Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005256**

ID профиля: **848313**

Вариант 11

чистовик Григорьев В.

1) Дано:

$\triangle ABC$

$(\cdot) D \in (AC)$

$w \cap AB = P$

$w \cap BC = T$

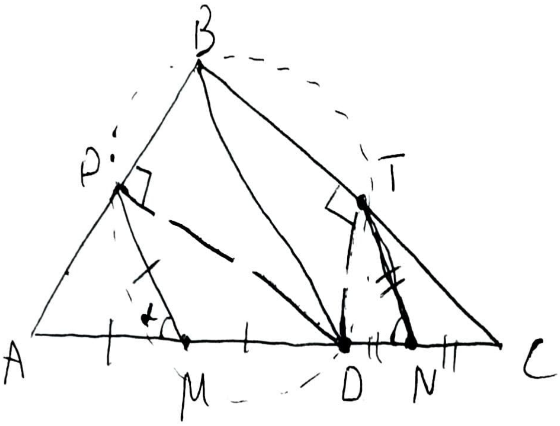
$AM = MD$; $DN = NC$

$PM \parallel TN$

Н-ти: 1) $\angle ABC$

2) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 2$; $BD = \sqrt{3}$

Н-ти: $S_{\triangle ABC}$



Решение:

1) $\angle PMA = \angle TNM$ (соответствен. при $PM \parallel TN$, AC - сек.)

сведения PD и TD:

$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ (опирающиеся на диаметр BD)

т.о. $\angle DTC = \angle APD = 90^\circ$

В п-оч-ке APD: $PM = AM = MD$ (как медианы провед. из прямого угла)

в $\triangle$-ке $\triangle DTC$: $TN = DN = NC$

Обозначим $\angle PMA = \angle TND = \alpha$, т.о. $\angle PAM = \frac{180 - \alpha}{2}$ (т.к. $\triangle$-к PMA - равнобед. по опредед. $PM = AM$)

$\angle NDT = \frac{180 - \alpha}{2}$ (т.к. $\triangle TND$ - р/б $TN = DN$)

⇓

$\angle PAM = \angle NDT = \frac{180 - \alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $AP \parallel DT$ (т.к. соотв. углы)

т.о. $BP \parallel DT \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BTD = 90^\circ$

2) $MP = \frac{1}{2} \Rightarrow AP = 2MP = 1$

$NT = 2 \Rightarrow CD = 2NT = 4$ $\Big\} \Rightarrow AC = 5$

$\exists\ \angle ADB = \beta$; $\angle BDC = 180 - \beta \Rightarrow \cos\beta = -\cos(180 - \beta)$

$\triangle ADB$: т. кос-ов: $BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cos\beta = AB^2$

$\triangle BDC$: $BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos\beta = BC^2$ ($\cos(180-\beta)$ заменим на $-\cos\beta$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\beta = AB^2 \\ 3 + 16 + 8\sqrt{3}\cos\beta = BC^2 \end{cases}$ +

Сложим, учитывая $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 5^2 = 25$: $23 + 6\sqrt{3}\cos\beta = 25 \Rightarrow \cos\beta = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

В $\triangle ABD$: $AB^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\beta = 4 - \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{9} = 4 - \frac{2 \cdot 3}{9} = 4 - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - \frac{10}{3} = \frac{65}{3} \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{65}{3}}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 \cdot 65}{3 \cdot 3}} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$

Ответ: 1) 90°; 2) $\frac{5}{6}\sqrt{26}$

② $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{x+6-x^2}$

(*) $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2;3] \\ x^2-x-6\leq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

$\exists\ \sqrt{x+2}=a$

$\sqrt{3-x}=b,\ a^2+b^2=5$

Т.О. $\begin{cases} a-b+3=2ab \text{ - на ОДЗ } (1) \\ a^2+b^2=5\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2ab-3 \\ (a-b)^2=5-2ab \end{cases} \oplus^{\text{сложим}} \Leftrightarrow (a-b)^2+a-b=2$

Р-м относительно $a-b$: $(a-b)^2+(a-b)-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a-b)_1=-2\\(a-b)_2=1\end{array}\right.$ - по т. Виета

