Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005846**

ID профиля: **375451**

Вариант 11

N2 $\sqrt{x+2}=a,\ \sqrt{3-x}=b,\ a,b\geq 0$

$$6+x-x^2=-(x-3)(x+2)=(3-x)(x+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+3=2ab \\ x+2=a^2 \\ 3-x=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \ (*) \\ a-b+3=2ab \ (**) \end{cases}$$

$(*)$ $a^2+b^2-2ab+2ab=5$

$$\begin{cases} (a-b)^2+2ab=5 \\ a-b+3=2ab \end{cases}$$

Пусть $t=a-b,\ m=ab$

$$\begin{cases} t^2+2m=5 \\ t+3=2m \end{cases} \Rightarrow t+t^2+3+\cancel{2m}=5+\cancel{2m}$$

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow$$

$1+3=2m$

$m=2$

$-2+3=-1$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-4}{2}=-2 \to m=\frac{1}{2} \\ t=\frac{2}{2}=1 \to m=2 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

При $t=1$: $\begin{cases} a-b=1 \\ 2=ab \end{cases}$; $\begin{cases} a=1+b \Rightarrow \\ 2=(1+b)b \ (*)' \end{cases}$

$(*)' \Rightarrow 2=b+b^2;\ b^2+b-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2\ (b>0) \\ b=1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$b=1 \Rightarrow 1=\sqrt{3-x} \Rightarrow \boxed{x=2}$

1

При $t = -2$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 2 \\ (b-2)b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$b^2 - 2b = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2 \Rightarrow 2b^2 - 4b = 1$$

$$2b^2 - 4b - 1 = 0$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}, \text{ т.к } \sqrt{6} > 2 \Rightarrow$$

$$b = \frac{2 - \sqrt{6}}{2} - <0 \Rightarrow \text{не уд.} \Rightarrow b = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{2+\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3-x}$$

$$\cancel{1}\ 2 + \sqrt{6} = 2\sqrt{3-x} \quad \uparrow^2$$

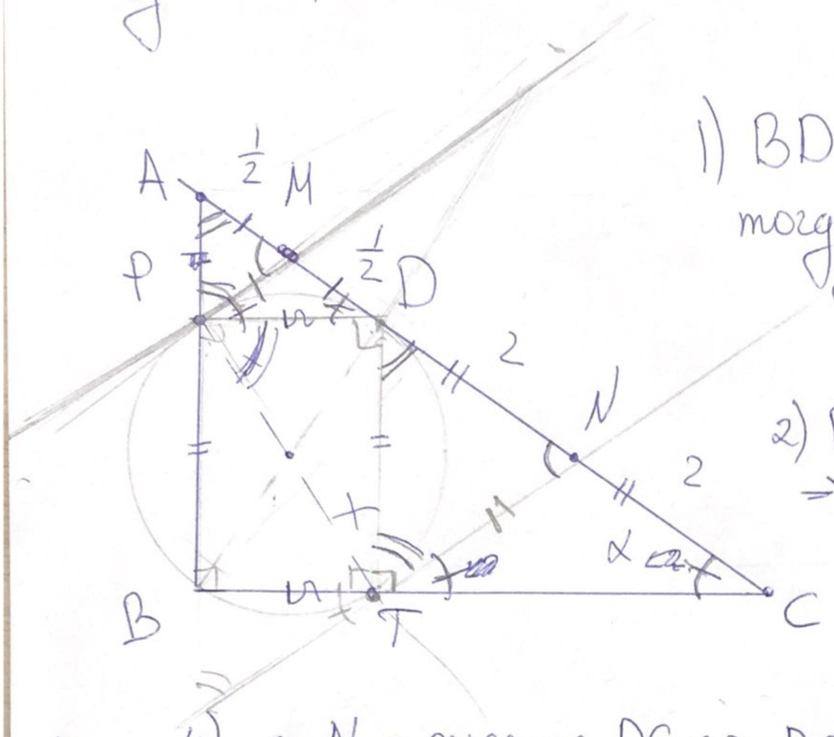
$$4 + 4\sqrt{6} + 6 = 4(3-x)$$

$$\frac{10 + 4\sqrt{6}}{4} = 3 - x \Rightarrow \quad x = 3 - \left(\frac{10}{4} + \sqrt{6}\right) =$$

$$= 0{,}5 - \sqrt{6}$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{x = 2,\ x = 0{,}5 - \sqrt{6}}$

