Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

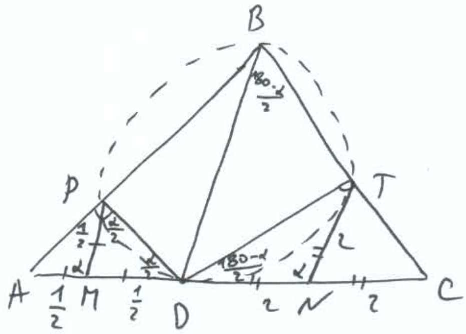
Шифр: **211005829**

ID профиля: **88110**

Вариант 11

Чистовик.

№1 (I часть, 11 вариант)



Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$, BD- диам ω

$\omega \cap AB = P$ $\quad \omega \cap BC = T$ $\quad M$ - сер AD

N - сер CD $\quad PM \parallel TN$

Найти: а) $\angle ABC$

б) S_{ABC}, если $MP = \frac{1}{2}$ $NT = 2$ $BD = \sqrt{3}$

Решение:

1) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle DNT = \alpha \Rightarrow \angle PMD = 180 - \alpha$

2) BD- диам $\omega \Rightarrow \angle DPB = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$

3) $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прям
M - сер AD
N - сер DC
$\Rightarrow AM = MP = MD$, $DN = NT = NC \Rightarrow \triangle PMD$ и $\triangle DNT$ - р/б $\Rightarrow$
$AD = 2MP$ $\quad DC = 2NT$

$\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP$
$\angle TDN = \angle DTN$

4) $\angle MPD = \angle MDP$
$\angle TDN = \angle DTN$
$\angle PMD = 180 - \alpha$
$\angle DNT = \alpha$
$\triangle PMD$ и $\triangle DNT$ - р/б
$\Rightarrow \angle PDM = \frac{\alpha}{2}$, $\angle TDN = \frac{180-\alpha}{2}$ $\Rightarrow \angle PDT = 90^\circ$

5) $\angle PDT = 90^\circ$
$BPDT$ - впис ($\angle PBT + \angle PDT = 180^\circ$) $\Rightarrow \angle PBT = 90^\circ$
$\angle PBT = \angle ABC$

6) $\angle DTN = \frac{1}{2} \smile DT$
$\angle DBT = \frac{1}{2} \smile DT$
$\Rightarrow \angle DTN = \angle DBT \Rightarrow \angle DBT = \frac{180-\alpha}{2}$

7) $BPDT$ - прям (все углы 90°) $\Rightarrow BT \parallel PD \Rightarrow \angle TBD = \angle BDP$ $\Rightarrow \angle BDP = \frac{180-\alpha}{2}$

8) $\angle ADB = \angle ADP + \angle PDB$
$\angle ADP = \frac{\alpha}{2}$
$\angle PDB = \frac{180-\alpha}{2}$
$\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow BD$ - выс

9) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2}$
$AD = 2MP$
$DC = 2NT$
$MP = \frac{1}{2}$
$NT = 2$
$\Rightarrow AC = 5$ $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\angle B = 90^\circ$
$S_{ABC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

№3 (I часть, 11 вариант)

Найдем координаты B

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0 \qquad ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4$

$x_B = -\frac{-2a^2}{2a} = a$

$[redacted] = a^3 - 2a^3 [redacted] + a^3 + 4 \Rightarrow y_B = \frac{4}{a}$

ay_B

$B(a; \frac{4}{a})$

Найдем координаты A

Чтобы мы могли подобрать a так, чтобы уравнение приравнялось к 0 необходимо, чтобы квадратное ур-е отн-о a имело хотя бы один корень т.е. $D \geq 0$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$5a^2 + 4(3x+y)a + (8x^2 + 8xy + 4y^2) = 0$

$D = 144x^2 + 96xy + 16y^2 - 160x^2 - 160xy - 80y^2 = -16(x^2 + 4xy + 4y^2) = \underbrace{-16(x+2y)^2}_{\leq 0} \geq 0$

Получается ур-е может приравняться к нулю только при $x = -2y$

Тогда подставим $x = -2y$

$5a^2 - 24ay + 4ay + 32y^2 - 16y^2 + 4y^2 = 5a^2 - 20ay + 20y^2 = 5(4y^2 + a^2 - 4ay) =$

$= 5(2y - a)^2 = 0 \qquad \Rightarrow y = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow x = -a \qquad A(-a; \frac{a}{2})$

Чтобы точки лежали по разные стороны надо, чтобы у этой точки был один выше, один ниже [redacted] значение прямой $y = 4 + 3x$ в соответствующем $y \cdot x$, т.е.

