Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005959**

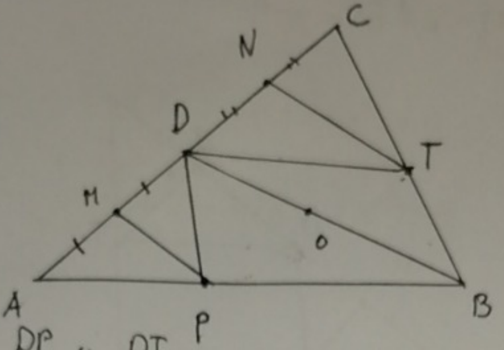
ID профиля: **199407**

Вариант 11

Чистовик

№1

а)



Проведём отрезки DP и DT

$\angle DPB = 90°$ (опирается на диаметр BD)

$\angle DTB = 90°$ (опирается на диаметр BD)

$\angle DPA = 180 - \angle DPB = 90° \Rightarrow$ Треугольник APD – прямоугольный.

PM – медиана $\triangle APD \Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM = DM$ (медиана прям. треугольника, проведённая из вершины прямого угла)

Аналогично из $\triangle$ CTD, $TN = \frac{1}{2}CD = CN = DN$

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle ADP = 90 - \alpha$ (по теореме о сумме углов треуг. из $\triangle APD$)

$\angle MPD = \angle MDP = 90 - \alpha$ ($\triangle$ MPD – равнобедренный: MD = PM)

$\angle DMP = 180 - \angle MPD - \angle MDP = 2\alpha$

$\angle TNC = \angle DMP = 2\alpha$ (т.к. TN ∥ MP)

$\triangle CNT$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle NCT = \frac{1}{2}\cdot(180 - \angle CNT) = \frac{1}{2}\cdot(180 - 2\alpha) = 90 - \alpha$.

По теореме о сумме углов треугольника из $\triangle ABC$:

$$\angle ABC + \alpha + 90 - \alpha = 180° \Rightarrow \angle ABC = 90°$$

Ответ: $\angle ABC = 90°$

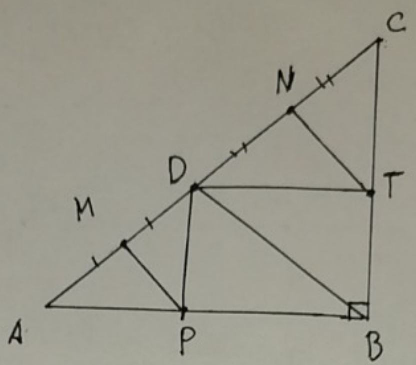
211005959 (U199407 M1274924)

Чистовик

2

№1

б) Из доказанного в п. а), $\angle ABC = 90^\circ$.



Из доказанного в п. а),

$AD = 2MP = 1$;

$CD = 2NT = 4$;

$\triangle ADP \sim \triangle DCT$; $k = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{4}$

$\triangle CDT \sim \triangle CAB$; $k = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$

Пусть $TB = x$. Тогда:

$DP = TB = x$ ($BTDP$ - прямоугольник)

$AP = \sqrt{AD^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$ (по т. Пифагора из $\triangle ADP$)

$S_{ADP} = \frac{1}{2} \cdot DP \cdot AP = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 25\, S_{ADP} = \frac{25x\sqrt{1-x^2}}{2}$

$S_{CDT} = 16\, S_{ADP} = \frac{16x\sqrt{1-x^2}}{2}$

$S_{BTDP} = S_{ABC} - S_{ADP} - S_{CDT} = \frac{8x\sqrt{1-x^2}}{2} = 4x\sqrt{1-x^2}$

$DT = \sqrt{BD^2 - x^2} = \sqrt{3 - x^2}$ (по т. Пифагора из $\triangle TDB$)

$S_{BTDP} = BT \cdot DT = x\sqrt{3 - x^2}$

$4x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{3-x^2}$; $x \neq 0$

$\Updownarrow$

$4\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3-x^2}$

$\sqrt{16-16x^2} = \sqrt{3-x^2} \Rightarrow 16 - 16x^2 = 3 - x^2$

$15x^2 = 13$

$x = \sqrt{\frac{13}{15}} \Rightarrow DP = TB = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$S_{ABC} = \frac{25 \cdot \sqrt{\frac{13}{15}} \cdot \sqrt{1 - \frac{13}{15}}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{26}}{30} = \frac{\sqrt{26}}{6}$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{\sqrt{26}}{6}}$

Чистовик.