Задача №1



Дано:
$PM \parallel TN$
а) $\angle ABC = ?$

1) BD – диаметр, тогда $\angle BTD$ и $\angle BPD$ опираются на BD $\Rightarrow$ $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$

2) $P \in AB \Rightarrow \angle BPD = \angle APD = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle APD$ – п/у

3) Аналог $\triangle DTC$ – п/у

4) т. N – середина DC, где DC – гипотенуза $\Rightarrow$ TN – медиана, опущенная из прямого угла, равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow TN = DN = NC$
Аналог для $\triangle APD \Rightarrow PM = AM = MD$

5) Рассмотрим $\triangle DTC$: $DN \overset{п.4}{=} NT \Rightarrow \triangle DNT$ – р/б $\overset{по\ с\text{-}ву}{\Rightarrow}$
$\angle NDT = \angle NTD =$
Аналог $\triangle NTC$ – р/б $\Rightarrow$
$NT \overset{п.4}{=} NC \Rightarrow \angle NTC = \angle NCT =$
$\triangle DTC$ – п/у $\overset{п.\Sigma\ углов}{\Rightarrow}$ $\angle NDT + \angle NCT = 90^\circ$

6) Рассмотрим $\triangle APD$: аналог, как для п.5;
$\angle MAP = \angle MPA$, $\angle MPD = \angle MDP$

7) $TN \parallel PM \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$, как соответственные.
т.к $\triangle AMP$ и $\triangle DNT$ – р/б, а углы при вершинах равны $\Rightarrow$ углы при основании также равны $\Rightarrow \angle MAP = \angle MPA =$
$= \angle NDT = \angle NTD$

8) из п.7 $\Rightarrow$ $\angle ADP = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle NDT$

9) т. $D \in AC \Rightarrow$ по т. о смежных углах $\Rightarrow$

$\angle ADP + \angle PDT + \angle NDT = 180^\circ =$

$= (90^\circ - \angle NDT) + \angle NDT + \angle PDT = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle PDT = 90^\circ$

10) из п.1 $\Rightarrow \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ \Rightarrow$

Для четырехугольника $PDTB$:

Σ углов $= 360^\circ = \angle BPD + \angle PDT + \angle DTB +$

$+ \angle TBP = 360^\circ \Rightarrow$

из п.1, п.9 $\Rightarrow \angle BPD + \angle BTD + \angle PDT = 270^\circ \Rightarrow$

$\angle TBP = \angle ABC = 90^\circ$

а) Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б) 1) $\triangle ABC$ – п/у $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ угол 90°, вписан, $\Rightarrow$ опирается на диаметр

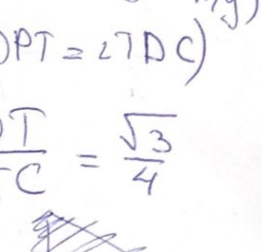
2) $\angle PDT = 90^\circ \Rightarrow$ т.к $D, P, T \in \omega \Rightarrow PT = \sqrt{3} = BD$

3) $TN \parallel PM \Rightarrow TN$ касательная к $\omega \Rightarrow \angle PTN = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle PTN = \angle DTN + \angle PTD \Rightarrow \angle PTD = \angle TCD$ (из $\triangle DTC$ и $\triangle PT$ п/у)

4) $\triangle PDT \sim \triangle DTC$ (по углам $\angle PTD = \angle TCD$ и $\angle DPT = \angle TDC$)

$\Rightarrow \dfrac{PD}{DT} = \dfrac{DT}{TC} = \dfrac{PT}{DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{DT}{TC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$



5) из $\triangle ABC \Rightarrow AC = 5$, $tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ~~[illegible]~~ .

