Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005177**

ID профиля: **217293**

Вариант 11

Чистовик

1.

а) Дано:

$D \in AC$

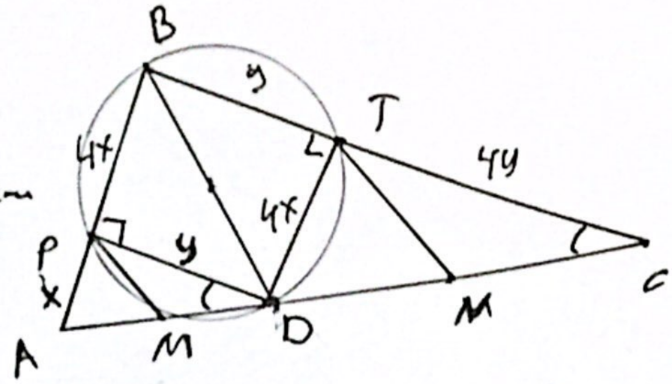
B, P, D, T - лежат на окружности

BD - диаметр.

$PM \parallel TN$

$AM = MD$, $DN = NC$

$\angle ABC$ - ?



Решение:

Раз точки B, P, D, T лежат на одной окружности и BD диаметр то угол ~~опи~~ опирающийся на диаметр равен 90° => $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ =$
$= \angle APD = \angle DTC$

Значит $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоугольные.

В прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы => $PM = AM = MD$ и $TN = DN = NC$

Тогда $\angle AMP = \angle DNT$ так как $PM \parallel TN$

$\angle AMP = \angle MPD + \angle MDP = 2\angle MDP = \angle DNT = \angle NTC +$
$+ \angle NCT = 2NCT$ => $\angle MDP = \angle NCT$

Тогда $\angle TDC = 90^\circ - \angle DCT = 90^\circ - \angle PDA$ => $\angle PDT = 90^\circ$

Тогда в четырехугольнике 3 угла по 90° и так как сумма углов в четырехугольнике 360° то

$\angle ABC = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Значит $\angle ABC = 90^\circ$ ($BPDT$ - прямоугольник)

все углы 90° градусов

$PM = \frac{1}{2} AD$ и $DN = NT = NC = \frac{1}{2} DC$

$TD = BP$ и $BT = PD$

Scanned with CamScanner

1.

Чистовик

б) Дано:

$MP = \frac{1}{2}$, $TM = 2$, $BD = \sqrt{3}$

S_{ABC} - ?

Решение:

В предыдущем пункте было показано что $\triangle APD$ - прямоугольный и $\triangle DTC$ - прямоугольный и $\angle ADP = \angle TCD$ ⇒ $\angle APD = \angle DTC = 90°$, $\angle ADP = \angle DCT$

⇒ $\triangle APD \sim \triangle DTC$ (подобие по двум углам)

Пусть $AP = x$ и $PD = y$

Тогда $\frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{PM}{TM} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ ⇒ $DT = 4x$, $TC = 4y$

(т.к. все соответствующие отрезки подобны с одним и тем же коэффициентом)

Раз ABCD - прямоугольник (все углы 90°) то $BD = PT$

По теореме Пифагора для $\triangle APD$

$AD^2 + PD^2 = x^2 + y^2 = AD^2 = 4PM^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Для $\triangle PDT$

$PD^2 + DT^2 = y^2 + 16x^2 = PT^2 = BD^2 = 3$ (x и y - отрезки $x, y \geq 0$)

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \cancel{x^2 + 16y^2}\ 16x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2}{15} \\ y^2 = \frac{13}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \sqrt{\frac{2}{15}} \\ y = \sqrt{\frac{13}{15}} \end{matrix}$

Так как $\angle ABC = 90°$ то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC =$

$= \frac{1}{2}(AP + BP) \cdot (BT + TC) = \frac{1}{2}(TD + AP)(PD + TC) = \frac{25xy}{2}$

$S_{ABC} = \frac{25 \cdot \frac{\sqrt{26}}{15}}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$. Ответ: 90°, $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

Scanned with CamScanner

2. Чистовик

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2} = 2\sqrt{(3-x)(x+2)}$$

Пусть $a=\sqrt{x+2}$, $\Rightarrow$ $x \geq -2$ и $a \geq 0$

Пусть $b=\sqrt{3-x}$ $\Rightarrow$ $x \leq 3$ и $b \geq 0$

ОДЗ $x = [-2;3]$

$$a - b + 3 = 2ab$$

$a^2 = x+2$

$b^2 = 3-x$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2=5$

$$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2ab-3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(2ab-3)^2=4a^2b^2+9-12ab$$

$$\begin{cases} 4a^2b^2+9-10ab-(a^2+b^2)=0 \\ a^2+b^2=0 \end{cases}$$

Тогда заменяя a^2+b^2 на 5 получаем:

