Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006037**

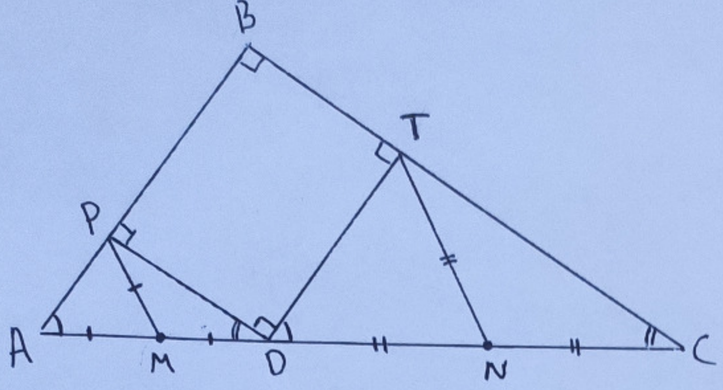
ID профиля: **369943**

Вариант 11

Чистовик

Математика 10 класс

N1



а) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ т.к. опираются на диаметр $BD \Rightarrow$ $\triangle APD$, $\triangle DTC$ - прямоуг $\Rightarrow PM = AM = MD$, $TN = DN = NC$ ~~так~~ поскольку PM, TN - медианы, проведённые из прямого угла. Поскольку $PM \parallel TN$, то $\angle TND = 180^\circ - \angle PMD$. $\angle PDM = \frac{180^\circ - \angle PMD}{2} = 90^\circ - \frac{\angle PMD}{2}$

$\angle TDN = \frac{180^\circ - \angle TND}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle PMD)}{2} = \frac{\angle PMD}{2}$. $\angle PDT = 180^\circ - \angle PDM - \angle TDN =$

$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle PMD}{2}\right) - \frac{\angle PMD}{2} = 90^\circ$. $BTDP$ - впис $\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle PDT = 90^\circ$

б) $\angle BCA = 90^\circ - \angle BAC$; $\angle TDC = 90^\circ -$ ~~[illegible]~~ $\angle BCA = \angle BAC \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ по 2-м углам $K = \frac{AD}{DC} = \frac{2PM}{2TN} = \frac{PM}{TN} = \frac{1}{4} \Rightarrow TC = 4PD$; $BT = 4AP$

$PT = BD = \sqrt{3}$ как диаг. прямоуг. $\triangle PDT$: $PD^2 + DT^2 = PT^2 = 3$; $DT = 4AP$

$PD^2 + 16AP^2 = 3$; $PD^2 + AP^2 + 15AP^2 = 3$; $AD^2 + 15AP^2 = 3$; $(2PM)^2 + 15AP^2 = 3$;

$15AP^2 = 2$; $AP = \sqrt{\frac{2}{15}}$; $DT = 4AP = 4\sqrt{\frac{2}{15}}$; $\triangle APD$: $PD = \sqrt{1 - AP^2} = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$TC = 4PD = 4\sqrt{\frac{13}{15}}$; $AB = AP + PB = AP + DT = 5\sqrt{\frac{2}{15}}$; $BC = BT + TC = PD + TC = 5\sqrt{\frac{13}{15}}$

$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{\frac{2}{15}} \cdot 5\sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{1}{15} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

Ответ: а) 90°

б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

Чистовик

N2

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$. Пусть $\sqrt{x+2} = a \geq 0$, $\sqrt{3-x} = b \geq 0$

Имеем: $+\begin{cases} a-b+3 = 2ab \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-2ab+a-b-2=0$; $(a-b)^2+(a-b)-2=0$

$(a-b-1)(a-b+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b+1 \quad (1) \\ a=b-2 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}+1 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}+3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)} \end{cases} \Rightarrow \cancel{\sqrt{3-x}}+1-\cancel{\sqrt{3-x}}+3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$;

$\sqrt{6+x-x^2} = 2 \Rightarrow 6+x-x^2=4$; $x^2-x-2=0$; $x_1 = 2$ ✓ $x_2=-1$ ⊗

Подставим полученные корни в исходное ур-е, $x=2$ подходит

(2) $\begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}-2 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}+3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)} \end{cases}$ $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3-x-4\sqrt{3-x}+4 \\ x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ \sqrt{3-x}-2 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4\sqrt{3-x} = -2x+5 \\ x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{3-x} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16(3-x) = 4x^2-20x+25 \\ 5-2x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ 3-x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x-23=0 \\ x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+2\sqrt{6}}{2} \text{ - п.к.} \\ x = \frac{1-2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. \\ x \in [-2;-1] \end{cases}$ Подставим $x = \frac{1-2\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}-\sqrt{6}$ в исходное ур-е

$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{6}+2} - \sqrt{3-\frac{1}{2}+\sqrt{6}}+3 = 2\sqrt{\cancel{6}+\frac{1}{2}-\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{6}+\cancel{\sqrt{6}}+\frac{1}{4}}$

$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}+3 = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}+3 = 2\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}$; $\cancel{\frac{5}{2}}-\sqrt{6}+6\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}+9 =$

$= 3+4\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right)}+\cancel{\frac{5}{2}}+\sqrt{6}$; $6\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{6}}+6 = 4\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right)}+2\sqrt{6} = \sqrt{30+16\sqrt{6}}+2\sqrt{6}$

$6\left(\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{6}}+1\right) = \sqrt{30+16\sqrt{6}}+2\sqrt{6}$ ~~ш~~; $36\left(\frac{5}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{6}}+1\right) = 30+16\sqrt{6}+4\sqrt{30\sqrt{6}+96}+$