③

№2

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 3]$

$6+x-x^2 = (x+2)(3-x)$

$\Downarrow$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 - 2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x} = 0$ при $x \in$ ОДЗ

$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right) + \left(x+2 - 2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x} + 3-x\right) + 3 - 5 = 0$

$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right) - 2 = 0$

$t = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = -2$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1$ или $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = -2$

$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{3-x}$

$x+2 = 1 + 2\sqrt{3-x} + 3 - x$

$2x - 2 = 2\sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 3-x \\ x-1 \geq 0 \quad (1) \end{cases}$

$(x-1)^2 = 3-x$

$x^2 - 2x + 1 = 3 - x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

$x = -1$ не удовлетворяет неравенству (1), а значит не является решением.

$\boxed{\text{Ответ: } x = 2.}$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} - 2$

$x+2 = 3 - x - 4\sqrt{3-x} + 4$

$2x - 5 = -4\sqrt{3-x}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} (2x-5)^2 = 16(3-x) \\ x \geq 2{,}5 \; (2) \end{cases}$

$4x^2 - 20x + 25 = 48 - 16x$

$4x^2 - 4x - 23 = 0$

$D = 16 + 4\cdot 4\cdot 23 = 24\cdot 16$

$x_3 = \frac{4 + 4\sqrt{24}}{8} = \frac{1+2\sqrt{6}}{2}$

$x_4 = \frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

x_3, x_4 не удовлетворяют нер-ву (2), а значит не являются решениями.

Чистовик. (4)

№3

$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$ - коорд. т. A

$4y^2+y(4a+8x)+(8x^2+12ax+5a^2)=0$

Решим данное уравнение относительно y:

$D=(4a+8x)^2-4\cdot4(8x^2+12ax+5a^2)=-64x^2-128ax-64a^2=-64(x+a)^2$ => чтобы D был не меньше нуля, $x=-a$ => $D=0$.

$y=\frac{-(4a+8x)}{8}=-\frac{(4a-8a)}{8}=\frac{a}{2}$

Получается, т. A имеет координаты $(-a;\frac{a}{2})$

$ax^2-2a^2x+a^3+4=ay$

$x^2-2ax+\frac{a^3+4}{a}=y$

$x_0=\frac{-(-2a)}{2}=a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{4}{a}=\frac{4}{a}$

Значит, вершина данной параболы имеет координаты $(a;\frac{4}{a})$.

Есть два случая: т. A лежит выше данной прямой, а т. B - ниже, и наоборот.

I $\begin{cases}\frac{a}{2}>-3a+4\\ \frac{4}{a}<3a+4\end{cases}$

Решая данную систему, получаем $a\in(\frac{8}{7};+\infty)$

II $\begin{cases}\frac{a}{2}<-3a+4\\ \frac{4}{a}>3a+4\end{cases}$

Решая данную систему, получаем $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})$

$\boxed{\text{Ответ: } a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})\cup(\frac{8}{7};+\infty)}$

Черновик.

№3

$A(-a;$

$$y = \frac{-(4a+8x)}{8} = -\frac{(4a-8a)}{8} = \frac{a}{2}$$

Значит, т. A имеет координаты $(-a; \frac{a}{2})$

$y - 3x = 4$

$y = 3x + 4$

Есть два случая: т. A лежит выше данной прямой, а т. B лежит ниже данной прямой, и наоборот.

