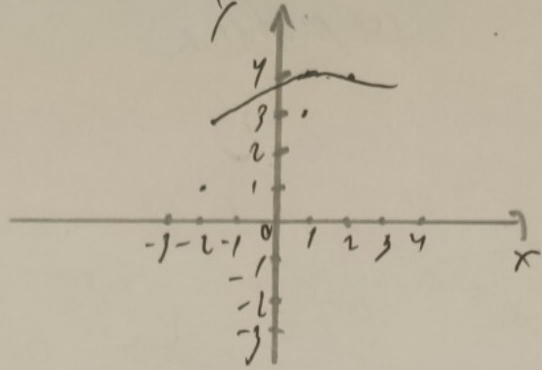
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005263**

ID профиля: **311508**

Вариант 11



При $x=-2$, $2\sqrt{6-2-4} = 2\sqrt{2} \approx 2,8$.

$\sqrt{3} = \sqrt{2-2} - \sqrt{3+2} + 3 = 3-\sqrt{2} < 1$

Возьмем точку $x=-1$.

$\sqrt{-1+2} - \sqrt{3+1} + 3 = 2$

$2\sqrt{6-1-1} = 4$

$\Rightarrow$ два граф. функ не ~~пересекаются~~ могут пересечься при $x \in [-2; -1]$, т.к. оба граф возр, но второй ($\sqrt{2+x} - \sqrt{3-x} + 3$) будет всегда ниже первого. Теперь решим отрезок $x \in [-1; 0,5]$ для второй гр функции y_{max} на этом отрезке $=3$, а y_{min} первой $= 4$ (обе функ $\uparrow$) $\Rightarrow$ ~~эти~~ графики не могут пересечься $\Rightarrow$ у ур-ния только один корень $x=2$.

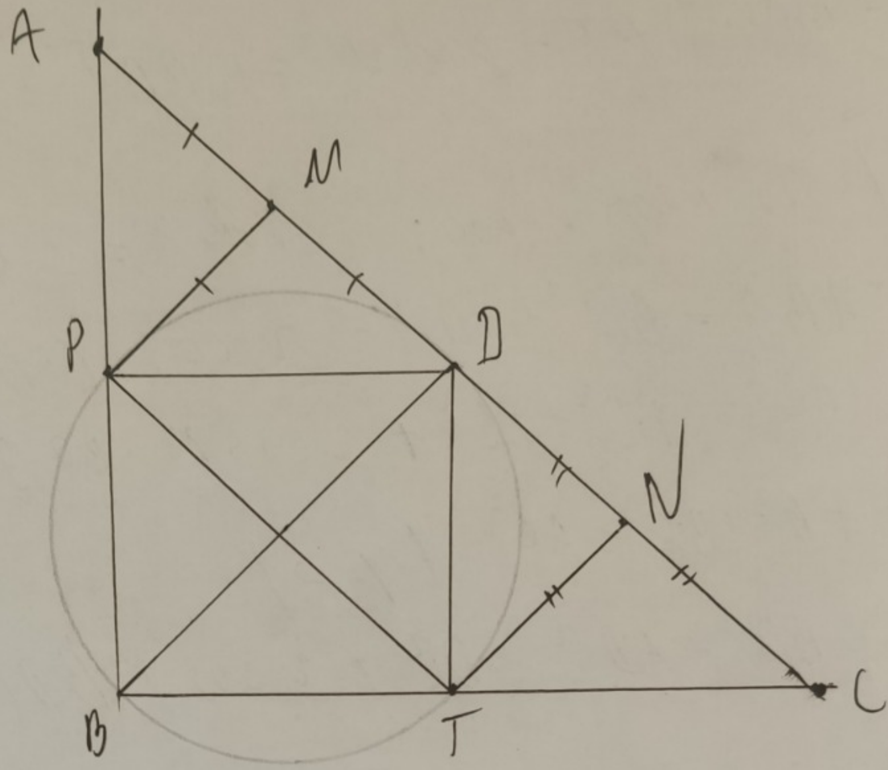
Ответ: $x=2$

4

211005263 (U311508 M1276548)

Чистовик.

№1



Дано:

$\triangle ABC$.
$D \in AC$
BD – диам.
$\omega(O) \cap AB = P$
$\cap BC = T$
M, N – сер AD, (DC)
$PM \parallel TN$

1) $\angle ABC$ – ?

2) $MP = \frac{1}{2}$
$NT = 2$
$BD = \sqrt{3}$
S_{ABC} – ?