$4a^2b^2+9-10ab=0$, пусть $ab=c$

$D^2 = 10^2 - 4\cdot4\cdot4 = 36$ $\Leftarrow$ $4c^2-10c+9=0$

$$c_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{8} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2, \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Разберем два случая:

1) $c_1 = 2 \Rightarrow ab = 2$ $\qquad a,b \geq 0$

$$\begin{cases} ab=2 \\ a^2+b^2=5 \\ a-b=2ab-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=9 \\ a-b=2ab-3=1 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

2. Чистовик

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=2 \\ b=1 \end{matrix}$$

$\sqrt{x+2}=2 \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow x=2$ $\qquad x\in[-2;3]$

Проверка: $x=2$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2-1+3=4=2\sqrt{6+2-4}=4$

$x=2$, один из корней

2) $c_1=\frac{1}{2} \Rightarrow ab=\frac{1}{2}$

$a, b \geq 0$

$$\begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a^2+b^2=5 \\ a-b=2ab-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=6 \\ a-b=2ab-3=\cancel{1}-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{6} \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{\sqrt{6}}{2}-1 \\ b=\frac{\sqrt{6}}{2}+1 \end{matrix}$$

$\sqrt{x+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-1 \Rightarrow x+2=\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2=\frac{6+4-4\sqrt{6}}{4}=\frac{5}{2}-\sqrt{6}$

$x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$

$x\in[-2;3]$

Проверка: $x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$

$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}+3=2\sqrt{\frac{1}{4}}$

~~gra~~ $\frac{\sqrt{6}-2}{2}-\frac{\sqrt{6}+2}{2}+3=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$, второй корень

Ответ: $x_1=2$
$x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{6}$

Scanned with CamScanner

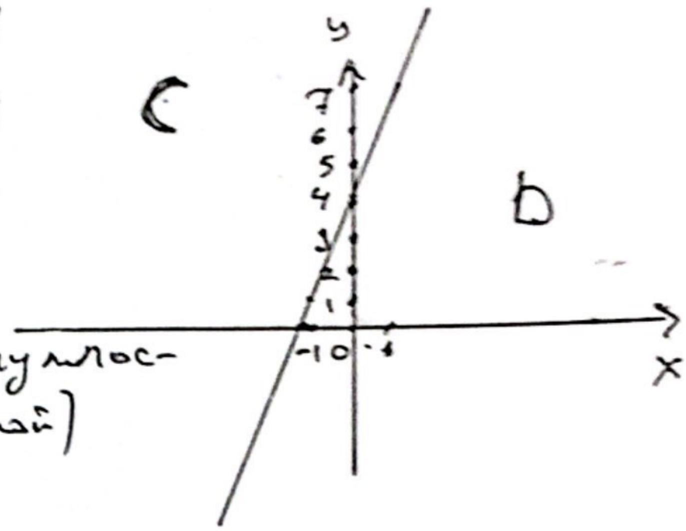
Чистовик

3.

Рассмотрим прямую $y-3x=4$ или $y=3x+4$

Тогда для любой точки в полуплоскости C (сверху над прямой) выполняется что

$y>3x+4$



А для любой точки в полуплоскости D (снизу над прямой)

$y<3x+4$.

Теперь рассмотрим параболу $ax^2-2a^2x-ay+a^3+4$

это можно переписать как $ay-4=a(a^2-2ax+x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y=(x-a)^2+\frac{4}{a}$, тогда вершина этой параболы имеет координаты $(a, \frac{4}{a})$.

Рассмотрим два случая когда $B\in C$ и $B\in D$

1. $B\in C$ (B лежит выше прямой $y=4x+3$)

$\frac{4}{a}>3\cancel{a}+4$

$4>3a^2+4a$

$0>3a^2+4a-4$, рассмотр $3a^2+4a-4=0$

$D=16+48=64$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{6}$ $\to a_1=2$, $\to a_2=\frac{2}{3}$

Тогда если $a\in(0;\frac{2}{3})$ и $a\in(-\infty,-2)$ то $B\in C$

Scanned with CamScanner

Чистовик

3. $B \in D$ (B лежит ниже прямой $y=3x+4$) так В лежит на $y=4x+3$ только в точках $-2; \frac{2}{3}$ и лежит выше в интервалах $(0;\frac{2}{3})$ и $(-\infty;-2)$ то как $B \in D$ то $a \in (-2;0)$ и $a \in (\frac{2}{3}, \infty)$

Теперь рассмотрим выражение $5a^2+12ax+4ay+$ $+8x^2+8xy+4y^2=0$

И разберем два случая когда A лежит в полуплоскостях C и D.

