Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005774**

ID профиля: **170095**

Вариант 11

Значит B ниже $y-3x=4$ при | стр. 8, ИИСТОВИК

$$\left[\begin{array}{l} -6<a<0 \\ a>2. \end{array}\right.$$

A и B лежат по разные стороны от $y-3x=4$
. т.е.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \text{ ниже} \\ B \text{ выше} \end{cases} \\ \begin{cases} A \text{ выше} \\ B \text{ ниже} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<\frac{8}{7} \\ \left[\begin{array}{l} 0<a<2 \\ a<-6 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a>\frac{8}{7} \\ \left[\begin{array}{l} -6<a<0 \\ a>2. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

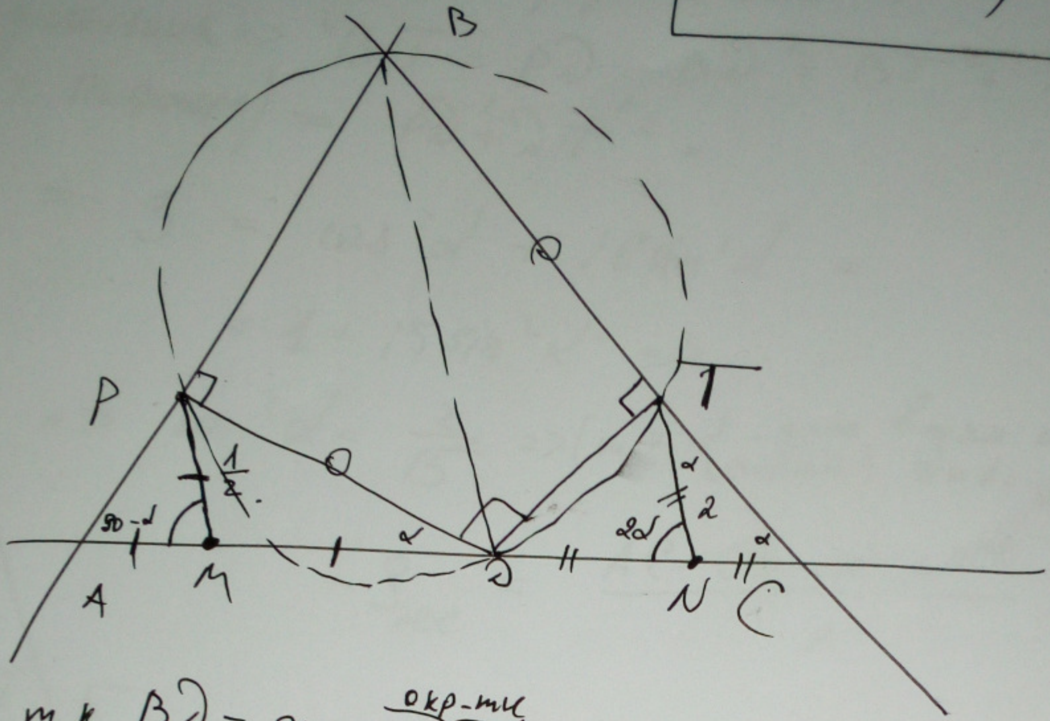
$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0<a<\frac{8}{7} \\ a<-6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty, -6) \cup (0, \frac{8}{7}) \cup (2, +\infty)$.

№1.

СТР. 1, ЧИСТОВИК



т.к. BD – диаметр окр-ти, то опирающиеся на него вписанные углы $\angle DPB = \angle DTB = 90°$ => $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольные(1), PM, TN – их медианы.

$\angle NCT = \alpha$ => т.к. медиана прям. $\triangle$ равна половине гипотенузы, из т. о внешнем угле

=> $\angle TND = 2\alpha$ = т.к. $TN \parallel PM$, AC – их секущая

$= \angle PMA = 2\angle ADP$ =>

=> $\angle ADP = \alpha$ => $\angle DAP = 90° - \alpha$ (т.к. $\triangle APD$ прям.)