I $\begin{cases} \frac{a}{2} > -3a+4 \\ \frac{4}{a} < 3a+4 \end{cases}$

II $\begin{cases} \frac{a}{2} < -3a+4 \\ \frac{4}{a} > 3a+4 \end{cases}$

$\frac{a}{2} > -3a+4$

$a > -6a+8$

$7a > 8$

$a > \frac{8}{7}$

$\frac{4}{a} < 3a+4$

$\frac{4-a(3a+4)}{a} < 0$

$\cancel{-12a-12}$

$\cancel{\frac{a+1}{a} \geq 0}$

$\cancel{a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)}$

$\boxed{\cancel{a \in (\frac{8}{7}; +\infty)}}$

$\begin{cases} a < -6a+8 \\ \frac{4-a(3a+4)}{a} > 0 \end{cases}$

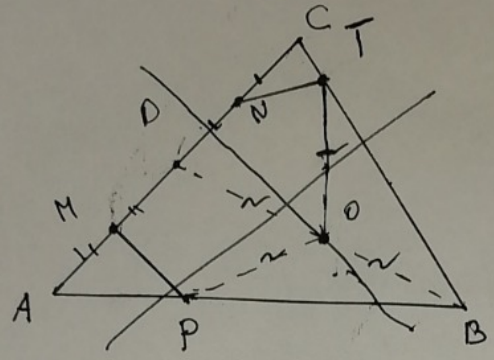
$\begin{cases} 7a < 8 \Leftrightarrow a < \frac{8}{7} \\ \frac{4-3a^2+4a}{a} > 0 \end{cases}$

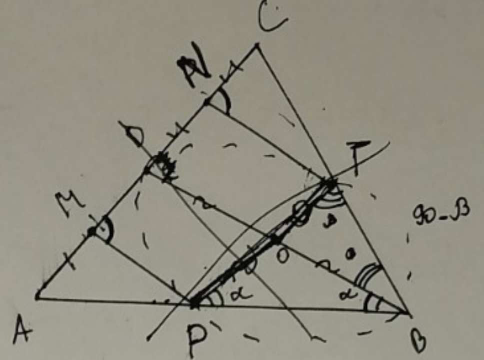
$\frac{3a^2+4a-4}{a} < 0$

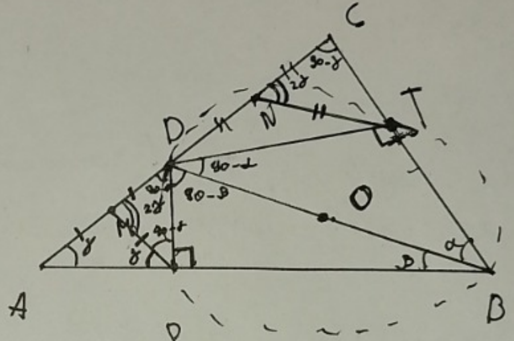
$-2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}$

$a \in (-\infty; -2) \cup (0; \frac{2}{3})$

№1. Черновик





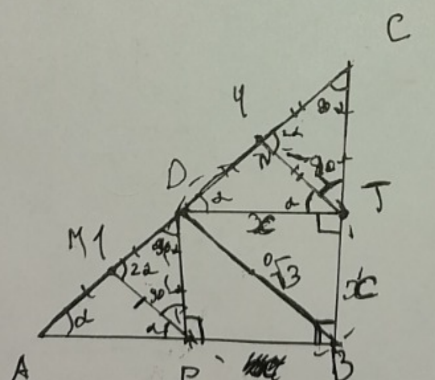


По теореме о сумме углов треугольника:

$\alpha+\beta+\gamma+90-\gamma=180 \Rightarrow \alpha+\beta=90$

$\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

б)



$MP = \frac{1}{2}$

$NT = 2$

$BD = \sqrt{3}$

$NT = \frac{1}{2} CD \Rightarrow CD = 4$

$MP = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AD = 1$

$CA = 4 + 1 = 5$

PDTB - прямоугольник

$BT^2 + BP^2 = 3$

Черновик.