Если A лежит выше прямой $y=3x+4$ то

$0 = 5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2 > 5a^2+12ax+$ $+4a(3x+4)+8x^2+8x(3x+4)+4(3x+4)^2=$ $=5a^2+24ax+16a+64+68x^2+128x$

Если же A лежит ниже прямой $y=3x+4$

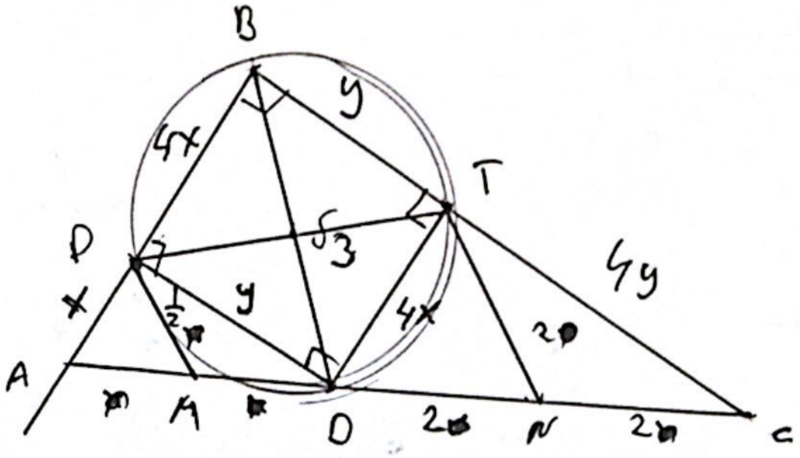
$0=5a^2+12ax+4ay+8x^2+8xy+4y^2 < 5a^2+12ax$ $+4a(3x+4)+8x^2+8x(3x+4)+4(3x+4)^2=$ $=5a^2+24ax+16a+64+68x^2+128x$

Остается решить 2 квадрат уравнения относительно x, и в каждом из ~~них~~ них оценить параметр a, После чего сопоставляем с интервалами a для вершины B и помня что A и B лежат по разные стороны от прямой $y=3x+4$, находим ответ.

Scanned with CamScanner

1\.

Черновик



$(4x)^2 + y^2 = 3$

$x^2 + y^2 = 1$

$16x^2 + 16y^2 = 16$

$15y^2 = 13$

$y = \sqrt{\frac{13}{15}}$ $x = \sqrt{\frac{2}{15}}$

$15x^2 = 2$

$\frac{5x^2 \cdot 5y^2}{2}$

$\cancel{5}x^2 = \frac{2}{3}$

$x^2 = \frac{2}{15}$

$y^2 = \frac{13}{15}$

$5x^2 = \frac{2}{3}$

$5y^2 = \frac{13}{3}$

$5x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{3}}$ $\frac{13}{9}$

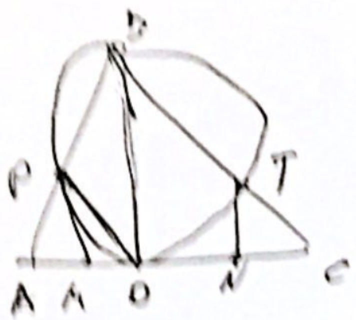
$5y = \sqrt{\frac{65}{3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 13}{3}}$