=> $\angle ABC = 180° - \angle C - \angle A = 180° - \alpha - (90° - \alpha) =$
$= 90°$

Т.к. медиана (к гипотенузе) прям. $\triangle$ка равна половине гипотенузы, то

$AD = 2PM = 1$, $DC = 2TN = 4$. =>

=> $PD = AD \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$
$TD = DC \cdot \sin\alpha = 4\sin\alpha$, $AC = AD + DC = 5$

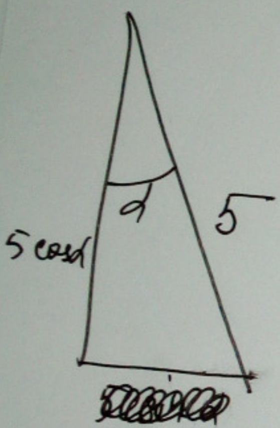
211005774 (U170095 M1274338)

в $PDTB$ углы B, P, T прямые => это прямоугольник => $BT = PD$, $BD^2 = BT^2 + DT^2$ (по т. Пифагора) $= PD^2 + DT^2 =$

$$= 3 = \cos^2\alpha + 16\sin^2\alpha =$$

$$= 1 + 15\sin^2\alpha =>$$

$=> \sin^2\alpha = \frac{2}{15}$ => (т. к. α - угол в прям. Δ, то он острый) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{15}}$



$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB \cdot \sin\angle ACB}{2} =$$

$$= \frac{AC \cdot (AC\cos\alpha) \cdot \sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{25\sqrt{1-\sin^2\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}}}{2} =$$

$$= \frac{25\sqrt{\frac{13}{15}}\sqrt{\frac{2}{15}}}{2} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$$

211005774 (U170095 M1274338)

$\Updownarrow$

№2.

СТР 3, ЧИСТОВИК

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}=$$

$$=2\sqrt{(x+2)}\sqrt{(3-x)}$$

$$\Updownarrow\quad \cancel{\sqrt{a}=\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}}$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}-2=2\sqrt{(x+2)(3-x)}-5=$$

$$=2\sqrt{(x+2)(3-x)}-\sqrt{x+2}^{\,2}-\sqrt{3-x}^{\,2}=$$

$$=-\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)^2+\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}-2=0$$

$$\Updownarrow\quad D=1+4\cdot 2=9$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=\dfrac{-1+3}{2}=1\\[2mm] \sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=\dfrac{-1-3}{2}=-2.\end{array}\right.$$

$$\Updownarrow\quad y=\sqrt{x+2},\quad \sqrt{3-x}=\sqrt{-y^2+5}$$

$$\left[\begin{array}{l}y-1=\sqrt{5-y^2}\\ y+2=\sqrt{5-y^2}\end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

СТР. 4, ЧИСТОВИК

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y^2-2y+1=5-y^2 \\ y^2+4y+4=5-y^2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y^2-y-2=0 \\ 2y^2+4y-1=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \\ y=-2+\sqrt{6} \\ y=-2-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ $y=\sqrt{x+2}\geqslant 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=1 \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{6}-2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=6+4-4\sqrt{6}=10-4\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8-4\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1,\ 8-4\sqrt{6}\}$

211005774 (U170095 M1274338)

СТР. 5, ЧИСТОВИК

№3.

Заметим, что при $a=0$: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=$

$= 4 = 0$ не имеет точек, а значит

B не определяется $\Rightarrow a \neq 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ B – вершина параболы.

$$y = x^2-2ax+a^2+\frac{4}{a} =$$

$$= (x-a)^2+\frac{4}{a}$$

вершина параболы x^2+px+q имеет коорд.

$\left(\frac{-p}{2}, \left(\frac{-p}{2}\right)^2+\frac{-p}{2}\cdot p+q\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \left(a, \frac{4}{a}\right)$.

$$5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{5}{4}a^2+3ax+2x^2+ay+2xy+y^2=0.$$

a таково, что это ур-е имеет одно решение $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists!\, x\in\mathbb{R}: D = (2x+a)^2-4\left(\frac{5}{4}a^2+3ax+2x^2\right)=0.$

$= 4x^2+4ax+a^2-5a^2-12ax-8x^2 =$

$= -4x^2-8ax-4a^2 = 0 = -4(x+a)^2$

$$\Updownarrow$$

$$(x+a)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -a$$

211005774 (U170095 M1274338)

стр. 6, чистовик

Это очев. верно $\forall a \in \mathbb{R}$, т.е. при всяком $a \in \mathbb{R}$: A определена, $x = -a$. =>

$$\Rightarrow \frac{5}{4}a^2 + 3a \cdot -a + 2a^2 + ay + 2 \cdot -a \cdot y + y^2 =$$

$$= \frac{5}{4}a^2 - 3a^2 + 2a^2 - ay + y^2 -$$

$$= y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = 0. =$$

$$= \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

$$\Downarrow$$

$$A = \left(-a, \frac{1}{2}a\right).$$

A лежит выше $y - 3x = 4 \Leftrightarrow y = 3x + 4$, тттк

$$\frac{1}{2}a > 3 \cdot -a + 4 = -3a + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a > \frac{4}{3.5} = \frac{4}{\frac{7}{2}} = \frac{8}{7}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A ниже $y = 3x + 4$ при $a < \frac{8}{7}$