Т.О. $\left[\begin{array}{l}a=b-2\\ \text{или } a=b+1\end{array}\right.$ Т.е. $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-2 \Leftrightarrow x+2=3-x-4\sqrt{3-x}+4 \Leftrightarrow 2x-5=-4\sqrt{3-x} \\ \text{или} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+1 \Leftrightarrow x+2=3-x+2\sqrt{3-x}+1 \Leftrightarrow 2x-2=2\sqrt{3-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\sqrt{3-x}=5-2x \\ \text{или} \\ x-1=\sqrt{3-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16(3-x)=(5-2x)^2 \\ \text{или} \\ (x-1)^2=3-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-4x-23=0 \\ \text{или} \\ x^2-x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\frac{1\pm2\sqrt6}{2} \\ \text{или} \\ x_3=2 \\ x_4=-1\end{array}\right.$

$D=16+16\cdot23=384$ $x=\frac{4\pm\sqrt{384}}{8}=$ 8·24

$2\sqrt6=\sqrt{24}<\sqrt{25}=5 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{24}}{2}<\frac{6}{2}=3$ - удовл ОДЗ;

$-\sqrt{24}>-\sqrt{25}=-5 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{24}}{2}>\frac{-4}{2}=-2$ - удовл. ОДЗ.

Ответ: $\left\{-1;2;\frac{1\pm2\sqrt6}{2}\right\}$

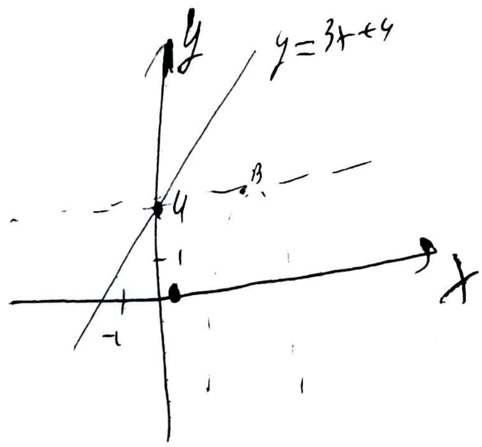
③ (1) $5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2=0 \Leftrightarrow 5a^2+4a(3x+y)+4(2x^2+2xy+y^2)=0$

(2) : $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4=0 \Rightarrow a((a-x)^2-y)+4=0$ — Г(f) — парабола

(вершина $B(y;4)$)

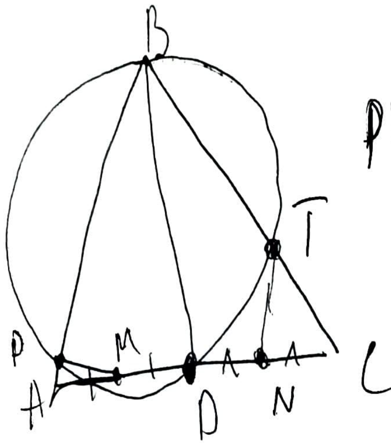
1) $y>0$, $y\neq 4$

$D=\cancel{16a^2-80}$ $16(3x+y)^2-80$



черновик

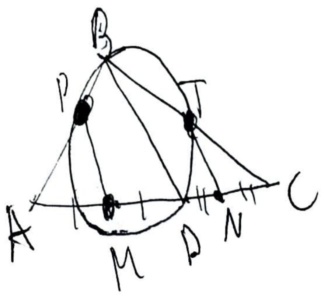
① Дано:

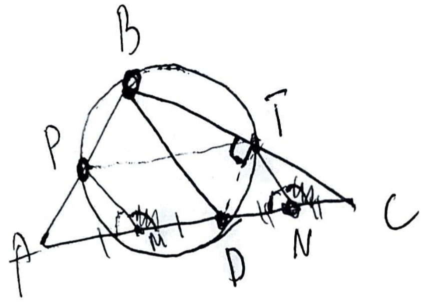


$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

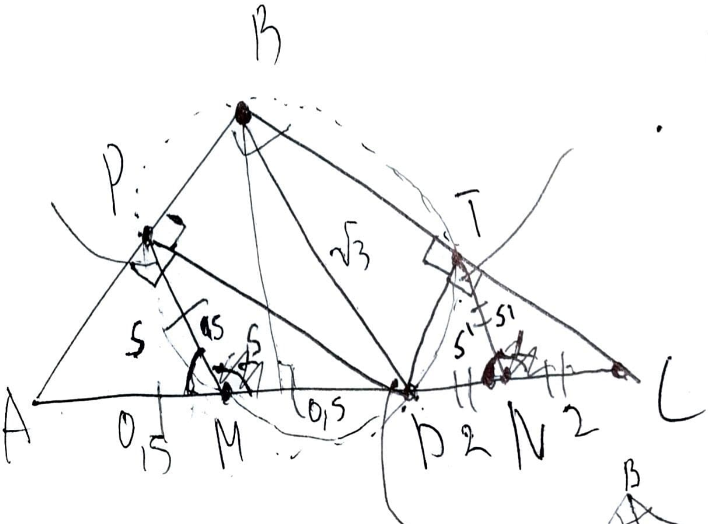
BP - диаметр





$\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$

$\sqrt{5\cdot 2\cdot 5\cdot 13}=\dfrac{5\sqrt{26}}{6}$



1) Соединим PD и TD

$\angle T = \angle P = 90^\circ$ (на д-р)

$TD \perp BC$ | $TN = DN = NC$ (медиана)

Т.О. $\angle DTN = \angle APM$

$\angle TDN = \angle PAM$

$\Downarrow$

$AB \parallel PT$ $\Rightarrow$ $\angle ABC = 90^\circ$

$AC = 5$

$4 - 2\sqrt{3}\cos\beta + \cancel{19} + 8\sqrt{3}\cos\beta = \cancel{25}^{2}$

$6\sqrt{3}\cos\beta = 2 \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \to AB \to 5$

$1+3-2\sqrt{3}\cos\beta = AB^2$ ⊕

$\cancel{16}+3+8\sqrt{3}\cos\beta = BC^2$

~~$AB = \sqrt{4}$~~

$4-2\sqrt{3}\cos\beta + 19 + 8\sqrt{3}\cos\beta = 25$

$\frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3}$ $4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

черные

② $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{x+6-x^2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$

(*) $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \\ x \in [-2;3] \end{cases} \Leftrightarrow$

$-2 \quad 3$

$\Rightarrow x \in [-2;3]$

$\sqrt{x+2} = a$

$\sqrt{3-x} = b$

$a^2+b^2 = x+2+3-x = 5$

$\begin{cases} a-b+3 = 2ab \Leftrightarrow a(1-2b) = b-3 \\ a^2+b^2 = 5 \,|\, \cancel{-2ab} \end{cases}$

$a = \frac{b-3}{1-2b}$

$\Updownarrow$

$\cancel{(a-b)^2 = 5-2ab}$

$\cancel{2ab + a^2+b^2-5 = 2ab}$

$\frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2} + b^2 = 5$

$a-b+$

(1) $\cancel{(a-b)^2 = -2\ldots}$

$a-b = 2ab-3$

$(a-b)^2 = 5-2ab$ +

$\cancel{a-b = \frac{5-2ab}{2ab-3}}$

$(\overset{t}{a-b})^2 + (\overset{t}{a-b}) = 2$

$\cancel{a-b}$ $\quad x^2+x-2=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 = a-b \Rightarrow a = b-2 \\ x = 1 = a-b \Rightarrow a = b+1 \end{array}\right.$

$\frac{1+5}{2}$

$\sqrt{24} < 5$

$4-2\sqrt{6}$ $\quad \frac{1-5}{2}$

$4x$

$4b - 16x = 25 - 20x + 4x^2$

$4x^2 - 4x - 23 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 3 - x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 16 \\ \hline 144 \\ 24 \\ \hline 384 \end{array}$

$x^2 - 4x - 92 = 0$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 16 \\ \hline 138 \\ 23 \\ \hline 368 \end{array}$

$1 \quad 378 \quad + \quad 384$

$D = 16 + \ldots$ $\quad D = 16 +$

$\sqrt{\frac{384}{16}}$

$\frac{1 \pm 2\sqrt{6}}{2}$ $\quad \frac{4 \pm \sqrt{384}}{8}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005256**

ID профиля: **848313**

Вариант 11

$x^2+y^2\neq0$ ~~$xy\neq0$~~ $x\neq0$, $y\neq0$

1 (4)

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5\\ x^4+y^4+3x^2y^2=20\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{4}{x^2+y^2}+(xy)^2=5\\ (x^2+y^2)^2+(xy)^2=20\end{cases}$$