$+24$; $90\sqrt{6}+\sqrt{10\sqrt{6}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006037**

ID профиля: **369943**

Вариант 11

Чистовик

<u>N4</u>

пусть $x^2 = a \geq 0$, $y^2 = b \geq 0$. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{4}{a+b} + ab = 5 \\ a^2 + b^2 + 3ab = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4}{a+b} + ab = 5 & (1) \\ (a+b)^2 + ab = 20 & (2) \end{cases}$$

Если $a+b < 4$, то $(a+b)^2 < 16$, тогда из (2) следует, что $ab > 4$ по нер-ву о средних $a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2+b^2+3ab \geq 5ab > 5 \cdot 4 = 20$, но по условию $a^2+b^2+3ab = 20$ - противоречие, значит $a+b \geq 4$

Если $a+b > 4$, то $\frac{4}{a+b} < 1$, тогда из (1) следует, что $ab > 4$, чего как мы выяснили быть не может

Значит $a+b = 4$ тогда из (1) $ab = 4$

По нер-ву о средних $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, причём равенство достигается, когда $a = b$, т.е. $a = b = 2$, $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ сделаем проверку

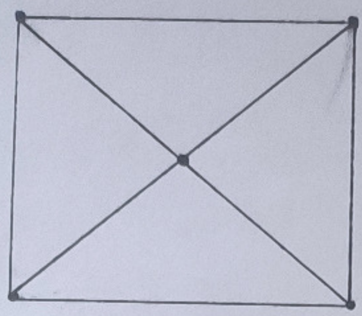
$$\frac{4}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 5$$

$$(\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 20$$

Ответ: $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Чистовик

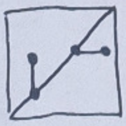
№5



Прямые $y=x$, $y=65-x$ – диагонали квадрата. Суммарно на диагоналях лежит $2\cdot 63-1=125$ узлов сетки

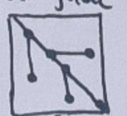
① Посчитаем кол-во способов выбрать два узла, так чтобы хотя бы один лежал на диагонали квадрата. Искомое число способов равно разности числа способов выбрать любую пару узлов – $C^2_{63^2}$ и числа способов выбрать пару узлов, так чтобы ни один из них не лежал на диагонали – $C^2_{63^2-125}$, т.е $C^2_{63^2}-C^2_{63^2-125}$

② Посчитаем кол-во способов выбрать два узла, так чтобы хотя бы один лежал на диагонали квадрата и оба этих узла лежали на прямой, параллельной любой из координатных осей. Рассмотрим случай, когда один из узлов – пересечение диагоналей квадрата, тогда искомое число способов равно $62\cdot 2=124$. Осталось рассмотреть случай, когда один из узлов лежит на диагоналях квадрата, но не на их пересечении, тогда искомое число способов равно $\underbrace{62\cdot 124}+\underbrace{62\cdot 124}-\underbrace{124\cdot 2}=124\cdot 122$



один из узлов на первой диаг.

один из узлов на второй диаг



один узел на первой диаг, второй узел на второй диаг

Суммарно: $124\cdot 122+124=124\cdot 123$

Искомое число способов равно разности ① и ②, т.е

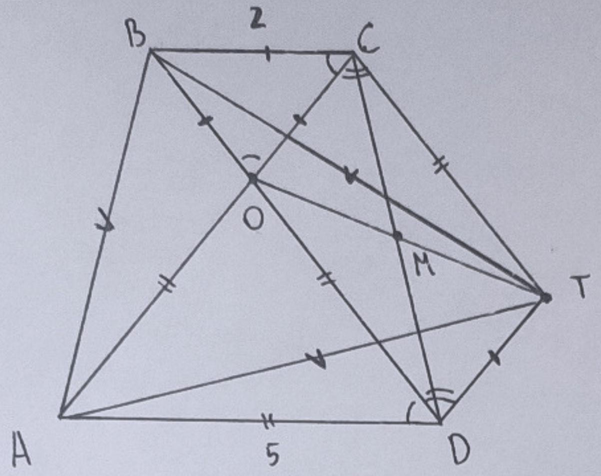
$C^2_{63^2}-C^2_{63^2-125}-124\cdot 123$

Ответ: $C^2_{63^2}-C^2_{63^2-125}-124\cdot 123$

211006037 (U369943 M1276417)

Чистовик

№6



а) В четырёхугольнике OCTD диагонали делятся пополам точкой пересечения – M => OCTD – параллелограмм =>

$BC = OC = TD$, $AD = OD = CT$; $\angle BCO = \angle ODA = 60^\circ$,

$\angle OCT = \angle ODT$ как противолежащие углы параллелограмма =>

$\angle BCO + \angle OCT = \angle ODA + \angle ODT$; $\angle BCT = \angle ADT$ => $\Delta BCT = \Delta ADT$ =>

$BT = AT$ => ΔATB – р/б; $\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - \angle BOA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ => $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$; тогда $\Delta BOA = \Delta BCT$ ($BO = BC$, $OA = CT$, $\angle BOA = \angle BCT = 120^\circ$) => $BA = BT = AT$ => ΔABT – правильный чтд

б) ΔABO: $AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2\cos\angle BOA \cdot BO \cdot AO = 2^2 + 5^2 - 2\cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 5 = 4 + 25 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 5 = 29 + 10 = 39$; $AB = \sqrt{39}$