} < 3a + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1,6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; +\infty) \\ a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (-2; \frac{2}{3}) \\ a < 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1,6 \\ \left[\begin{array}{l} a \in (\frac{2}{3}; +\infty) \\ a \in (-2; 0) \end{array} \right. \end{cases} \Bigg| \Rightarrow a \in (-2; -1,$$

$(0; \frac{2}{3})$

$(-2; -1$

4.

$x = 2$

$\sqrt{2+2} - \sqrt{3-2} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6+2-4}$

$2 - 1 + 3 \overset{?}{=} 2 \cdot 2$

$4 \overset{?}{=} 4 \quad +$

$x = 2$ – корень ур.

$x^2 - x - \frac{23}{4} = 0$

$D = 1 + 23 = 24$

$x_3 = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{6}$

$x_4 = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{6}$

Проверка: $x = \frac{1}{2} + \sqrt{6}$

$\sqrt{\frac{4 + 1 + 2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{\cancel{6} - 1 - 2\sqrt{6}}{2}} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6 + (\frac{1}{2} + \sqrt{6}) - (\frac{1}{2} + \sqrt{6})^2}$

$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{6 + \frac{1}{2} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \frac{1}{4} - 6}$

$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}} \overset{?}{=} -2$

$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}} \overset{?}{<} \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}} \qquad 2,5 + \sqrt{6} \overset{?}{<} 2,5 - \sqrt{6}$

$\sqrt{6} \overset{?}{<} -\sqrt{6} \quad - \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}} > 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} + \sqrt{6}$

№3.

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$ — парабола

$ay = a^3 - 2a^2x + ax^2 + 4 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a} \ (a \neq 0)$

$y = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{4}{a}$

$y = (x-a)^2 + \frac{4}{a}$

В:

$y_0 = \frac{4}{a}$

$x_0 = a$

$5a^2 + 12ax + 8x^2 + 8xy + 4y^2 + 4ay = 0$

$8x^2 + x(12a + 8y) + 5a^2 + 4ay + 4y^2 = 0$

$D = (12a + 8y)^2 - 4 \cdot 8(5a^2 + 4ay + 4y^2) =$

$= 144a^2 + 192ay + 64y^2 - 32(5a^2 + 4ay + 4y^2) =$

$\times \begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ \hline 96 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 96 \\ 2 \\ \hline 192 \end{array}$

$= 16(9a^2 + 12ay + 4y^2 - 10a^2 - 8ay - 8y^2) =$

144 $= 16(-a^2 + 4ay - 4y^2) = -16(a - 2y)^2$

$D \geq 0$, чтобы ур. имело корни =>

$\Rightarrow -16(a - 2y)^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2y = 0$

$y = \frac{a}{2}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{12a + 8y}{16} = -\dfrac{3a + 2y}{4} \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

$4x = -3a - a$

$x = a$

A; $x = a$; $y = \frac{a}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006053**

ID профиля: **354164**

Вариант 11

Лист №1 №4. Лисковик

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0$; $y \neq 0$;

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a$ и $x^2y^2 = b$, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 20 - a^2 \\ \dfrac{4}{a} + 20 - a^2 = 5 \end{cases}$$

$\dfrac{4}{a} + 20 - a^2 = 5$ / т.к. $a \neq 0$ (по ОДЗ), то домножаем на $(-a)$

$a^3 - 20a - 4 + 5a = 0$

$a^3 - 15a - 4 = 0$

$a = 4$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 15a - 4 & a - 4 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3 - 4a^2} & a^2 + 4a + 1 \\ 4a^2 - 15a & \\ -\underline{4a^2 - 16a} & \\ a - 4 & \\ -\underline{a - 4} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a-4)(a^2+4a+1) = 0$

$a = 4$ или $a^2 + 4a + 1 = 0$

$D = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$a_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3}$

$a_2 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$

Лист №2 чистовик

т.к. $a = x^2+y^2$, то $a > 0$, по ОДЗ $a \neq 0$, тогда:

$a \neq -2+\sqrt{3}$ и $a \neq -2-\sqrt{3}$, т.к.