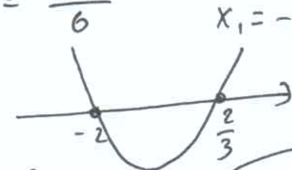
• A выше $(\frac{a}{2} > 4 - 3a)$, B ниже $(\frac{4}{a} < 4 + 3a)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ a > 8 - 6a \\ \frac{4}{a} < 4 + 3a \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > 8 - 6a \\ \frac{4}{a} < 4 + 3a \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ 7a > 8 \\ 4 < 4a + 3a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ 7a > 8 \\ 4 > 4a + 3a^2 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ a > \frac{8}{7} \\ ** \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{8}{7} \\ * \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$3a^2 + 4a - 4 = 0$

$D = 16 + 48 = 8^2$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{6} \qquad x_1 = -2 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$



$3a^2 + 4a - 4 < 0 \quad a \in (-2; \frac{2}{3})$ — *

$3a^2 + 4a - 4 > 0 \quad a \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$ — **

(1) $a \in (\frac{8}{7}; +\infty)$ (2) $\varnothing$

№3 (продолжение) (I часть, 11 вариант)

• A ниже $\left(\frac{a}{2} < 4 - 3a\right)$, B выше $\left(\frac{4}{a} > 4 + 3a\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 8 - 6a \\ 4 > 4a + 3a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a < 8 - 6a \\ 4 < 4a + 3a^2 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ 7a < 8 \\ * \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a < 0 \\ 7a < 8 \\ ** \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \begin{cases} a \geq 0 \\ a < \frac{8}{7} \\ a \in \left(-2; \frac{2}{3}\right) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} a < 0 \\ a < \frac{8}{7} \\ a \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\underline{a \in \left[0; \frac{2}{3}\right)} \qquad \underline{a \in (-\infty; -2)}$$

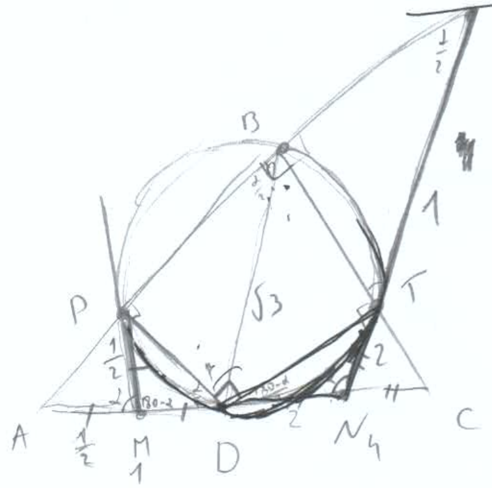
Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup \left[0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$

~~№2~~

$$\cancel{\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}}$$

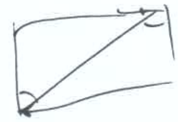
$$\cancel{\sqrt{6+x-x^2} = \sqrt{(3-x)(x+2)}} \qquad \cancel{x \in [-2; 3]}$$

Черновик.

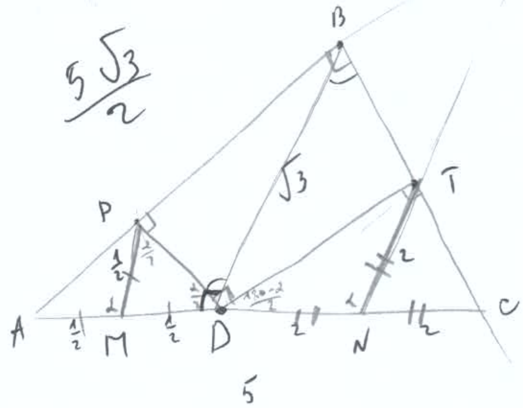


$90°$

$TN \parallel MP$



$\frac{5\sqrt{3}}{2}$



$\sin\beta = \sin(180-\beta)$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta + 2\sqrt{3}\sin\beta = \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\beta$

5

$180-\alpha$

$90-\frac{\alpha}{2}$

$a-b+3=2ab \qquad a, b \geq 0$

$(a-b)^2+4ab$

$x+2+3-x$

$\sqrt{x+2} \qquad a-b+8=(a+b)^2$

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)^2-5$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+8=$