№2

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 3-x>0 \\ 6+x-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<3 \end{cases}$$

$$x \in (-2;3).$$

$$6+x-x^2 = (x+2)(3-x)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\cdot\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

При $x \in$ ОДЗ:

$$\sqrt{(x+2)(3-x)} = \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x}$$

$a = \sqrt{x+2}$

$b = \sqrt{3-x}$

$$a - b + 3 = 2ab$$

$$a - 2ab = b - 3$$

$$a(1-2b) = b-3$$

$$a = \frac{b-3}{1-2b}$$

$a = x+2$

$b = 3-x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} - 3$$

Возведём обе части в квадрат.

$$a - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + b = 4ab - 12\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + 9$$

$$10\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = 4ab - a - b + 9$$

$$100ab = (4ab - a - b + 9)^2$$

100

~~$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = x+2 - 2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x} + 3-x - 5$~~

~~$\sqrt{x+2}$~~

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 + (x+2 - 2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3-x} + 3-x) - 5 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 + \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}\right)^2 - 5 = 0$$

$$t = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$$

$$t + t^2 - 2 = 0$$

Черновик

$t^2+t-2=0$

$t_1=1$

$t_2=-2$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1$ или $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=-2$

$\sqrt{x+2}=1+\sqrt{3-x}$

$x+2=1+2\sqrt{3-x}+3-x$

$2x-2=2\sqrt{3-x}$

$x-1=\sqrt{3-x}$

$x^2-2x+1=3-x$

$x^2-x-2=0$

$\boxed{\begin{aligned} x_1&=-1 \\ x_2&=2 \end{aligned}}$

$\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2$

$x+2=3-x-2\cdot 2\cdot\sqrt{3-x}+4$

$2x-5=-4\cdot\sqrt{3-x}$

$(2x-5)^2=16(3-x)$

$\times\,\begin{matrix}23\\16\end{matrix}$

$4x^2-20x+25=48-16x$

$4x^2-4x-23=0$

$D=16+4\cdot 4\cdot 23=16+23\cdot 16=$

$=24\cdot 16$

$x_1=\frac{4+4\sqrt{24}}{8}=\frac{1+2\sqrt{6}}{2}$

$x_2=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

$\frac{1-2\sqrt{6}}{2} \vee -2$

$1-2\sqrt{6} \vee -4$

$-2\sqrt{6} \vee -5$

$\sqrt{6} > \frac{5}{2}$

$6 > \frac{25}{4}$

$24 > 25$ - неверно

$\frac{1+2\sqrt{6}}{2} \vee 3$

$2\sqrt{6} \vee 5$

$2\sqrt{6} < 5$

$\Downarrow$

$\frac{1+2\sqrt{6}}{2} \in ОДЗ$

При $x=-1$:

$\sqrt{-1+2}-\sqrt{3-(-1)}+3=2\sqrt{6-1-1}$

$\sqrt{1}-\sqrt{4}+3=2\sqrt{4}$

$1-2+3=2\cdot 2$

$1-2+3=4$

$-2=0$ - неверно.

-1 - не является корнем

Черновик.

№3.

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ - координаты т. A

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$ - парабола с вершиной в т. B

$ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4 = ay$

$x^2 - 2ax + \frac{a^3+4}{a} = y$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2a}{2} = a$

т. B: $y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{4}{a} = \frac{4}{a}$

$B\left(a; \frac{4}{a}\right)$.

т. A:

$5a^2 + 12ax + 8x^2 + 4ay + 8xy + 4y^2 = 0$

$4y^2 + y(4a + 8x) + (8x^2 + 12ax + 5a^2) = 0$

$D = (4a+8x)^2 - 4\cdot4(8x^2 + 12ax + 5a^2) = 16a^2 + 64ax + 64x^2 -$

$- 128x^2 - 16\cdot12ax - 16\cdot5a^2 = -64x^2 - 128ax - 64a^2 =$

$= -64(x^2 + 2ax + a^2) = -64(x+a)^2 \Rightarrow$ чтобы данное уравнение имело решение: $x = -a$.

$D = 0$

$16 \cdot 12$

$\times\, 16$
12
32
$+\, 16$
192
$-\, 64$
128

Черновик.

$2,5$

$2,5$

125

20

$1,25$

При $x=2$:

$\sqrt{2+2}-\sqrt{3-2}+3=2\sqrt{6+2-4}$

$\sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2\sqrt{4}$

$2-1+3=4$

$4=4$ – верно.