а $-2-\sqrt{3} < 0$, а $\sqrt{3} < \sqrt{4}$

$\sqrt{3} < 2$

$-2+\sqrt{3} < 0$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 20 - a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = x^2+y^2 \\ b = x^2y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ 4x^2 - x^4 = 4 \end{cases}$

$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

$(x^2-2)^2 = 0$

$x^2 = 2$

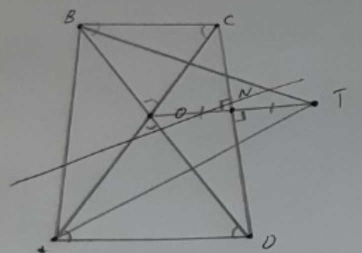
$x = \pm\sqrt{2}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

т.к. в системе все y-и и x-ы в квадрате, то нам не важен знак у $\sqrt{2}$ => мы можем проверить только 1 пару

$\begin{cases} \frac{4}{2+2} + 2\cdot 2 \overset{?}{=} 5 \\ 4+4+3\cdot 2\cdot 2 \overset{?}{=} 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+4 \overset{?}{=} 5 \\ 8+12 \overset{?}{=} 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 5 = 5 \\ 20 = 20 \end{cases}$ +

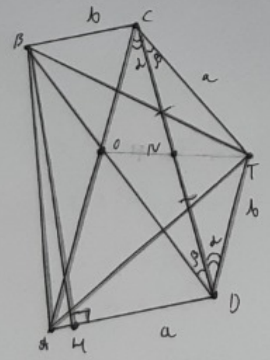
Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$;



№ 6.

лист №3

черновик



Дано: $ABCD$ - выпуклый 4-∠;
$AC \cap BD = O$; $\triangle AOD$ и $\triangle BCO$ - правильные; т. T расположена симметрично O отн. N, где $N \in CD$ и $CN = ND$;
б) $BC = 2$; $AD = 5$;

Док-ть: $\triangle BTA$ - пр.;

Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$;

Док-во

1) $\triangle OBC$ - пр. => $\angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60°$ (св. пр. Δ)

2) $\triangle AOD$ - пр. => $\angle OAD = \angle ADO = \angle AOB = 60°$ (св. пр. Δ)

3) из п-в 1 и 2 следует, что $\angle BCA = \angle$ ~~AD~~ $CAD = 60°$,
т.к. AC - диагональ $ABCD$, то A, O, C - лежат на 1 пр. => AC - сек. у 11-х пр-х BC и AB, которые 11-ы (по признак. 11 пр. (Н У)) =>
=> т.к. $AD > BC$ ~~или $BC > AD$~~, то $ABCD$ - трап. (поопр.)

Лист №5 и

чистовик

4) т.к. O и T - симметричны отн. N, то $\triangle CDT = \triangle DOC$ (в силу симметрии) =>

=> $DT = OC$ и $CT = OD$ (из рав-ва $\triangle$)

5) Пусть $\angle OCD = \alpha$, и тогда $\angle ODC = \beta$

6) $\angle OCD + \angle CDO + \angle DOC = 180°$ (сумма $\angle$ $\triangle DOC$)

7) $\angle COD = 120°$ (св. см. $\angle$-в) ($\angle COD$ и $\angle AOB$) =>

=> $\alpha + \beta = 60°$

8) $\angle ODC = \angle TCD = \beta$ и $\angle OCD = \angle CDT = \alpha$ (из р-ва $\triangle$-в)

9) $\angle ADT = 60° + \alpha + \beta = 120°$

10) $\angle BCT = 60° + \alpha + \beta = 120°$

11) Пусть сторона пр-го $\triangle BCO = b$, а $\triangle ADO = a$

12) $BC = b = DT$ (опр. пр. $\triangle$-а); $CT = AD = a$ (опр. пр. $\triangle$-а); $\angle BCT = \angle ADT = 120°$ =>