$\exists\ x^2+y^2=a,\ xy=b$, $a,b\neq0$, $a>0$

(*) $x=0$: $\begin{cases}\dfrac{4}{y^2}=5\\ y^4=20\end{cases}\iff\begin{cases}y^2=\dfrac{4}{5}\\ y^4=20\end{cases}$?! — нет реш. т.е. $x\neq0$

$y\neq0$ — аналогично

тогда $\begin{cases}\dfrac{4}{a}+b^2=5\\ a^2+b^2=20\end{cases}$ $(-)$ $a^2-\dfrac{4}{a}=15\iff a^3-13a-4=0\iff a^3-4a^2+4a^2-16a+a-4=0\iff$

$\iff(a-4)(a^2+4a+1)=0\iff\left[\begin{array}{l}a_1=4\\ a_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$ $D=12$

$a_{2,3}$ — не удовл. усл. $a>0$, $\sqrt3<2$

Т.О. $b^2=20-a^2$

т.е. 1) $b^2=20-16=4\iff\begin{cases}a=4\\ b=\pm2\end{cases}$

~~2) $b^2=20-(-2+\sqrt3)^2=20-7-4\sqrt3=13-4\sqrt3\iff b=\pm\sqrt{13-4\sqrt3}\iff b=\pm\sqrt{(2\sqrt3-1)^2}$~~

~~$\iff b=\sqrt{(2\sqrt3-1)^2}=2\sqrt3-1$, $b=-\sqrt{(2\sqrt3-1)^2}=1-2\sqrt3$ т.е. $a=$~~

Т.О. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2=4\\ xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2=4\\ xy=-2\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+\dfrac{4}{x^2}=4\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+\dfrac{4}{x^2}=4\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\end{array}\right.$

Р-м: $\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^2}=0$ 1) $x\neq0$ (*): $x^4-4x^2+4=0\Rightarrow x^2=2\iff x=\pm\sqrt2$

$\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\sqrt2\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt2\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt2\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt2\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\sqrt2\\ y=\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt2\\ y=-\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt2\\ y=-\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt2\\ y=\sqrt2\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt2;\sqrt2)$ $(-\sqrt2;-\sqrt2)$ $(\sqrt2;-\sqrt2)$ $(-\sqrt2;\sqrt2)$

чистовик

5) (2)

по ф-ле Пика: $В+\frac{Г}{2}-1=S=\frac{1}{4}S_{\square}$ — фигура состоит из 4 равных Δ-ков

В — узлы внутри 1-го Δ-ка; Г — на границе. $S_{\square}=65^2$; $Г=66+66-2=130$

т.о. $В=\frac{65^2}{4}-64=992$ клетки внутри каждого Δ-ка.

66 — на каждой диагонали

т.к. диагональ равна $65\sqrt{2}$

(+1)

66-2 на стороне

1) 4 узел получ.: (1;1): $992-(6\cancel{8}^{62}-4)=930$ — 1 Δ-к.

930 — 2-ой

992 — 3-ий

992 — 4-ый

+ 66-3=63

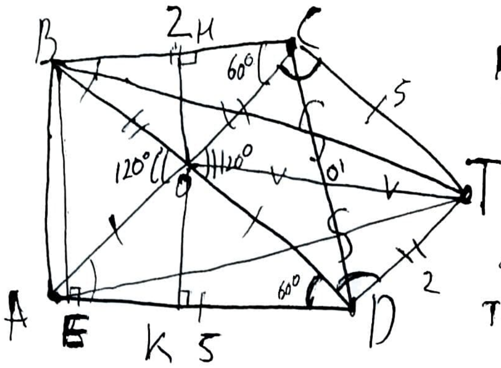
+ 66-3=63

⑥ ③ Дано: чистовик

ABCD – выпукл

⑥ $AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правил.



Р-е: ∃ $OT \cap CD = O'$; $BC \parallel AD$ (накрест лежат углы)

ABCD – трапеция

1) OCTD – параллелограм (т.к. T симметр. O по признаку 2 стороны равны)

$\Rightarrow$ ~~$O'C = OT$~~

т.е. $DT = CO'$, $CT = OD$ (по св-ву парал.); $CO' = O'D$; $OO' = O'T$ (диагонали)

$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle BCT = \triangle ABO$ (по 2 ст-ам и углу)

Док-ть: $\triangle ABT$ – правил.

Т.к. $\angle OCT = 60°$ (при $CT \parallel OD$ в парал.)