При $x=\frac{1+2\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{\frac{1+2\sqrt{6}}{2}+2}-\sqrt{3-\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{2}\right)}=2\sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{2}+2\right)\left(3-\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{2}\right)\right)}$

$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}$

$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{25-(2\sqrt{6})^2}=1$

$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=1$

$\frac{5+2\sqrt{6}}{2}+\frac{5-2\sqrt{6}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=1$

$\frac{10}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{25-24}{4}}=1$

$5-1=1$

$4\neq1$ – неверно $\Rightarrow$ $\frac{1+2\sqrt{6}}{2}$ – не является решением.

При $x=\frac{1-2\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{\frac{1-2\sqrt{6}}{2}+2}-\sqrt{3-\left(\frac{1-2\sqrt{6}}{2}\right)}=2\sqrt{\left(\frac{1-2\sqrt{6}}{2}+2\right)\left(3-\left(\frac{1-2\sqrt{6}}{2}\right)\right)}$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}$

не является решением

Ответ: $x=2$.

Черновик.

$TB = x$

$PP = x$

$S_{ADP} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

$S_{ABC} = \frac{25x\sqrt{1-x^2}}{2}$

$S_{CDT} = \frac{10x\sqrt{1-x^2}}{2} \Rightarrow S_{DTBP} = S_{ABC} - S_{ADP} - S_{CDT} = \frac{8x\sqrt{1-x^2}}{2} = 4x\sqrt{1-x^2}$

$S_{PDTB} = x \cdot \sqrt{3-x^2}$

$x\sqrt{3-x^2} = 4x\sqrt{1-x^2}$

$\sqrt{3-x^2} = \sqrt{16-16x^2}$

$3-x^2 = 16-16x^2$

$15x^2 = 13$

$x^2 = \frac{13}{15}$

$x = \sqrt{\frac{13}{15}}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times 14 \\ \hline 52 \\ 13 \\ \hline 182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -169 \\ \hline 56 \end{array}$$

$S_{ABC} = \frac{25 \cdot \sqrt{\frac{13}{15}} \cdot \sqrt{1-\frac{169}{225}}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{\frac{13}{15}} \cdot \sqrt{\frac{56}{15}}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{56}}{30} =$

$= \frac{5 \cdot \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \sqrt{14}}{6} = \frac{5\sqrt{182}}{3}$

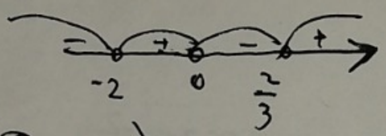
Ответ: $\frac{5\sqrt{182}}{3}$

Черновик

$$\frac{4-a(3a+4)}{a}<0$$

$$\frac{4-3a^2-4a}{a}<0$$

$$\frac{3a^2+4a-4}{a}>0 \Leftrightarrow 3(a+2)\left(a-\frac{2}{3}\right)$$



$a \in \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005959**

ID профиля: **199407**

Вариант 11

Чистовик

1

№4

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\frac{4}{x^2+y^2} - (x^2+y^2)^2 = -15$$

$t=x^2+y^2$

$$\frac{4}{t} - t^2 = -15$$

$$\frac{t^3-15t-4}{t}=0$$

$t_1=4$

$(t-4)(t^2+4t+1)=0$

$t^2+4t+1=0$

$t_2=-2+\sqrt{3}<0$

$t_3=-2-\sqrt{3}<0$

t_2 и t_3 не подходят, т.к. $x^2+y^2 \geq 0$ при любых x и y.

211005959 (U199407 M1274925)

Чистовик

№4 (продолжение)

$x^2+y^2=4 \Rightarrow 4^2+x^2y^2=20 \Rightarrow x^2y^2=20-16=4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

$x^2=4-y^2$

$y^2(4-y^2)=4$

$y^4-4y^2+4=0$

$(y^2-2)=0 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow x^2=2$

$y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Чистовик

№5

Прямые $y=x$ и $y=65-x$ являются диагоналями данного квадрата.