=> $\triangle ADT = \triangle BCT$ (по 2 ст. и $\angle$ между ними) =>

=> $AT = BT$

13) $AD = OA = a$; $DT = OB = b$; $\angle ADT = 120° = \angle AOB$ (св. верт. $\angle$-в сод и вод) =>

=> $\triangle ADT = \triangle AOB$ (по 2 ст. и $\angle$ между ними) =>

=> $AT = AB$ => $AT = AB = BT$ =>

=> $\triangle ATB$ - пр. (по опр.) ч.т.д.

Решение: лист №4 5 черновик

14) т.к. ~~...~~ $\triangle BOA = \triangle COD$ (по 2 ст. и с между ними), то

$CD = AB \Rightarrow ABCD$ - р/б трап. (по опр.)

15) $AD = OD = 5$ (опр. тр. Δ)

16) $OC = BC = 2$ (опр. тр. Δ) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos\angle COD$ (т. cos-ов)

$CD = \sqrt{4+25+2\cdot 5} = \sqrt{39} = AB$

$39 \times 4 = 156$

17) Д.п. $BH \cap AD = H$; $BH \perp AD$;

18) $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{3}{2}$ (св. р/б трап.)

19) $AB^2 = BH^2 + AH^2$ (т. П.) ($\triangle ABH$ - прямоуг. (по опр.))

$BH = \sqrt{39 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{156-9}{4}} = \frac{\sqrt{147}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

20) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{7}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

21) $S_{\triangle ABT} = \sqrt{p_{ABT}(p_{ABT} - BT)(p_{ABT} - TA)(p_{ABT} - AB)}$ (ф. Герона)

p_{ABT} - полупериметр $\triangle ABT$ ($p_{ABT} = \frac{3}{2}\sqrt{39}$), т.к. $AB = BT = AT = \sqrt{39}$

$S_{\triangle ABT} = \sqrt{\frac{3\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2}} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

22) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$;

211006053 (U354164 M1274821)

$\Rightarrow$ т.к. $AD > BC$ ~~или $BC > AD$~~, то $ABCD$

черновик

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2+\sqrt{3} \\ b = 13+4\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2-\sqrt{3} \\ b = 13-4\sqrt{3} \end{cases}\end{array}\right.$$

$b = 20-(-2+\sqrt{3})^2 =$

$= 20 - (4-4\sqrt{3}+3) =$

$= 13+4\sqrt{3}$

$b = 20-(2+\sqrt{3})^2 =$

$= 20-7-4\sqrt{3} = 13-4\sqrt{3}$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

при $a = -2+\sqrt{3}$ $a<0$, т.к. $\sqrt{3}<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2+\sqrt{3}<0$,

но $a = x^2+y^2$, то есть $a>0$,

$a \neq 0$, по ОДЗ $\Rightarrow a \neq -2+\sqrt{3}$,

аналогично $a \neq -2-\sqrt{3}$,

тогда $a=4$ и $b=4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=4-x^2 \\ 4x^2-x^4=4 \end{cases}$$

$x^4-4x^2+4=0$

$(x^2-2)^2=0$

$$\cancel{\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}\end{array}\right.$$

Проверка

$$\cancel{\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \frac{4}{4+0}}$$

т.к. все y и x в системе в квадрате, то нам не важен знак y или $x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужно проверить только 1 пару

$$\begin{cases} \dfrac{4}{2+2} + 2\cdot 2 \overset{?}{=} 5 \\ 4+4+3\cdot 2\cdot 2 \overset{?}{=} 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5=5 \\ 20=20 \end{cases} +$$

Ответ:

черновик

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 20$$

$$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20$$

ОДЗ: ~~$x \neq 0,\ y \neq 0,$~~

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2) = a \\ x^2y^2 = b \\ \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + ab - 5a = 0 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$$b = 20 - a^2$$

$$4 + 20a - a^3 - 5a = 0$$

$$a^3 - 15a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

$$64 - 60 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 15a - 4 & a - 4 \\ \underline{-\ a^3 - 4a^2} & \overline{a^2 + 4a + 1} \\ 4a^2 - 15a & \\ \underline{-\ 4a^2 - 16a} & \\ a - 4 & \\ \underline{-\ a - 4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(a-4)(a^2+4a+1) = 0$$

$$(a-4)(a-(-2+\sqrt{3}))(a-(-2-\sqrt{3})) = 0$$

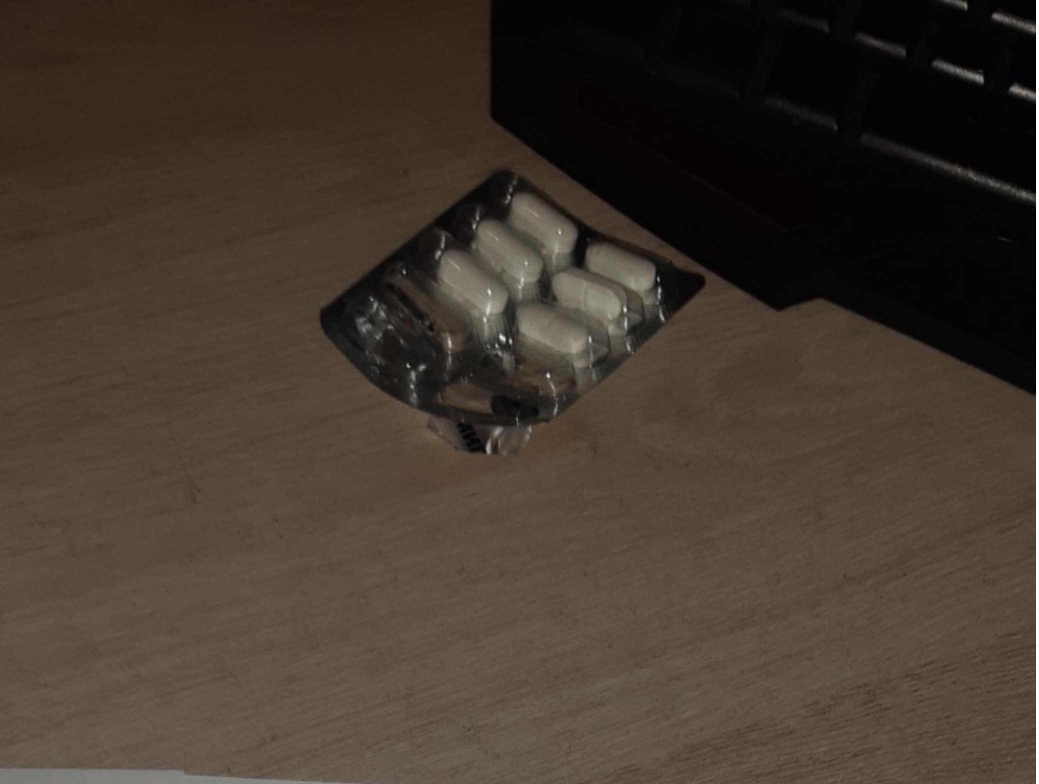
$$(a-4)(a+2-\sqrt{3})(a+2+\sqrt{3}) = 0$$

$$a^2 + 4a + 1 = 0 \quad \cancel{a}$$

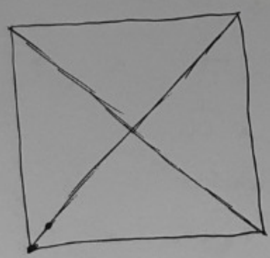
$$D = 16 - 4 = 12$$

$$a_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}$$

$$a_2 = -2-\sqrt{3}$$



черновик



$6\overset{3}{\cancel{4}}\times6\overset{3}{\cancel{4}}$

63×63

$62^2\ \cancel{6.}$

62^2-63