$\parallel\!\!|$

из $AP = 2MP$, $DC = 2NT$

6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{4}BC$

7) По т. Піф для $\triangle ABC$;

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;$$

$$\cancel{36^2}\ 25 = \frac{3}{16}BC^2 + BC^2$$

$$25 = BC^2\left(\frac{3}{16}+1\right) = BC^2 \cdot \frac{19}{16}$$

$$\frac{16 \cdot 25}{19} = BC^2 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 5}{\sqrt{19}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$BC = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{19}}$$

8) $S_\triangle = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}}{19 \cdot 2} = \frac{50\sqrt{3}}{19}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005846**

ID профиля: **375451**

Вариант 11

Задача №4

$x=0, y=0$ — не корни

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$a \geq 0$, т.к. $x^2+y^2 \geq 0$ при $x, y \in R$

1) $x^2+y^2=$ ~~(x+y)~~ a, $x^2y^2=b$

2) $x^4+y^4-2x^2y^2+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$

$=a^2-2b$

3) Замена: $\begin{cases} \dfrac{4}{a}+b=5 \quad (1) \\ a^2-2b+3b=20 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$

из $\begin{cases} \dfrac{4}{a}+b=5 \\ a^2+b=20 \end{cases} \Rightarrow$

$a^2+b-\dfrac{4}{a}-b=15$

$a^2-\dfrac{4}{a}=15$ ($a \neq 0$ ~~при x,y∈R~~)

$a^3-4=15a$

$a^3-15a-4=0$

Корни — делители свободного члена, перебором $a=\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4\}$

$2^3-15\cdot2-4\neq0$, $3^3-15\cdot3-4\neq0$, $1^3-15-4\neq0$

$\Rightarrow a=4$ подходит $64-60-4=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-15a-4 & a-4 \\ \hline -\;a^3-4a^2 & a^2+4a+1 \\ 4a^2-15a-4 & \\ -\;4a^2-16a & \\ a-4 & \\ -\;a-4 & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow (a-4)(a^2+4a+1) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2-\sqrt{3} \\ a=-2+\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \quad 1$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2-\sqrt{3} \\ a=-2+\sqrt{3} \end{array}\right. \\ a>0 \text{ (из п.1) } (a \neq 0) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2+\sqrt{3} \quad \text{в}\cancel{=} \\ a=4 \quad \text{в}\cancel{=} \end{array}\right. \Rightarrow$$

~~Обратная замена:~~

$\cancel{x^2+y^2=4}$

5) Найдем значения в: $в+a^2=20$

При $a=4$ $в=4$

При $a=\sqrt{3}-2$ $в=20-a^2$

$в=20-(\sqrt{3}-2)^2=$

$=20-(3-4\sqrt{3}+4)=$

$=13+4\sqrt{3}$

6) Обратная замена:

При $в, a=4$: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$ $x^2=4-y^2$

$(4-y^2)y^2=4$; $4y^2-y^4=4$

$\cancel{y^4-4y^2}$ $y^4-4y^2+4=0 \Rightarrow (y^2-2)^2=0 \Rightarrow$

$y^2=2 \Rightarrow$

Найдем $x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ $y=\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow (\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

решения для $a, в=4$

7) Легко заметить, что $\underset{\approx 1.73}{\sqrt{3}}<2 \Rightarrow \sqrt{3}-2<0 \Rightarrow$

$a=-2+\sqrt{3}$ не подходит.

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ 2

Задача №5

1) ~~?~~ Каждая из прямых ($y=x$ и $y=65-x$) — диагонали квадрата (Действительно, $y=x$ проходит через $(0;0)$ и $(65;65)$, а $y=65-x$ через $(0;65)$; $(65;0)$.

2) ~~Способов всего~~ Пусть на прямой $y=x$ лежит n точек внутри квадрата, а внутри квадрата тогда лежит $m-n$ точек, не лежащих на данной прямой. Тогда выбрать пару узлов внутри квадрата способов $n(m-n)$. Теперь „вычтем" все способы, где на прямой и внутри квадрата (не на прямой) лежат точки, которые будут образовывать прямые, параллельные осям координат

$K = 2(a-1) - 2 = 2a-4$, где $a = 65 - ~~1~~ = 64$,

причем для всех n точек на прямой ровно K точек ~~для~~ лежат на парал осям прямых $\Rightarrow$

nK — число „неподходящих прямых" $\Rightarrow$

Общее число способов $n(m-n) - nK$ для $y=x$

Аналогично для $y=65-x$ $N_0 = n(m-n) - nK$,

но т.к получается так, что найдутся две диагонали, которые учтены дважды (из центральной точки, т.к внутри будет квадрат $2l \times 2l$), $l = 2r+1$, $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Общее число способов $2N_0 - 2$

3

$\Rightarrow M = 2\big((n(m-n) - nK) - 1\big)$

Найдем m, K и n.