Рассмотрим три случая:

I Первая точка лежит на одной из диагоналей, вторая не лежит на диагонали:

На каждой из диагоналей есть 64 узла. Каждому из этих узлов мы можем сопоставить любую точку квадрата, кроме лежащих на диагоналях и имеющих общую с ним координату по одной из осей, т. е. $64^2-63\cdot2-62-62-1$. Значит, всего в таком случае мы получаем $2\cdot64\cdot(64^2-63\cdot2-2\cdot62-1)$ вариантов.

II Обе точки лежат на одной диагонали.

Вариантов выбрать 1-ю точку – 64, вариантов выбрать вторую – 63. Но каждый случай считается по два раза, значит вариантов – $\frac{64\cdot63}{2}$. А для двух диагоналей – $64\cdot63$

III Одна точка лежит на одной диагонали, другая – на другой.

Вариантов выбрать первую точку – 64, вторую – 62. (выбиваются точки, которые имеют общую координату по одной из осей с первым узлом). Но все варианты кроме $2\cdot64$ будут считаться по два раза, значит всего вариантов $62\cdot64$.

IV Сложим все получившиеся варианты:

$$2\cdot64\cdot(64^2-63\cdot2-2\cdot62\cdot1)+62\cdot64+63\cdot64=$$

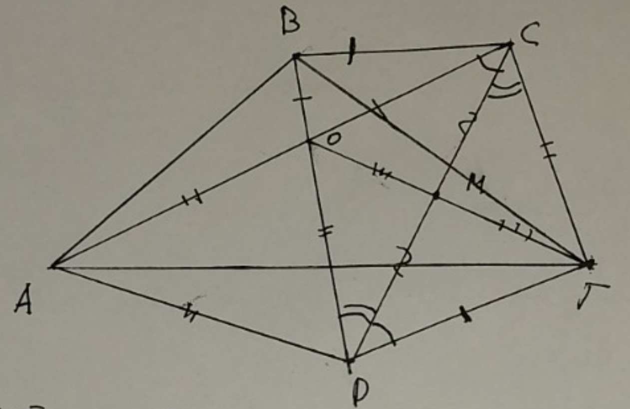
$$=64(2\cdot64^2-63\cdot3-62\cdot3-2)=500160.$$

Ответ: 500160 вариантов.

Чистовик

№6

а)



ΔBOC - правильный $\Rightarrow BO = CO = BC$

ΔADO - правильный $\Rightarrow AO = DO = AD$

$OM = MT$

При симметрии относительно точки M треугольник COD переходит в $\Delta DTC \Rightarrow TD = CO$; $CT = DO$.

Значит, $CODT$ - параллелограмм.

$\alpha = \angle OCD = \angle CDT$ (внутренние накрестлежащие при $CO \parallel TD$)

$\beta = \angle TCD = \angle CDO$ (внутренние накрестлежащие при $OD \parallel TC$)

$\angle BCO = 60°$ (ΔBCO - правильный)

$\angle ADO = 60°$ (ΔADO - правильный)

$\angle ADT = \angle BCT = \alpha + \beta + 60°$

Значит, $\Delta CBT = \Delta DTA$ (по двум сторонам и углу между ними)

$\Downarrow$

$BT = TA$

$\angle CTD = \angle COD = 180 - 60 = 120°$

$\alpha + \beta = 60° \Rightarrow \angle BCT = 120° \Rightarrow \angle CTB + \angle CBT = 60°$

$\angle CBT = \angle DTA$

Значит, $\angle DTA + \angle CTB = 60°$. $\angle BTA = \angle CTD - \angle DTA - \angle CTB = 120 - 60 = 60°$.

Чистовик.

5

№6 (продолжение)

$BT = TA$ и $\angle BTA = 60^\circ$ => $\triangle BTA$ - равнобедренный с углом в 60° => $\triangle BTA$ - правильный.

Что и требовалось доказать.

б) Из п. а) $DT = OC = BC = 2$;

$AD = 5$.

$\angle ADT = 120^\circ$.

По теореме косинусов из $\triangle ADT$:

$$AT^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 4 + 25 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 25 + 10 = 49$$

$AT = 7$

ABT - правильный треугольник => $S_{ABT} = \frac{AT^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$.