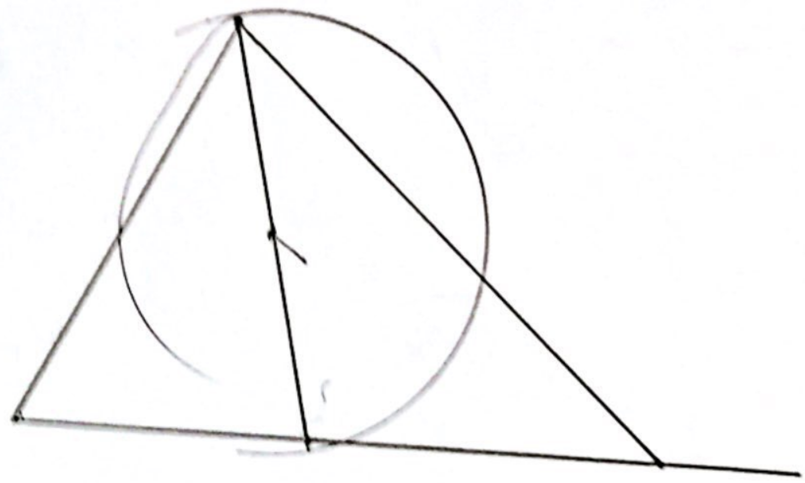
$\frac{5}{3} \cdot \sqrt{26}$

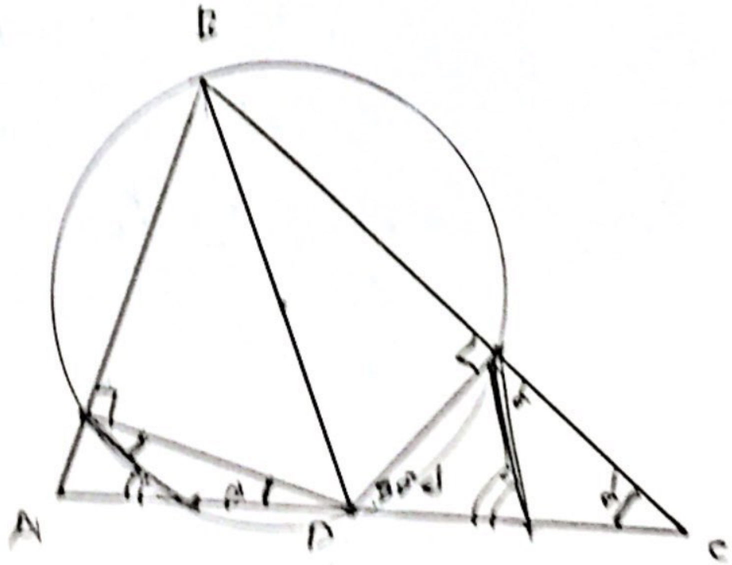
$(y+a)^2 + (2y+2x)^2 + (2x+3a)^2 - 5a^2 - y^2 = 0$

Scanned with CamScanner

1. черновик







Scanned with CamScanner

Черновик

2.

$$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{a}-\underbrace{\sqrt{3-x}}_{b}+3=2\sqrt{6+x-x^2}=$$

$$=2\sqrt{(3-x)(x+2)}$$

$$3x-x^2+2x+6= =6+x-x^2$$

$a\geq0,\ b\geq0$

$a-b+3=2ab$

$3-x\geq0 \quad x\leq3$

$2+x\geq0 \quad x\geq-2$ $\Rightarrow ОДЗ(x)=[-2;3]$

$a-b+3=2ab$ $\quad \overset{a^2}{x+2} \quad \overset{b^2}{3-x}$

$\cancel{(a,b)=(1,4)}$

$a^2+b^2=5$

$$\begin{cases} a+3=2ab+b \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$4x^2+4-10x=0$

$\cancel{(a+3)^2=(2ab+b)^2}$

$(a-b)^2=(2ab+3)^2$

$a^2+b^2-2ab=4a^2b^2+9+6-2ab$

$\cancel{4a^2b^2+9+}$

$4a^2b^2+4-10ab=0$

$\cancel{4\cdot4+4}$

$D=100-4\cdot4\cdot4=36$

$x_{1,2}=\cancel{10\pm}\ \dfrac{10\pm6}{8}\Rightarrow \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{matrix}$

Scanned with CamScanner

Черновик

2.

$$\begin{cases} ab = 2 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$$

$a+b = \cancel{9},3$

$a-b = 2ab - 3 = 1$

$a = 2$
$b = 1$

$\sqrt{x+2} = 2 \qquad \sqrt{3-x} = 1$

$x+2 = 4 \qquad 3-x = 1$

$\underline{x = 2}$

$$\begin{cases} ab = \frac{1}{2} \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$$

$a+b = \sqrt{6}$

$a-b = -\cancel{2}$

$2a = \sqrt{6} - 2$

$a = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$

$b = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

$\sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 = \frac{(\sqrt{6}-2)}{2}$

$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 = \frac{(\sqrt{6}+2)}{2}$

$x+2 = \frac{6+4-\cancel{2}4\sqrt{6}}{4} = 2.5 - \sqrt{6}$

$3-x = \frac{6+4+4\sqrt{6}}{4} = 2,5 + \sqrt{6}$

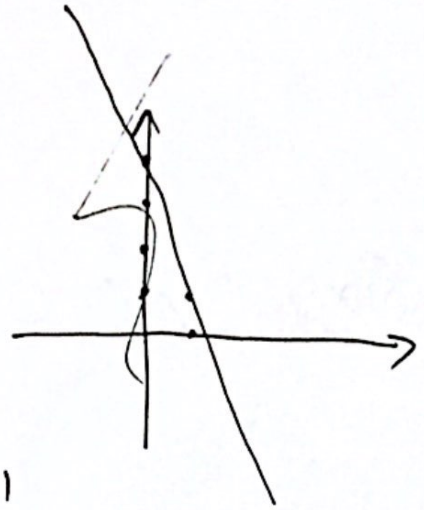
$\underline{x = \frac{1}{2} - \sqrt{6}}$