$\angle TDO = 60°$ – Аналогично. при $CO \parallel DT$

$\angle ADT = \angle BCT = \angle AOB = 120°$

стороны отмечены штрихами

2) $BC = 2$, $AD = 5$

Н-ти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Т.О. $AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

Ч.Т.Д.

2) $OH \perp BC$ $\quad$ ~~Ha~~

$OK \perp AD$

$S_{BOC} = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \frac{HO \cdot BC}{2} \Rightarrow HO = \frac{2\sqrt{3}}{BC} = \sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{1}{2} 5 \cdot 5 \cdot \sin 60 = \frac{25\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{OK \cdot AD}{2} \Rightarrow OK = \frac{25\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

S трапеции

Т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow OH \perp BC$, $OK \perp AD$ лежат на одной прямой: $HK = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{2+5}{2} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABO = \triangle COD$ (по 2 ст и углу) $\Rightarrow AB = CD$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow ABCD$ – р/б трапеция

Т.О. $BE \perp AD$: $AE = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ – высота

в $\triangle AEB$: $AB^2 = AE^2 + BE^2$ (по т. пифагора) $\quad AB = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{49 \cdot 3}{4}} = \sqrt{\frac{18+147}{4}} = \frac{\sqrt{165}}{2}$

$AE = \frac{3}{2}$; $BE = HK = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Т.О $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{165}{4} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{165}{16}\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{165\sqrt{3} \cdot \cancel{4}}{\underset{4}{\cancel{16}} \cdot 49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{165}{196}$

Ответ: $S_{ABT} : S_{ABCD} = 165 : 196$.

③

(4) черновик

(1) $\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \Leftrightarrow \frac{4+(x^2+y^2)x^2y^2}{x^2+y^2}=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$

$\frac{4}{x^2+y^2}+x^2$

$(x^2+y^2)+x^2y^2=20$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=20$

$\frac{12}{x^2+y^2}=15-3x^2y^2$

$x^4+y^4=20-3x^2y^2$

$\ominus \quad 5=x^4+y^4-\frac{12}{x^2+y^2}$

x^4+y^4

$\exists\, x^2+y^2=4 \quad , x,y\neq 0$

$xy=6$

(1) $\frac{4}{x^2+y^2}+(xy)^2=5$

(2) $(x^2+y^2)^2+(xy)^2=20$

тогда $\begin{cases} \frac{4}{a}+b^2=5 \\ a^2+b^2=20 \end{cases} \ominus \Leftrightarrow a^2+b^2-\frac{4}{a}-b^2=15 \Leftrightarrow \frac{a^3-15a-4}{a}=0$

$a\neq 0$

Т.о. $a^3-15a-4=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x^2-16x+x-4=0$

$(x-4)(x^2+4x+1)=0$

$b^2=20-a^2>0$

$b=\pm 2$

$b^2=20-(-2-\sqrt{3})^2=20-(7+4\sqrt{3})$ $\quad (2)^2+(-\sqrt{3})^2 \quad 13-4\sqrt{3}$

$\boxed{\begin{matrix} a=4 \\ a=-2\pm\sqrt{3} \end{matrix}}$

$20-a^2>0$

$a^2<20 \Leftrightarrow a\in(-\sqrt{20},$

$(x^2-2)^2 \quad x^2=2$

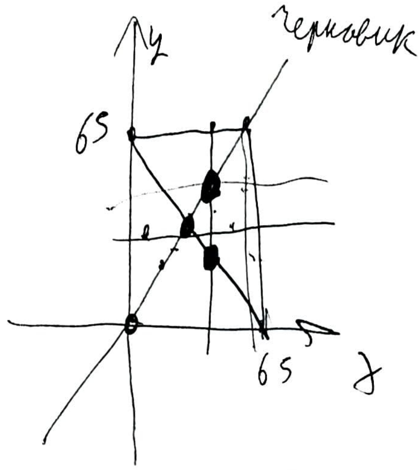
$\frac{16}{25}$

$\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}$

$2\cdot 2\sqrt{3}$

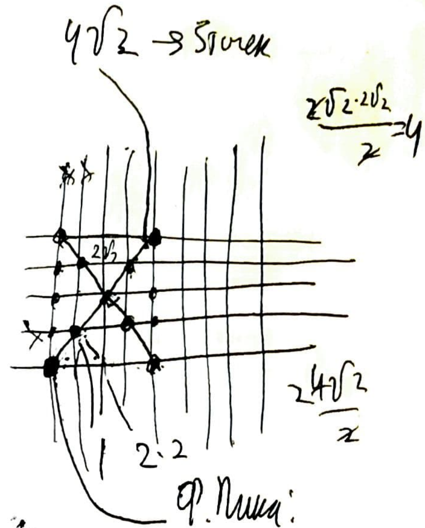
$\frac{4}{}=3 \quad x^4=20 \quad \frac{x}{}+\ldots=3$