B лежит выше $y-3x=4$ тттк

стр. 7
чистовик

$$B_y > 3B_x + 4$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4}{a} > 3a+4$$

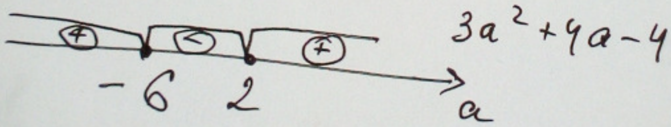
$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 > 3a^2+4a \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 < 3a^2+4a \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a^2+4a-4<0 \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a^2+4a-4>0 \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow \qquad D = 4^2 - 4\cdot -4\cdot 3 = 16+16\cdot 3 = 16\cdot 4 = 8^2$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -6<a<2 \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-6 \\ a>2 \end{array}\right. \\ a<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<a<2 \\ a<-6 \end{array}\right.$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005774**

ID профиля: **170095**

Вариант 11

№4. стр. 1, чистовик

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = x^2+y^2, \quad P = x^2y^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{S} + P = 5 \\ S^2 + P = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{S} + P = 5 \\ S^2 - \dfrac{4}{S} = 15 \end{cases}$$

$$S^2 - 4/S = 15$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S^3 - 15S - 4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} S = 4 \\ S^2 + 4S + 1 = 0 \end{array}\right. \qquad D = 16 - 4 = 12.$$

$$\Leftrightarrow$$

?

также т.к. ОСДТ парал., то

из правильности $\triangle BOC$

$$ДТ = OC = BC$$
$$CT = OД = AД$$

$\Downarrow$

$\triangle AДТ = \triangle TCB$ по двум сторонам и углу между ними.

$\Downarrow$

$$AT = BT$$
$$\angle ATД = \angle TBC = 180^\circ - \cancel{(}\angle BCT - \angle CTB\cancel{)} =$$
$$= 180^\circ - 120^\circ - \angle CTB =$$
$$= 60^\circ - \angle CTB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle ATД + \angle CTB = 60^\circ \Rightarrow$$
$$= \angle ATB = \angle CTД - (\angle ATД + \angle CTB) =$$
$$= 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle ATB$ равноб. с углом $60^\circ \Rightarrow$

$\triangle ATB$ правильный.

б) Площадь правильного $\triangle$-ка со стороной a равна $\frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} =$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

По т. косинусов $BA^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos\angle ABO =$

$$= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ =$$

№ 5

СТР 4, ЧИСТОВИК

~~I) Кол-во способов, где~~

Всего есть 64 ~~точки цел~~ точки в узлах (т.е. целочисленных) на $y=x$ внутри квадрата:

$\{(1,1),(2,2)\ldots(64,64)\}$ и столько же

на $y=65-x$:

$\{(1,64),(2,63),\ldots(64,1)\}$, причём эти мн-ва не пересек. Хотя бы одна точка лежит среди этих 128ми.

~~I~~ 1) Кол-во способов, где обе точки лежат на прямых $y=x$ или $y=65-x$:

128 выбрать первую

125 вторую: из ~~оставшихся~~ 128ми точек 3 точки (и сама первая, далее с той же x-коорд и с той же y-коорд.) выбрать нельзя, т.к. прямая через них очев. будет параллельна одной из сторон.

Тогда всего способов $\frac{128\cdot125}{2}$, т.к. каждую пару можно ~~выбрать~~ посчитать 2мя способами (порядок не важен.)

2) Кол-во способов, где ровно одна точка лежит на прямой $x=y$ или прямой $x=65-y$:

128 выбрать лежащую на одной из прямых.

$64^2-127-125$ вторую: всего есть 64^2 узлов внутри квадрата. Из них нельзя выбрать точку вида (x, i), или (j, y), где (x,y) − коорд. первой точки. Всего точек такого

вида 127: $\{(x,1), (x,2) \dots (x,y) \dots (x,64),$
$(1,y), (2,y) \dots (x,y) \dots (64,y)\}$

стр 5, чистовик

Также точка не принадлежит тем 128-ми точкам диагонали. 3 из них я уже "вычеркнули" среди тех 127, значит ещё 125 нужно вычесть.
Итого осталось $64^2 - 127 - 125 =$
$= 64^2 - 152 = 65384$

Тогда всего способов $128 \cdot 65384$. (где одна из точек на прямой)

Всего способов тогда

$$\frac{128 \cdot 125}{2} + 128 \cdot 65384 =$$

$$= 16000 + 8369152 = \boxed{8385152}$$

СТР. 9, ЧИСТОВИК.