$x \geq -2$
$x \leq 3 \qquad [-2;3]$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$x^2-x-6 \leq 0 \qquad D(f):[-2;3]$

$(x-3)(x+2) \leq 0 \qquad [-2;3]$

$\cancel{(x+2)+2\sqrt{6+x-x^2}}$

$+ \qquad +$

$-2 \quad - \quad 3$

$x+2 \quad +3-x$

$\frac{x+2-(3-x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)^2-5 \qquad x^2+x$

$2x-1$

$(x+2)-2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}+6\sqrt{x+2}+3\cancel{x}-6\sqrt{3-x}+9=4(6+x-x^2)$

$6(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x})+14=y^2+y$

$ax+4ay+(8x^2+8xy+4y^2)=0$ $\quad (2x+2y)^2$

$x+ay+2x^2+2xy+y^2=0$ $\quad y=4+3x$

$\frac{\times 16}{96}$

$3x+y)+(8x^2+8xy+4y^2)$

$y+y^2$

$xy+16y^2-160x^2-160xy-80y^2$

$64xy-64y^2$ $\quad y=4+3a$

$\cancel{x}=-2y$

$4xy+4y^2)=-16(x+2y)^2$

$24ay+4ay+32y^2-16y^2+4y^2$

$5a^2-20ay+20y^2$

$(4y^2-4ay+a^2)=0$

$(2y-a)^2=0$

$2y=a$ $\quad y=\frac{a}{2}$

$x=-a$

$A\left(-a;\frac{a}{2}\right)$

$a>1{,}6$

ерху

0

$8-6a$ $\quad 5a>8$

$4a+3a^2$

$a>1{,}6$

$2+3a^2$

$a\in(1{,}6;+\infty)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0$

$\frac{2a^2}{2a}=a$

$\cancel{a^3}-2a^3-ay+\cancel{a^3}+4=0$

$ay=4$

$y=\frac{4}{a}$

$B\left(a;\frac{4}{a}\right)$

$a=-\frac{8}{a}$

$a^2=-8$

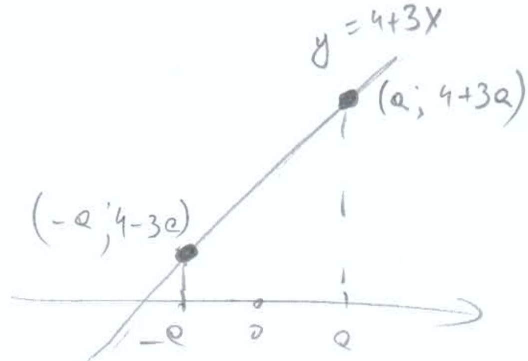
$3a^2+4a-4>0$

$D=16+48=8^2$

$\frac{-4\pm 8}{6}$

-2 $\quad \frac{2}{3}$

$A\left(-a;\frac{a}{2}\right)$ $\quad B\left(a;\frac{4}{a}\right)$



~~A сверху~~

$\begin{cases}\frac{a}{2}>4-3a\\ \frac{4}{a}<4+3a\end{cases}$ $\quad \begin{cases}a>8-6a\\ 4<\end{cases}$

B сверху

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ \cancel{a<8-6a}\ \ a<1{,}6\\ 4<4a+3a^2\end{cases} \quad (-\infty;-2)\\ \begin{cases}a\geq 0\\ a<1{,}6\\ 4>4a+3a^2\end{cases} \quad \left[0;\frac{2}{3}\right)\end{array}\right.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

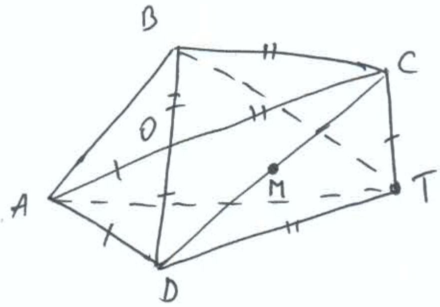
Шифр: **211005829**

ID профиля: **88110**

Вариант 11

Чистовик

№6 (II часть, 11 вариант.)



Дано: ABCD - вып чет. $AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - прав, T сим O относ сер CD (M)

Д-ть: ABT - р/с

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, $BC = 2$, $AD = 5$

Решение.

