Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

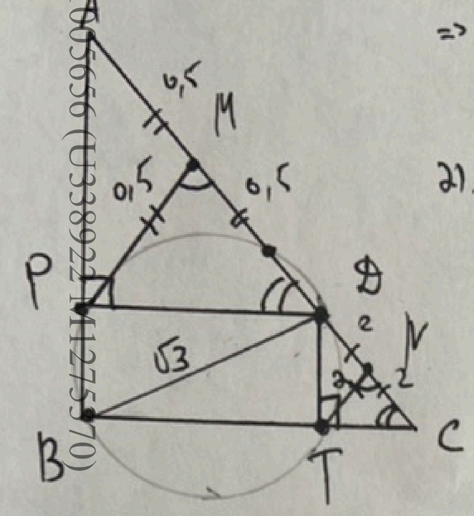
Шифр: **211005656**

ID профиля: **338922**

Вариант 11

В 11

№ 1



1). Т. к. BD – диаметр, а $\angle BTD$ и $\angle DPB$ – вписанные => они равны $= 90^\circ$, а смежные с ними углы $\angle DTC$ и $\angle DPA$ соответственно тоже равны $= 90^\circ$.

2). Опираясь на предыдущее и $AM = MD$, и $DN = NC$ => $PM = AM = MD$, $TN = DN = NC$ как медиана, проведенная к гипотенузе.

3) $\angle DMP = \angle CNT$, т.к. $PM \parallel TN$, но $\triangle PMD$ и $\triangle TNC$ – равнобедренные (опираясь на предыдущее). Тогда $\angle C = \angle MDP$ => $\angle CDT = 90^\circ - \angle C$, но $\angle MDP + \angle PDT + \angle CDT = 180^\circ$ => $\angle PDT = 90^\circ$, но $PDTB$ – вписанный => $\angle B = 180^\circ - \angle PDT = \underline{90^\circ}$ //

4) Основываясь на предыдущем и $MP = 0,5$, $NT = 2$ => $AM = MD = 0,5$ и $DN = NC = 2$. Отметим, что $\triangle DTC \underset{4}{\sim} \triangle APD$ => Пусть $AP = x$ => $DT = 4x$. Тогда $PD = \sqrt{1-x^2} = BT$, т.к. $PDTB$ – прямоугольник

$\triangle BDT$: $3 = 16x^2 + 1 - x^2$ => $15x^2 = 2$ => $x = \sqrt{\frac{2}{15}}$.

Тогда заметим, что $AB = 5x$, $BC = 5\sqrt{1-x^2}$ =>

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{5x \cdot 5\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{25 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}{2\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{13}}{3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt{26}$$ //

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=2 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow a-\frac{2}{a}=1 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1<0 \ \varnothing \\ \underline{a=2} \ '' \Rightarrow b=1. \end{array}\right. \\ \begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-\frac{1}{2a}=1 \Rightarrow 2a^2-2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \text{н.} \\ a,b>0 \end{array}\right.$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0 \Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{1+\sqrt{3}+4}{2}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

Решим отдельно: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2}=2 \\ \sqrt{3-x}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3-x}=\frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2=4 \\ 3-x=1 \end{cases} \Rightarrow x=2 \\ \begin{cases} x+2=\frac{4+2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}-4}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \\ 3-x=\frac{28+10\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x=\frac{12-28-10\sqrt{3}}{4}=\frac{-16-10\sqrt{3}}{4}= \end{cases} \end{array}\right.$$

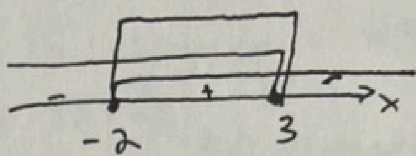
$= -4-\frac{5}{2}\sqrt{3}$, но эти числа не равны $\Rightarrow \underline{x=2}$ ''

В11:

№2.