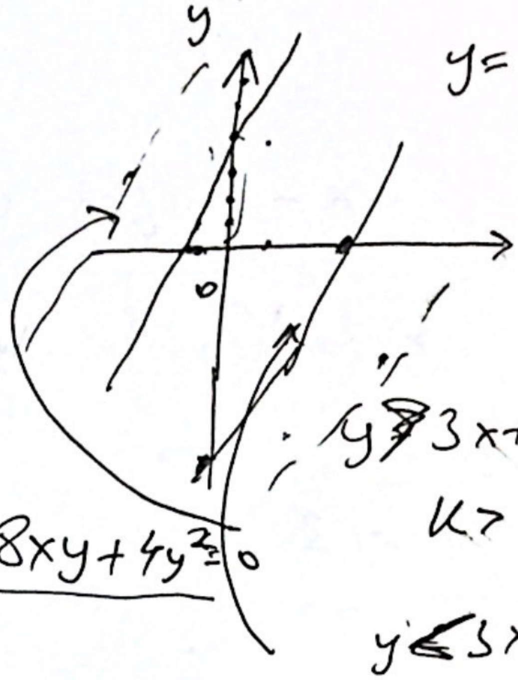
$\sqrt{6} \qquad 2.5$

$6 \qquad \cancel{2,8} \qquad 6,25$

Scanned with CamScanner

3. Черновик





$y = 3x+1$

$y > 3x + 4$

$k > 4$

$4+1$

$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$y \leq 3x + 4$

$t < 4$

$\cancel{y > 3x+4}$

$\Rightarrow 4a^2 \quad 4x^2 \quad 4x^2$

$(y+a)^2$

$(\cancel{3a}+2x)^2$

$(2y+2x)^2$

$(2x+3a)^2$

$5a^2 + y^2$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 4 = 0$

$ay - 4 = a(x^2 - 2ax + a^2) = a(x-a)^2$

$y = \dfrac{a(x-a)^2 + 4}{a} = (x-a)^2 + \dfrac{4}{a} \geq \dfrac{4}{a}$

$\dfrac{4}{a} \cancel{= 3a} + t$

$\boxed{y = \dfrac{4}{a} \quad x = a}$

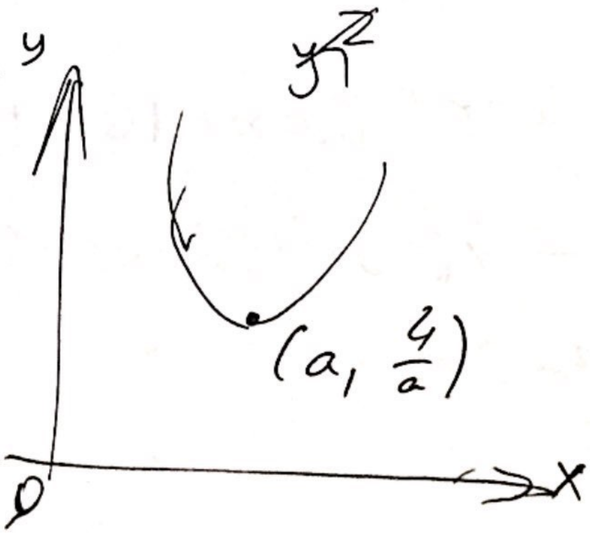
$\dfrac{4}{a}$

$\dfrac{4}{a} > 3a + 4$

$\cancel{4 > 12a^2 + 4a}$

$4 > 3a^2 + 4a$

$0 > 3a^2 + 4a - 4$



Scanned with CamScanner

Черновик

3.

$a\cancel{x}^2$

$3x$

$$5a^2 + 12ax + 4ay + 8x^2 + 8xy + \cancel{4}y^2 = 0$$

$$(y \quad x \quad 2a)(y \quad x \quad 3a)$$

$$y = 4x + 3$$

$$\cancel{9}5x^2 \qquad 4x^2$$

$$(2a+3x)^2 + (a+2y)^2 + (2\cancel{x}+2y)^2$$

$$y = 4x+3$$

$$\cancel{5a^2 + 12ax + 4a(4x+3)} + 8x^2 + 8x(4x+3) + 4(4x+3)$$

$$5a^2 + 12ax + 4a(3x+4) + 8x^2 + 8x(3x+4) + 4(3x+4)^2$$

$$5a^2 + 12ax + 12ax + 16a + \underbrace{8x^2 + 24x^2}_{32x^2} + 32x +$$

$$+ 4(9x^2 + 24x + 16)$$

$$5a^2 + 24ax + 16a +$$

$$36x^2$$

$32 < 0$

32
36

$68x^2$

$$\begin{array}{r} 96x \\ 32x \\ \hline 128x \end{array}$$

Черновик

3.