1) В силу симметрии $CT \parallel OD$, $CT = OD$, ведь M - сер DC ($D \to C$, $O \to T \Rightarrow OD \to CT \Rightarrow$ $= OD = CT$) (M-центр сим $D \to C$, $O \to T \Rightarrow \angle MDO \to \angle MCT \Rightarrow \angle MDO = \angle MCT \} \Rightarrow DO \parallel CT$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow ODTC$ - парал $\Rightarrow DT = OC$

$\angle CTD = \angle DOC$

$\angle ODT = \angle OCT$

2) $\angle BOC = 60^\circ$ (из р/с $\triangle$) $\Rightarrow \angle COD = 120^\circ$ $\Big|$ $\Rightarrow \angle OCT = 60^\circ = \angle ODT$, $\angle DTC = 120^\circ$

3) $\angle BCO = 60^\circ$

$\angle ODA = 60^\circ$ (из р/с $\triangle$)

$\angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$ $\Big|$ $\Rightarrow \angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$

4) $AD = DO$ (из р/с $\triangle$)

$DO = CT$ (из парал) $\Big|$ $\Rightarrow AD = CT = 5$

$BC = OC$ (из р/с $\triangle$)

$OC = DT$ (из парал) $\Big|$ $\Rightarrow BC = DT$

$\Rightarrow \begin{cases} \triangle ADT = \triangle TCB \Rightarrow \\ \angle CTB + \angle CBT = \angle DTA + \angle DAT = 60^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \angle CBT = \angle ATD \\ \angle CTB + \angle CBT = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle ATD + \angle CTB = 60^\circ$

5) $\angle ATD + \angle CTB = 60^\circ$

$\angle DTC = 120^\circ$ $\Big|$ $\Rightarrow \angle ATB = 60^\circ$

6) $\angle ATB = 60^\circ$

$\triangle ADT = \triangle TCB \Rightarrow AT = BT$ $\Big|$ $\Rightarrow \triangle ABT$ - р/с ▲

7) $\angle BCT = 120^\circ$

$BC = 2$

$CT = 5$ $\Big|$ $\xRightarrow{\text{по Т cos}}$ $BT^2 = 25 + 4 - 20\cos 120^\circ = 39 \Rightarrow BT = \sqrt{39}$

8) ABT - р/с $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{BT^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2}$

№6 (продолжение) (II часть, 11 вариант)

9) $\angle CBO = 60^\circ$
$\angle ODA = 60^\circ$
$B - O - D$
$\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трап $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h$

10) OH_1 - высота AOD
OH_2 - высота BOC
$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ - р/с
$\Rightarrow OH_1$ и OH_2 - биссс $\Rightarrow \angle DOH_1 = \angle BOH_2 = 30^\circ \Rightarrow H_1 - O - H_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_1H_2$ - выс трап

11) $OH_1 = AO \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
$OH_2 = BO \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$
$\Rightarrow H_1H_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

12) $S_{ABCD} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

13) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{2}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{78}{49}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{78}{49}$

№5 (II часть, 11 вариант)

Раз граница квадрата у нас не используется, то давайте мы её „сотрем" тогда у нас останется квадрат 64x64 и координатами вершин (1;1), (1;64), (64;64), (64;1). Теперь будем ставить точку 1 (выбирать узел) на диагонали квадрата, т.е на прямых $y=x$ $y=65-x$, тогда условие будет выполнятся, а вторую пока поставим не на диагональ (таких мест будет $\underbrace{64\cdot64}_{\text{всего узлов}} - \overset{\text{узлов на диаг}}{128} \underbrace{-127}_{\substack{\text{блокирует}\\ \text{1 на верт и гор}\\ \text{чтобы не было } \parallel Ox/Oy}} \overset{\substack{\text{т.к. посчитали}\\ \text{2 раза}}}{+3}$ где стоит 1 и две точки на другой диагонали, которые блокируются 1

$=3844$) И это только для одной точки принадлежащей диагонали, а их всего 128, так, что способов, где 1 на диаг, 2 не на диаг

$3844\cdot128=492032$

Теперь посчитаем если они обе на диаг.