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{6+x-x^2}-3$$

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ 6+x-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 3 \\ -(x-3)(x+2)\geq 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow x\in[-2;3]$

Пусть $\sqrt{x+2}=a$, $\sqrt{3-x}=b$, $a, b\geq 0$.

Тогда $a^2+b^2=5$. (1)

Перепишем уравнение, опираясь на замены:

$a-b=2ab-3$. (1)

Заметим, что $(a-b)^2-(a^2+b^2)=-2ab \Rightarrow -(a-b)^2+(a^2+b^2)=2ab$.

Тогда $a-b=-(a-b)^2+\underbrace{(a^2+b^2)}_{=5}-3 \Rightarrow a-b=-(a-b)^2+2$.

Пусть $t=a-b$. $\Rightarrow$

$t^2+t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Тогда подставим в (1)

1) $a-b=1$. $4=2ab \Rightarrow ab=2$.

2) $a-b=-2$ $1=2ab \Rightarrow ab=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} ab=2 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}} \ (1.1) \\ \cancel{\begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a^2+b^2=5 \end{cases}} \ (1.2) \end{array}\right.$ ~~Решим отдельно.~~

1.1) $\cancel{\begin{cases} a^2b^2=4 \Rightarrow a^2=\frac{4}{b^2} \\ a^2+b^2=5 \end{cases}}$ ~~$\Rightarrow \frac{4}{b^2}+b^2=5$. Проверим, может ли быть, если~~

~~$b=0$. Подставив $x=-2$ и $x=3$. Получим $-\sqrt{5}=-3$ и $\sqrt{5}=3$,~~

~~что ложь $\Rightarrow ab\neq 0 \Rightarrow 4+b^4=5b^2 \Rightarrow b^4-5b^2+4=0 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right.$, т.к. $b>0$. Подставим в начальную систему 1.1.~~

B 11

№3.

Заметим, что $a \neq 0$, т.к. $4 \neq 0$.

A: $5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$8x^2 + 2\cdot(4y + 6a) + 5a^2 + 4ay + 4y^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16y^2 + 36a^2 + 48ay - 40a^2 - 32ay - 32y^2 =$

$= -4a^2 - 16y^2 + 16ay = -4(a^2 + 4y^2 - 4ay) =$

$= -4(2y - a)^2$, т.к. A ∃. $\Rightarrow 2y - a = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{2}$.

$x = \frac{-4y - 6a}{8} = -a. \Rightarrow \underline{A(-a; \frac{a}{2})}$

B: $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0 \;/ : a \neq 0$

$x^2 - 2ax - y + a^2 + \frac{4}{a} = 0$

$y = (x - a)^2 + \frac{4}{a} \Rightarrow \underline{B(a; \frac{4}{a})}$, т.к. B - вершина.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005656**

ID профиля: **338922**

Вариант 11

B11:

№4.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \quad (1) \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \quad (2) \end{cases}$$

$x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x, y > 0$

Система симметричная: если $(a;b)$ - решение, то и $(-a;-b)$, и $(-a;b)$, и $(a;-b)$ - решения.

(2): $(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20$ Пусть $a = x^2+y^2 > 0$

$x^2y^2 = b > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{4}{a} + 20 - a^2 = 5 \quad | \cdot a \neq 0$$

$4 + 20a - a^3 = 5a \Rightarrow a^3 - 15a - 4 = 0$

Горнер.