$0 > 3a^2+4a-4$ $\qquad 3\cdot\frac{4}{3}$

$D = 16+4\cdot3\cdot4 = 16+3\cdot16=64$ $\qquad \cancel{\frac{4}{3}+\frac{8}{3}}-4$

$\frac{-4\pm8}{6} \to -2$

$\to \frac{2}{3}$

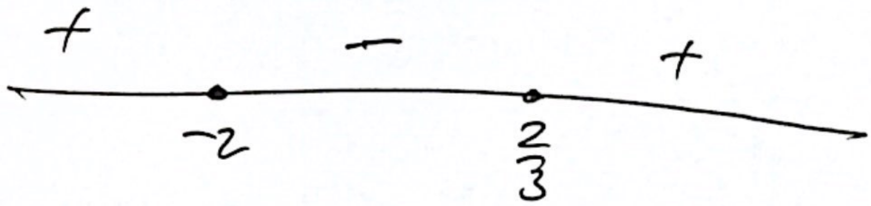
~~Снизу~~ Сверху

$a\in(-2;\frac{2}{3})$

~~Сверху~~ Снизу

$a\in(\frac{2}{3};+\infty)\cap$

$a\in(-\infty;-2)$



$a\neq0$

-4 ~~...~~ $-3+4$

4

$0>$

Сверху

$a\in(0;\frac{2}{3})$

$a\in(-\infty;-2)$

$=2$

$\frac{4}{2}$ $\qquad$ $3+4$

Снизу

$6a$ $\qquad$ 2

$a\in(-2;0)$

$a\in(\frac{2}{3},\infty)$

Scanned with CamScanner

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005177**

ID профиля: **217293**

Вариант 11

Чистовик

4.

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$, тогда $a, b \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases}$$

$x^4+y^4+3x^2y^2 =$
$= x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2 =$
$= (x^2+y^2)^2 + x^2y^2$

$\Rightarrow a^2 - \frac{4}{a} = 15 \Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 15a - 4 = 0$

Решим уравнение $a^3 - 15a - 4 = 0$

Находим один из корней это 4 тогда:

$a^3 - 15a - 4 = (a-4)(a^2+4a+1) = 0$

У a^2+4a+1 - два корня так как $D > 0$

$D = 16 - 4 = 12$

$a^2+4a+1=0$

$D = 16 - 4 = 12$

$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = -2-\sqrt{3} \\ a_2 = -2+\sqrt{3} \end{matrix}$

Заметим что $-2-\sqrt{3} < 0$ и $-2+\sqrt{3} < 0$ (так как $(-2)^2 > (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 4 > 3$) тогда и $a_1 < 0$ и $a_2 < 0$, но мы брали $a \geq 0$, значит единственный корень $a=4$.

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + b = 5 \\ a^2 + b = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 4$$

Scanned with CamScanner

Чистовик

4. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$

Если $x^2y^2=4$ то $xy=\pm 2$ рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=y$. и $x^2=y^2$

$2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Тогда возможные пары ответов:

$(x,y)=(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=-2 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-y$

и $x^2=y^2$

$2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Тогда возможные пары ответов

$(x,y)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Проверка: заметим что для любой пары ответов $x^2=y^2=2$.

$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2 = \frac{4}{2+2}+2\cdot 2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 2^2+2^2+3\cdot 2\cdot 2=20 \end{cases}$

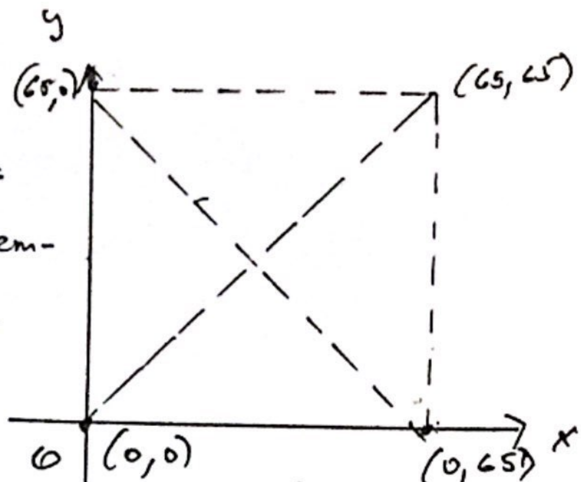
значит все пары ответов подходят

Ответы: $(\sqrt{2},\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$;

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Scanned with CamScanner

5. Чистовик



Сначала посчитаем количество узлов сетки внутри квадрата. Заметим что каждый узел задается координатой по OX и OY где координаты принимают любые значения от 1 до 64 (так как узел сетки лежит строго внутри квадрата)

Итого 64^2 клеток (чисел от 64 до 5 - 64 штуки)

Заметим что прямая $y=x$ содержит две вершины квадрата $(0,0)$ и $(65,65)$ а прямая $y=65-x$ другие две вершины $(65,0)$ и $(0,65)$. Тогда эти прямые это диагонали исходного квадрата.