1) Т.к. $\angle BPD = 90°$ (BD диам) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle APD = 90°$. Т.к. PM – медиана в $\triangle APD$ и $\angle APD = 90° \Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD$ (св-во пр. $\triangle$) $\Rightarrow PM = AM = MD \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle PMD$ – р/б (две стороны). Аналогично $\triangle DNT$ – р/б

Обозначим $\angle PDM = \alpha$; $\angle TDN = \beta$

$\angle PMD = 180° - 2\alpha$ (сум. $\angle \triangle$)

$\angle DNT = 180° - 2\beta$ (сум $\angle \triangle$)

Т.к. $PMNT$ – трапеция ($PM \parallel NT$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PMD + \angle DNT = 180°$

1

чистовик

$\Rightarrow 180^\circ = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta \Rightarrow 180^\circ = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. $\angle PDT = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ =$
$= 90^\circ \Rightarrow PT$ – диам $\Rightarrow \angle PBT = 90^\circ$ (опир. на диам.)

2) По теор. кос: $(\gamma = \angle BDA)$

$$\begin{cases} AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2\cos\gamma\, BD\, AD \\ BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2\cos\gamma\, BD\, DC. \\ AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad (\text{пр } \triangle) \end{cases}$$

$2BD^2 + AD^2 + DC^2 + 2\cos\gamma\, BD(DC - AD) = AC^2$

$23 + 2\cos\gamma\sqrt{3}(4-1) = 25$

$\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$AB^2 = 3 + 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot 1$

$AB = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$BC^2 = 3 + 16 + 2\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot 4$

$BC = \sqrt{\frac{65}{3}}$

$S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{\frac{65}{3}}\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

2

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $S_{ABC} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

211005263 (U311508 M1276548)

Чистовик

№2

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{-(x-0{,}5)^2+6{,}25}$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+2} \text{ — возр функ,} \\ \sqrt{3-x} \text{ — уб функ}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3$ — возр функ

$2\sqrt{-(x-0{,}5)^2+6{,}25}$ убывает при $x\in[0{,}5;3]$.
возрастает при $x\in[-2;0{,}5]$

$\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ 3-x\geqslant 0 \\ 6+x-x^2\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow x\in[-2;3]$

$\Rightarrow$ есть возможен только 1 корень при $x\in[0{,}5;3]$. Найдём его подбором.

Это $x=2$ $\quad\sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2\sqrt{6+2-4}$
$4=4.$

Докажем, что нет корней при $x\in[-2;0{,}5]$

3

211005263 (U311508 M1276548)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005263**

ID профиля: **311508**

Вариант 11

Чистовик. (1)

№4.

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

1) если $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{y^2}=5 \Rightarrow y^2=\frac{4}{5} \\ x^4=20 \Rightarrow y^4=20 \end{array}\right\} \ne 4,$$ что невозможно $\Rightarrow$

$\Rightarrow x\ne 0$. т.к. ур-ния

симметрические $\Rightarrow y\ne 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20. \end{cases}$$ замена: $x^2y^2=b$

$x^2+y^2=a$

$\Rightarrow a>0$

$b>0$

$$\begin{cases} \frac{4}{a}+b=5 \\ a^2+b=20 \end{cases} \Rightarrow a^2-\frac{4}{a}=15 \Rightarrow a^3-15a-4=0$$

$\Rightarrow a^3-15a-4=0$

$(a-4)(a^2+4a+1)=0$

$D_1=3$; $a_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$. $a_2; a_3<0 \Rightarrow a_2; a_3$ не подх.

$a_1=4 \Rightarrow b=20-a^2=4$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2=4-y^2$

$x^2y^2=4 \Rightarrow (4-y^2)y^2=4 \Rightarrow y^4-4y^2+4=0 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$x^2=4-2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

№5. Чистовик 2

Фактически нам доступен квадрат с размерами 64×64. Т.к. ~~его~~ длина его стороны чётна ⇒ диагонали не пересекаются в 1 узле сетки. ($y = x$; $y = 65 - x$ являются диагоналями этого квадрата)

Посчитаем, сколько способов разместить 1 узел на одной из диагоналей. Это $2^6 + 2^6 = 2^7$. А тогда способов разместить второй узел $= 2^6 \cdot 2^6 = 2^{12}$. Всего $= 2^7 \cdot 2^{12} = 2^{19}$

Теперь посчитаем кол-во способов, которыми нельзя размещать. Это ~~$(2^6+2^6)(2^6+2^6-1)$~~ $(2^6+2^6) \cdot (2^6+2^6-1)$

$= 2^7(2^7 - 1)$

вычтем из всего то, сколько нельзя: $2^{19} - (2^7)(2^7 - 1) =$
$= 2^{19} - 2^{14} + 2^7$

Можно еще по-другому считать, сразу учитывая невозможные размещения: $(2^6 + 2^6)(2^6 - 1)(2^6 - 1) =$
$= 2^{19} - 2^{14} + 2^7 = 508032$