	1	0	-15	-4
$a=4$	1	4	1	0

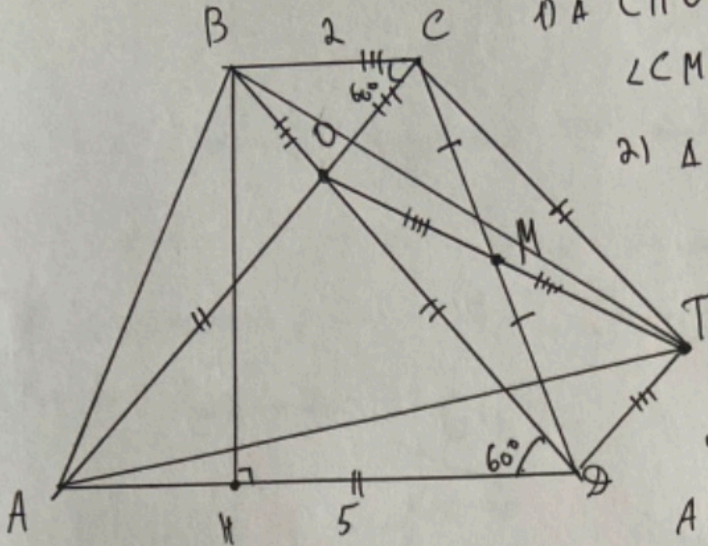
$a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2 \pm \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \varnothing$

~~$a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \varnothing$~~ $\underline{a = 4} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=-2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+y)^2=8 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+y)^2=0 \\ xy=-2 \end{cases} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\pm 2\sqrt{2} \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2};\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2};-\sqrt{2}) \\ \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases} \Rightarrow (-\sqrt{2};\sqrt{2}),\ (\sqrt{2};-\sqrt{2}) \end{array} \right.$$

~~Значения~~ Ответ: $\underline{(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})}$!!

211005656 (U338922 M1275371)



1) $\Delta CMO = \Delta MTD$, т.к. $OM = MT$ и $CM = MD$.
$\angle CMO = \angle TMD$. $\Rightarrow CO = TD$

2) $\Delta OMD = \Delta CMT$, т.к. $OM = MT$ и $CM = MD$
$\angle OMD = \angle CMT \Rightarrow OD = CT$

3) Из (1) и (2) $\Rightarrow OCTD$ – параллелограмм.

4) $AC = BD$, т.к. $BO + OD = AO + OC$ и $AD \parallel BC$, т.к. $\angle OAD = \angle BCO = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ – равнобедренная трапеция

5) $\angle COD = 120° \Rightarrow \angle ODT = 60° \Rightarrow \angle ADT = 120°$

$\angle COD = \angle CTD = 120° \Rightarrow \angle TCO = 60° \Rightarrow \angle BCT = 120°$

6) $\Delta ATD = \Delta COD$, т.к. $AD = OD$, $CO = DT$, $\angle ADT = \angle COD = 120° \Rightarrow AT = CD$

ΔBCT = ΔCOD, т.к. $CO = BC$, $CT = OD$, $\angle BCT = \angle COD = 120° \Rightarrow BT = CD$.

7) $CD = BA = AT = BT \Rightarrow \Delta ABT$ – правильный!

8) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{BOA} + S_{COD} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

9) $AB = a$, $\Rightarrow \Delta ABO$. по теореме косинусов. $a^2 = 25 + 4 + 10 = 39$.

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

10) ~~S_{ABT}~~ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$

211005656 (U338922 M1275371)

В11.

№5.

Не считая границы квадрата, получаем квадрат 64×64 точек!
Тогда всего 64^2 точек. Точек, лежащих на $y = x$ или $y = 65 - x$ (диагональ) ровно 127. Тогда для самой первой точки будет число комбинаций

$$\underbrace{64^2}_{\text{Кол-во всех точек}} - \underbrace{1}_{\text{выбранная точка}} - \underbrace{126}_{\text{точки, лежащие на прямых} \parallel Ox, Oy.}$$

Для второй точки: $64^2 - \underbrace{2}_{\text{выбранная точка и предыдущая, т.к. она уже учитывает}} - 126$

этот случай. $\Rightarrow$

$$\Sigma = 64^2 \cdot 127 - \frac{127 \cdot 128}{2} - 127 \cdot 126 =$$

$$= 64^2 \cdot 127 - 64 \cdot 127 - 126 \cdot 127 =$$

$$= 64^2 \cdot 127 - 190 \cdot 127 = (64^2 - 190) \cdot 127 =$$

$$(2^{12} - 190) \cdot 127 = (4096 - 190) \cdot 127 = \underline{3969 \cdot 127}$$