Рассмотрим $\triangle BCO$:

$$S_{\triangle BCO} = \frac{BC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

Рассмотрим $\triangle ADO$:

$$S_{\triangle ADO} = \frac{AD^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\triangle BOA} = S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle ADO} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = 1$$

Ответ: $S_{ABT} : S_{ABCD} = 1 : 1$.

Черновик.

№4

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^4+2x^2y^2+y^4) + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$a^2 - \frac{4}{a} = 15$$

$$\frac{a^3 - 15a - 4}{a} = 0$$

$$a^3 - 15a - 4 = 0$$

$x_1 = 4$

1 0 −15 −4

4 1 0 -

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 15a - 4 & a-4 \\ \hline -\;a^3 - 4a^2 & a^2 + 4a + 1 \\ 4a^2 - 15a & \\ -\;4a^2 - 16a & \\ a - 4 & \\ -\;a - 4 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(a-4)(a^2-4a+1) = 0$$

$a = 4$ или $a^2+4a+1=0$

$\Downarrow$

$b = 4$

$D = 16 + 4 = 20$

$$a_1 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} = -2+\sqrt{5}$$

$a_2 = -2-\sqrt{5}$. не является решением, т.к. $a>0$.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x^2y^2=8 \end{cases} \qquad \{(x-y)^2$$

$x^2 = y^2 - 4$

$(y^2-4)y^2 = 4$

$y^4 - 4y^2 - 4 = 0$

$t^2 - 4t - 4 = 0$

$D = 16 + 16 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$t_1 = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$

$t_2 = 2 - 2\sqrt{2}$

$y = \pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

$x = \sqrt{\ }$

$y = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$

№4 Черновик.

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^4+2x^2y^2+y^4) + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15$$

$t = x^2+y^2$

$$t^2 - \frac{4}{t} = 15$$

$$\frac{t^3-15t-4}{t} = 0$$

$t_1 = 4$

$$\frac{(t-4)(t^2+4t+1)}{t} = 0$$

$t^2+4t+1=0$

$D = 16-4 = 12$

$$t_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} < 0$$

$$t_2 = -2-\sqrt{3} < 0$$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2y^2=4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

$y^2 = 4-x^2$

$x^2(4-x^2)=4$

$t = x^2$

$4t - t^2 = 4$

$t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$

$t=2 \Rightarrow x^2=2$

$\Downarrow$

$y^2=2$

Ответ: $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Черновик

№5 (прод.)

$$\begin{array}{r} \times\ 64 \\ 64 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 4096 \\ 2 \\ \hline 8192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 63 \\ 3 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 3 \\ \hline 186 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 189 \\ 186 \\ \hline 375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 8192 \\ 377 \\ \hline \boxed{7815} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 7815 \\ 64 \\ \hline +\ 31260 \\ 46890 \\ \hline 500160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 64 \\ 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline -\ 4096 \\ 63 \\ \hline -\ 4033 \\ 128 \\ \hline 3905 \end{array}$$

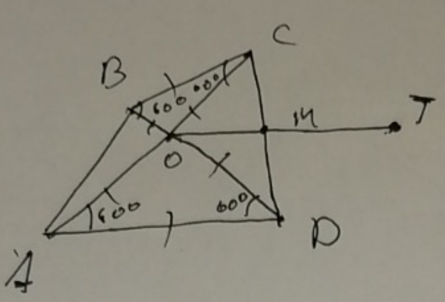
$$\begin{array}{r} \times\ 3905 \\ 128 \\ \hline +\ 31240 \\ 7810 \\ 3905 \\ \hline 499840 \end{array}$$