Ответ: $2^{19} - 2^{14} + 2^7 = 508032$

211005263 (U311508 M1276549)

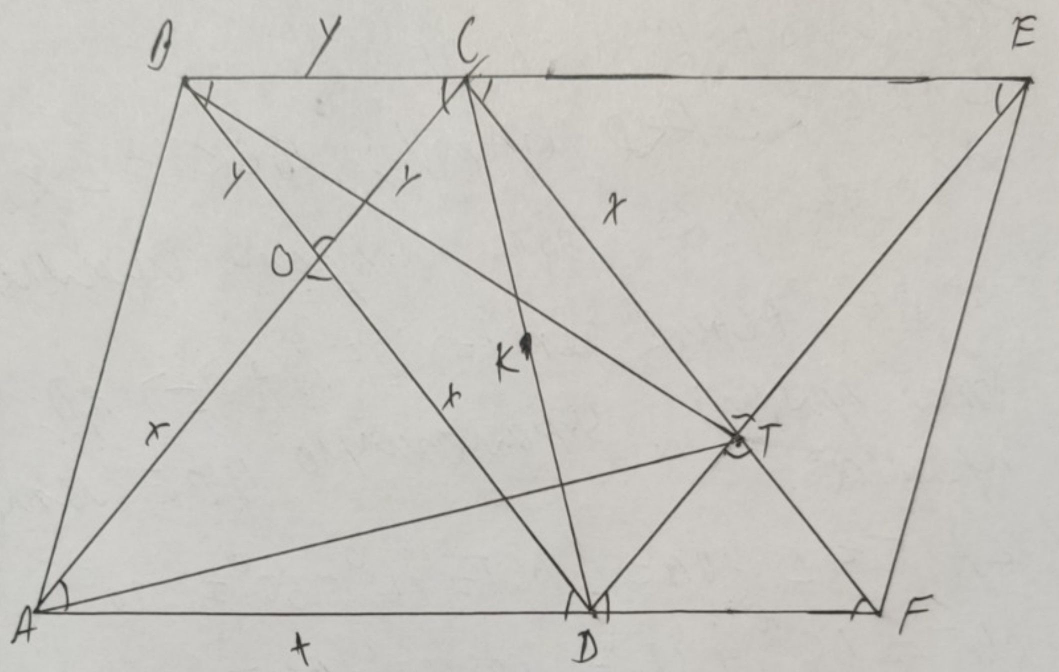
чистовик №6. 3

Дано:
ABCD - вып
$AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - прав.
T симм. т O отн сер CD

п) Док-ть:
ABT - прав

б) $BC = 2$
$AD = 5$
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:



1) Рассм $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$
$\angle CBO = \angle ADO \Rightarrow BC \parallel AD$ (нак. леж. ∠)
$\Rightarrow$ ABCD - трап. Пусть $BC = y$; $AD = x$
тогда $BD = x+y$; $CA = x+y \Rightarrow CA = BD =$
$= x+y \Rightarrow$ ABCD - р/б трап (диаг равны)
т.к. T - симм т O отн т K $\Rightarrow$ ~~отн~~ т T
- ~~[illegible]~~ точка пересеч. диаг. в симм отн
т T трап CDFE. Докажем, что ~~[illegible]~~
BCE; ADF лежат на одной прямой, что
точки C и D ~~[illegible]~~ явл. вершинами
обеих трапеций.

чистовик

При симметрии т. C переходит в т. D, ④
а т. D в т. C ⇒ C и D ∈ осям трап.
Рассм $\triangle BCK$ и $\triangle KDF$
$\angle BKC = \angle FKD$ (верт); $\angle BCK = \angle KDF$ (по постр, т.к. эти две прям симметр) ⇒
⇒ $DF \parallel AC$ (нак лет) ⇒ $DF \parallel AD$ ⇒ A; D; F лежат на одной прямой. Аналогично B C E лежат на одной прямой.

$\angle ADT = \angle AOB = \angle BCT = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\begin{cases} BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos 120^\circ \cdot BC CT \\ AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\cos 120^\circ \cdot AD DT \\ AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cos 120^\circ AO BO \end{cases}$$ по т. кос

$$\left.\begin{matrix} BT^2 = y^2 + x^2 + 2\cos 60^\circ xy \\ AT^2 = y^2 + x^2 + 2\cos 60^\circ xy \\ AB^2 = y^2 + x^2 + 2\cos 60^\circ xy \end{matrix}\right\} \Rightarrow BT = AT = AB \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - прав, ч.т.д.

б) $BT = \sqrt{25 + 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{39}$

$S_{ABT} = \frac{BT \cdot AT \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{39 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$

$= 5\sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$ Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{39}{49}$

211005263 (U311508 M1276549)