Число точек лежащих на каждой прямой (n):

$n = 65 - 1 = 64$ (число чисел отсюда $y \in (0;65) \Rightarrow 65-0-1 = 64$)

Аналогично $K = 2(a-1)-2$, где a число точек, лежащих на $y \in [0;65]$ или $x \in [0;65]$

$(2\cdot 65 - 2) - 2 = 2\cdot 64 - 2 = 2\cdot 63$

$\Rightarrow K = 2\cdot 63$

Число точек внутри квадрата $\Rightarrow (65-1)^2 = 64^2$

$\Rightarrow M = 2\big(64\cdot(64^2 - 64) - 64\cdot 2\cdot 63 - 1\big) =$

$= 2\big(64^2\cdot 63 - 64\cdot 63 - 1\big) =$

$= 2\cdot\big(64\cdot 63\,(64-1) - 1\big) =$

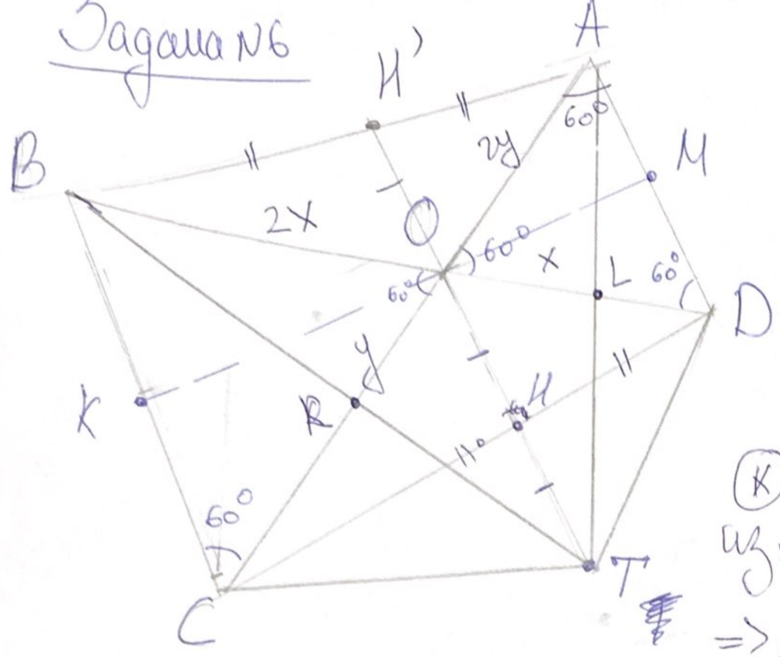
$= \underline{\underline{2\cdot\big(64\cdot 63^2 - 1\big)}} = 2\cdot 253695 = \underline{\underline{507390}}$

$\times\begin{array}{r}63\\63\end{array}$ $63^2 = 60^2 + 2\cdot 60\cdot 3 + 3^2 = 3600 + 360 + 9 = 3969$

$\times\begin{array}{r}3969\\64\\\hline 6\end{array} = 237840 + 15856 =$

$=$

Задача N6



CH = HD
ΔBOC, ΔAOD - прав.

(K) также следует из того, что ∠BCA = = ∠CAD = 60° => AC секущая => AD ∥ BC при секущей AC.

1) Пусть OK ⊥ BC, OM ⊥ AD, т.к ΔAOD и ΔBOC правильные и
~~т. (B, O, D) т. B, т. O, т. D и т. C O A обежат~~
AC – диагональ ABCD, BD – диагональ ABCD
Пусть AC ∩ BD ≠ т.O => противоречие с условием, т.е т.O ∈ диагоналям и является ~~вер~~ одной вершиной двух правильных треугольников, но т.к ABCD – выпуклый, то ∠BOC = ∠AOD, т.е т.O, т.K и т.M ∈ одной прямой => т.к OM ⊥ AD, а OK ⊥ BC => BC ∥ AD (*)

2) ABCD – трапеция по опр → т.к BD = BO + OD, а AC = OC + AO, то т.к BO = OC, OD = AO (Δ правильные) => BD = AC. => ABCD р/б трап => AB = CD

3) OH = HT (по опр. симметрии), CH = HD (по усл) =>
~~OHKED~~

$\triangle ABO = \triangle COD$ (по углу $\angle AOB = \angle COD$ и $BO = OC$ и $AO = OD$)

4) KM – ось симметрии для $ABCD$, тогда

$\exists$ т. H', которая симметрична H отн прямой $KП$ $\Rightarrow$

~~т. H', H и~~ т. H' и т. H $\in$ одной прямой $\Rightarrow$ ($OH' = OH$)

$H'O = OH \overset{п.3}{=} HT$

5) $\Rightarrow$ BO и AO медианы $\triangle ABT$ (т.к $\frac{TO}{OH'} = \frac{2}{1}$)

6) $\Rightarrow$ TH' медиана $\triangle ABT$, т.к медианы $\cap$ в одной точке.