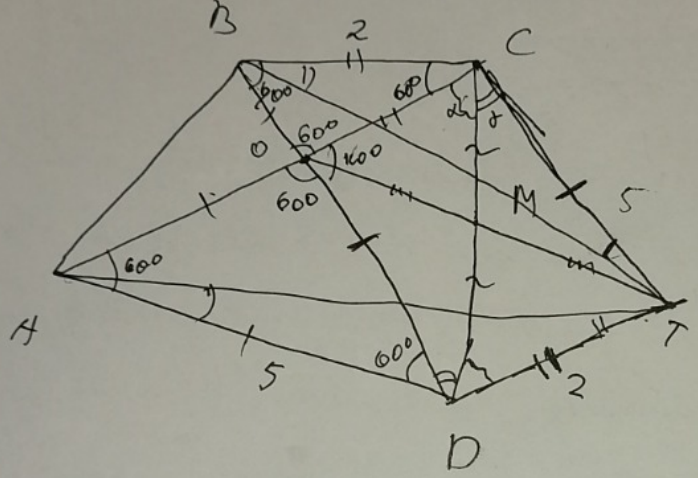
$\boxed{\text{Ответ: 499840.}}$

№5 Черновик.

~~Внутри квадрата 64^2 узлов. На диагоналях лежат $2 \cdot 64$. Для каждого из них мы можем взять любой из оставшихся кроме 126.~~

№6. Черновик





$\angle CTD = 120^\circ$

$\angle ABD = 120^\circ$ ~~2α−γ~~

$\alpha + \gamma = 60^\circ$

AT = BT из равенства Δ ATD и ΔTBC

$\angle CTB + \angle ATD = 60^\circ$

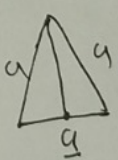
⇓

$\angle BTA = 120^\circ - \angle CTB - \angle ATD = 60^\circ$

ΔBTA – равнобедренный =>

б ~~Пусть S_A BCTD = S, тогда~~

$S_{ABCD} = S - S_{CTD} = S$



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

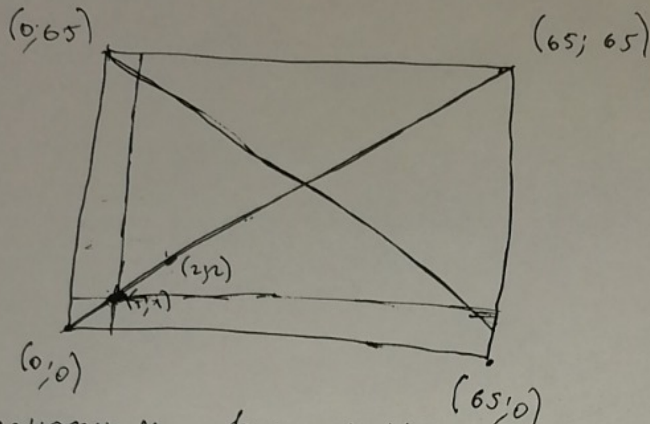
$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

AT находим из ΔADT по т. косинусов;

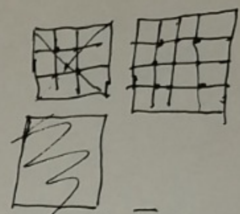
Площадь ABCD находим рассматривая ΔBOA, ΔBOC, ΔCOD, ΔAOD.

Черновик

№5



$65 \times (a;a)$



Рассмотрим все узлы, лежащие на прямой $y = x$.
~~...~~ Их 64. Для каждого из этих узлов, мы можем выбрать любой другой узел этого квадрата, не лежащий ~~относительно~~ на прямой // Ox или Oy.
Это убирает $64 + 64 = 128$ вариантов для каждого узла;

~~64·128, для прямой~~ Также, не будем рассматривать случаи, когда второй узел лежит на прямой $y = 65 - x$.
Или прямой $y = x$.

$\frac{64 \cdot 64}{2} - 2 \cdot 64 =$
$= 62 \cdot 64$ в.

Получаем

$2 \cdot 64 \cdot (64^2 - 128 - 63 - 63) = 64 \cdot (64^2 - 128 - 126) -$

$128 \cdot (64^2 - 128 - 63) =$
$= 128 \cdot (4096 - 128 - 63)$

количество вариантов, когда один узел лежит на одной из прямых, а второй - в квадрате.

II Оба на $y = x$ или $y = 65 - x$.

$2 \cdot C_{63}^{2} = 2 \cdot \frac{63 \cdot 64}{2} = 63 \cdot 64$

III Один на $y=x$, другой на $y = 65 - x$

$63 \cdot 64$