Заметим что диагонали не имеют общих узлов сетки так как тогда $\begin{cases} y=x \\ y=65-x \end{cases} \Rightarrow x=65-x \Rightarrow x$ — нецелое $x=\frac{65}{2}=32,5$

Тогда каждая диагональ имеет по 64 ~~клетки~~ узлов и нет общего узла.

Итак рассмотрим два случая:

1: Обе выбранных узла лежат на ~~одной~~ диагоналях квадрата. Этот случай разделяется на два подслучая.

1a. Эти ~~клетки~~ два узла лежат на одной диагонали. Способов выбрать 2 узла из 64 это $\frac{64\cdot 63}{2}$ (так как способ выбрать узел A а потом B, совпадает со случаем выбрать узел B а потом A)

Т так как диагоналей две то число способов $64\cdot 63$

1в. Эти два узла лежат на разных диагоналях.

5.

Чистовик

Выбераем ~~шашку~~ узел на первой диагонали это 64 способа, пусть это шашка А. ее координат (~~х~~, в) Выбрать ~~шашку~~ узел на второй диагонали будет 62 так как существует ровно по одной ~~шашке~~ узел на этой диагонали такой что эти два узла лежат на прямой параллельной ОХ или ОУ. (~~одна~~ один у узлов которые имеют по ОХ координату а тогда если это узел В то АВ||ОУ, и один узел имеющий координат по ОУ в. тогда АВ||ОХ).

Итого 64·62 способов выбрать два узла.

2. Ровно один из узлов лежит на диагонали.

Выберем какой-нибудь узел на диагонали и посчитаем количество узлов таких что эти узел не лежат на диагонали и прямая образованная выбранными узлами не параллельна осям координат.

Заметим что узлы образуют квадрат 64×64. (где каждый узел это шашка). Тогда когда для этого узла в пару мы положим выбрать его самого −1 узел; 63·2 узла которые имеют одну из координат по ОХ или ОУ такую как и у выбранного узла (так как тогда они будут лежать на прямой параллельной ОХ или ОУ), 63 узла на той же диагонали что и выбранный узел (нетрудно убедиться что у каждого такого узла будет отличная координата и по ОХ и по ОУ от выбранного узла) и 62 узла на другой диагонали (2 узла на ней мы уже посчитали как же у которых

5.

Листовки

координата по OX или по OY совпадает с координатой по OX или OY у выбранного сначала узла)

Итого $64^2 - 1 - 63\cdot 2 - 63 - 62 = \cancel{\ldots}$
$= 63^2 - 63 - 62 = \cancel{\ldots} = 62^2$

вариант. выбрать узел в пару к выбранному узлу не диагонали

А способов выбрать этот узел на диагонали это 64·2 так как на каждой диагонали 64 узла а диагонали не имеют общих узлов.

Итого число способов выбрать узла это $2\cdot 64\cdot 62^2$

Других способов нет так как по условию задачи хотя бы один из узлов должен лежать на одной из прямых $y=x$ и $y=65-x$ а прямые $y=x$ и $65-x=y$ это диагонали, то есть один из узлов лежит на диагонали исходного квадрата

Также нетрудно понять что эти случаи не пересекаются так как в каждом из них есть свойство которого нет и другого случая (количество выбранных узлов на диагоналях, и количество выбранных узлов на одной диагонали)

Итого общее число способов выбрать два узла внутри квадрата так чтобы они удовлетворяли условию задачи это $64\cdot 2\cdot 62^2 + 64\cdot 62 + 64\cdot 63 = 64(2\cdot 62^2 + 62 + 63) = 500'032 =$

$= 7813\cdot 64.$

Ответ: 500'032 способов

Scanned with CamScanner

Чистовик

6.