5



$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 4225 \end{array}$$

2 или



$\frac{4}{2} = 2+2+1$ $\quad B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = S$

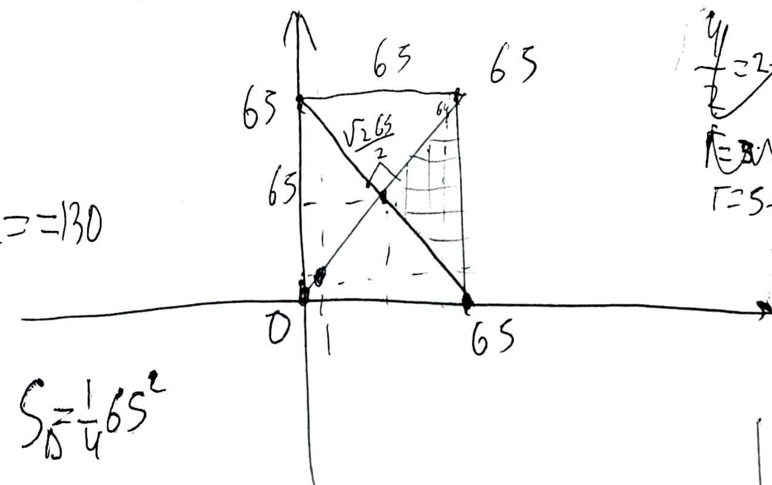
$\Gamma = 11$

$\Gamma = 5+3+3 = 11$

$B + \frac{B}{2} - 1 = 4$

$B + 3{,}5 = 3$

$B = 0{,}5$



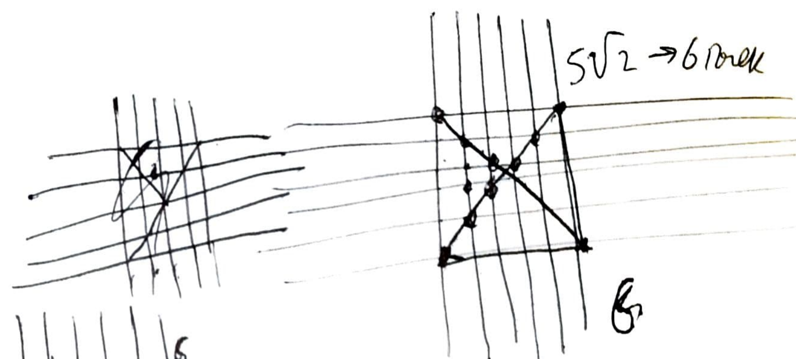
$\Gamma = 66 + 66 - 2 = \overset{64}{} = 130$

$S_{\Delta} = \frac{1}{4} 65^2$

$= B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = B + 64 \Rightarrow$

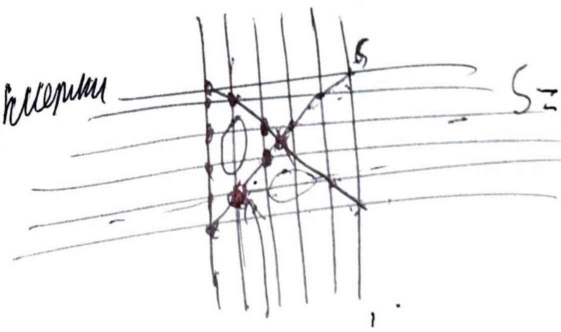
$\Rightarrow B = \frac{65^2}{4} - 64 =$

$= 992$ искомое



6

$\Gamma = 6 + 6 - 2 = 10$



$S = \frac{1}{4} 25 = \frac{25}{4}$

$B = \frac{25}{4} + 1 - 5 =$

$= \frac{9}{4} = 2{,}25$