$= 4 + 25 + 20 = 49 \Rightarrow BA = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$= \frac{5\sqrt{3}}{2} = S_{COD}$, т.к. эти △ки равны по 2м сторонам и углу. ($\angle AOB = \angle COD$ т.к. они вертик.).

$S_{OBC} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$\Downarrow$

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOD} + S_{COD} =$

$= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49/4\,\sqrt{3}}{49/4\,\sqrt{3}} = 1$

СТР 3, ЧИСТОВИК

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y^2 = 2 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

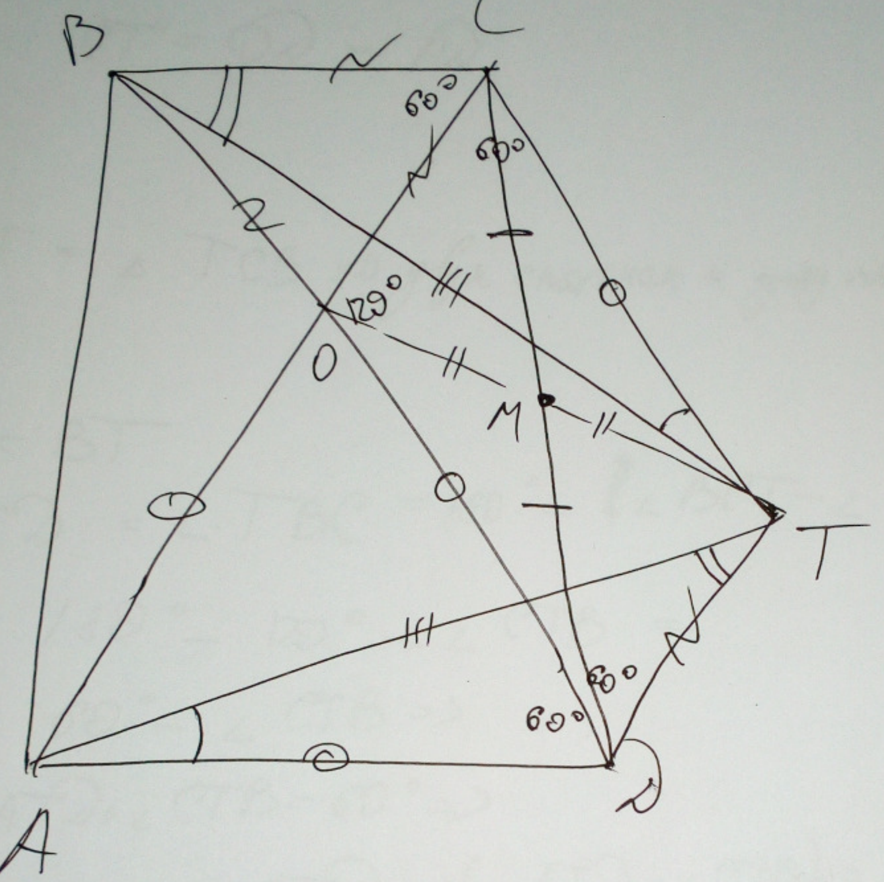
$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $\{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$
$(-(\sqrt{2}), \sqrt{2}),$
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$\}$

№6

$\boxed{\text{стр 6, чистовик}}$



M – сер. CD. ~~т.к. TVd~~ ~~V-результат удвое-~~ ~~ния//~~ в OCTD диагонали пересек. в серединах

$\Rightarrow$ это параллелограмм $\Rightarrow \angle ADT = \angle OCT =$

$= 180° - \angle DOC = 180° - (180° - \angle AOD) =$

$= \angle AOD = 60°$ т. к. $\triangle AOD$ правильный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120° =$

$= \angle TDA = \angle TDO + \angle ODA = 60° + 60° = 120°.$

стр 2, чистовик

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} s = 4 \\ s = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} \\ s = -2+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$ т.к. $s = x^2+y^2 \geq 0$, а $-2-\sqrt{3} < 0$

$-2+\sqrt{3} < 0$

$\Updownarrow$

$\sqrt{3} < 2$

$\Updownarrow$

$3 < 4.$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{s} + p = 5 \\ s = 4 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} s = 4 \\ p = 4 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ y^2(4-y^2) = -y^4+4y^2 = 4 \end{cases}$$

$-y^4+4y^2=4$ $\quad D =$ [redacted]

$\Updownarrow$

$(y^2-2) = 0$

$\Updownarrow$

$y^2 = 2$

$\Updownarrow$

СТР. 7

ЧИСТОВИК

211005774 (U170095 M1274339)

$AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos\angle ABD =$