У нас 128 мест, для 2 $\overset{125}{}$ (−3 т.к. в одной стоит и 2 блокирующим на гор и вертик., чтобы не было $\parallel Ox/Oy$. Но так. как. нам не важен порядок, то всего их будет $\frac{125\cdot128}{2}=8000$

Тогда всего способов $492032+8000=500032$

Ответ: 500032

№4 (II часть, 11 вариант)

$x \neq 0 \quad y \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 5 - \frac{4}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 5 - \frac{4}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $x^2+y^2 = t \qquad t > 0$

$t^2 - \frac{4}{t} = 15$

$t^3 - 15t - 4 = 0$

$(t-4)(t^2+4t+1) = 0$

$t = 4$

$x^2+y^2 = 4$

$t^2+4t+1=0$

$D = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$t_{12} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$t_1 = -2+\sqrt{3} \quad > 0 \quad \Lambda$

$t_2 = -2-\sqrt{3} \quad > 0 \quad \Lambda$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 5 - \frac{4}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 4 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{4}{x^2} \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{4}{x^2} \\ x^2 + \frac{4}{x^2} = 4 \quad (2) \end{cases}$$

(2) $x^2 + \frac{4}{x^2} = 4$

$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

$(x^2-2)^2 = 0$

$x^2 = 2$

$\cancel{x = \pm\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{4}{x^2} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$x^2+y^2=t \quad t\geq 0$

$$\begin{array}{r} 128 \\ +124 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ -252 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$\frac{12}{x^2+y^2} + x^4+y^4 = 5$

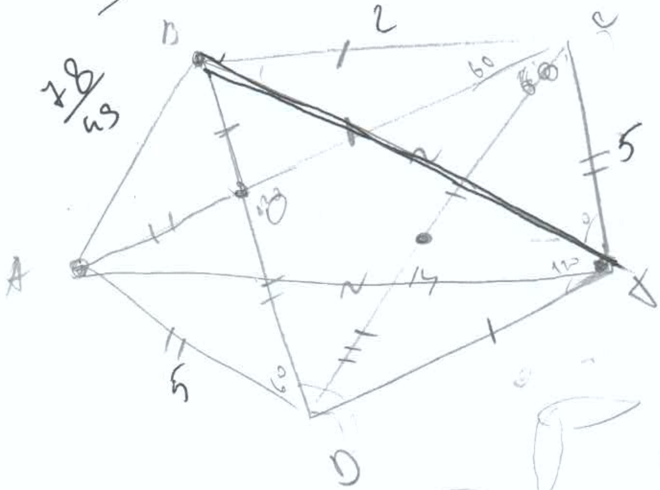
$\frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5$

$\frac{33\sqrt{3}}{2}$

$-2bc\cos\alpha$

$\frac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{4} - S$

$\frac{78}{49}$



$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 64 \\ \hline 500 \\ +750 \\ \hline 8000 \end{array}$$

64 13

$$\begin{array}{r} 3844 \\ \times 128 \\ \hline 30752 \\ +7688 \\ 3844 \\ \hline 492032 \end{array}$$

3969.

127

$x^2y^2=4$

$x^2y^2=4$

$x^2+y^2=4$

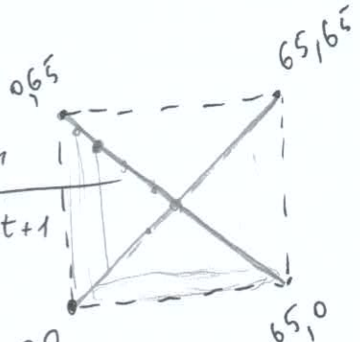
$x^4+x^4=4$

$x^2\cdot x^2+y^2=4$

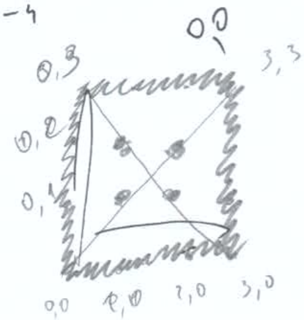
$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3-15t-4 & t-4 \\ \cline{2-2} -t^3-4t^2 & t^2+4t+1 \\ \hline -4t^2-15t & \\ -4t^2-16t & \\ \hline t-4 & \end{array}$$

31



x-рен -x-рен



$(x^2-2)^2$

$x^2+y^2=t$

$x=\pm\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$x^2+y^2=5-\frac{4}{x^2+y^2} \qquad -2\pm\sqrt{3}$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \qquad 64-$

$x^4+y^4 - \frac{12}{x^2+y^2}=5$

$(x^2+y^2)^2-\frac{4}{x^2+y^2}=15$

t^2+4t+1

$16-4=(2\sqrt{3})^2$

$\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}$

$t^3-4=15t \qquad t^3-15t-4=0$