7) $3y = AR$; $3x = BL$ $\Rightarrow$ $AO = 2y$; $BO = 2x$

$RO = y$, $2x = y +$

Решение п. б

8) $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

$h = h_1 + h_2$; $h_1 = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$; $h_2 = \frac{AD\sqrt{3}}{2}$ (высота прав $\triangle$)

$h_1 = \sqrt{3}$; $h_2 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ $\Rightarrow h = \sqrt{3} \cdot 3{,}5$

$$\boxed{S = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{4}}$$

9) $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ (площадь прав $\triangle$)

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120° =$ (т. кос для $\triangle AOB$)

$= 25 + 4 + \cancel{5 \cdot 2 \cdot}\ \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cdot 2 = 29 + 10 = 39$

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

10) $$\boxed{n = \frac{S_{ABT}}{S} = \frac{39\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{49\sqrt{3}} = \frac{39}{49}}$$

6

7) Замена $a = \sqrt{3} - 2$; $b = 13 + 4\sqrt{3}$

Черновик

$$\begin{array}{r} \times 253695 \\ 2 \\ \hline 507390 \end{array}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{3} - 2 \\ x^2 y^2 = 13 + 4\sqrt{3} \end{cases} ; \quad x^2 = (\sqrt{3} - 2) - y^2$$

$$((\sqrt{3} - 2) - y^2) y^2 = 13 + 4\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 2) y^2 - y^4 = 13 + 4\sqrt{3}$$

$$y^4 - (2 - \sqrt{3}$$

3600

60·60 =

100

3960 + 9

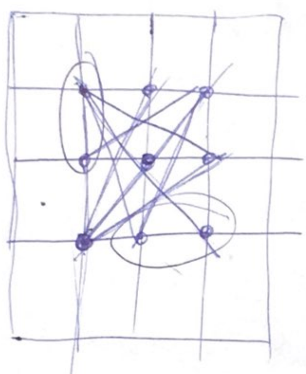
$$2((4-1)-1)$$

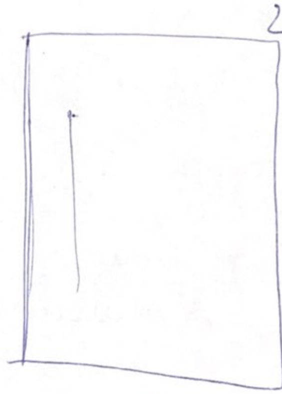
$$2((65-1)-1) =$$

=

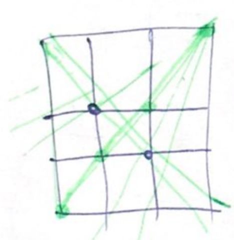
$$\begin{array}{r} + 237840 \\ 15856 \end{array}$$

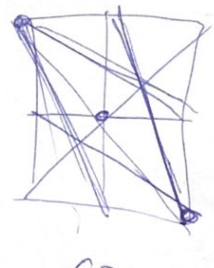
$$\begin{array}{r} + 237840 \\ 15856 \\ \hline 253696 \end{array}$$





n = 4





$$\begin{array}{r} + 36 \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3964 \\ 4 \\ \hline 15856 \end{array}$$

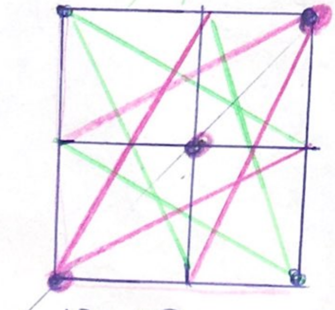
312000 + 3600 +

+ 240 + 16 =

=

15600 + 256

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 3964 \\ 6 \end{array}$$

3964·6 =

= 18000 + 5400 +

+ 360 + 24 =

$$\begin{array}{r} + 18000 \\ 5400 \\ \hline 23400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 23760 \\ 24 \\ \hline 23784 \end{array}$$

=

7