а) Дано:

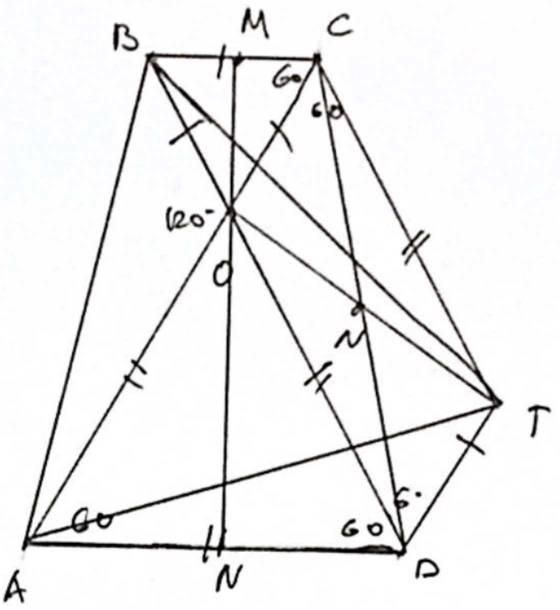
ABCD – выпуклый

OBC, OAD – правильные

CN = ND,

O и T симметричны относительно N

(1) ABT – правильный



Решение:

покажем что $AT = BT = AB$. Заметим что

$OB = OC = BC$ и $OA = AD = OD$.

Также $\angle CBO = \angle OCB = \angle BOC = \angle AOD = \angle OAD = \angle ODA = 60$

$\Rightarrow \angle CBD = \angle ADB \Rightarrow BC \parallel AD$ и $\triangle ABO \overset{I}{=} \triangle DCO$ ($AO = OD$, $BO = OC$ и $\angle AOB = \angle COD = 120°$, I признак равенства треугольников) $\Rightarrow$ ABCD – равнобедренная трапеция (из $\triangle ABO = \triangle DCO \Rightarrow AB = CD$) | так как O и T симметричны относительно середины CD то ($CO = DT$, $OD = CT$) $\Rightarrow$ CODT – параллелограмм. Значит $\angle COD + \angle OCT = 180° \Rightarrow \angle OCT = 60$. Тогда $\angle BCT = \angle ADT = \angle BCO + \angle OCD = \angle ADO + \angle ODT = \angle ADO + \angle OCD = 120$

Значит $\triangle BOA \overset{I}{=} \triangle BCT$ ($BO = BC$, $OA = CT$, $\angle BOA = \angle BCT = 120°$). Аналогично $\triangle ABO \overset{I}{=} \triangle ATD$ ($AO = AD$, $CO = TD$, $\angle BOA = \angle ADT = 120°$). Первый признак равенства треугольников.

Тогда $AB = BT = AT \Rightarrow ABT$ – правильный треугольник

Scanned with CamScanner

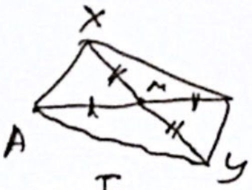
б) Дано: Чистовик

$BC=2$

$AD=5$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} - ?$

Лемма: Если X и Y симметричны относительно середины AB то XAYB - параллелограм



M - середина AB
$XM=MY$

Тогда $\triangle AXM \overset{I}{=} \triangle BYM$ ($\angle AMX = \angle YMB$, $AM=MB$, $XM=MY$)

$\triangle AMY \overset{I}{=} \triangle XBM$ $\Rightarrow AX=BY$

Аналогично $AY=XB \Rightarrow$

$\Rightarrow AXBY$ - параллелограм

Решение:

$S_{трап} =$ Площадь трапеции равна полусумме оснований умноженной на высоту.

$$\frac{AD+BC}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

Пусть M - середина BC и N середина AD так как BOC и AOD правильные $MN \perp BC$ и $MN \perp AD$

тогда $MN = MO + ON = \sqrt{BO^2 - BM^2} + \sqrt{AO^2 - AN^2} =$

$= \sqrt{2^2 - 1^2} + \sqrt{5^2 - (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$$S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

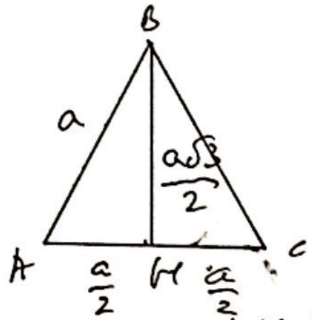
Из $\triangle ABO$ по теореме косинусов найдем AB

$AO = AD = 5$, $BO = BC = 2$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle ABO = 25 + 4 + 2 \cdot 5 =$

$= 39$ (так как $\cos 120° = -\frac{1}{2}$)

$AB = \sqrt{39}$



Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Тогда $S_{ABT} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

Значит $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$ Ответ: $\frac{39}{49}$

Scanned with CamScanner

4

Черновик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$a \geq b$

$x^2+y^2 = a$ $\qquad a, b \geq 0$

$x^2y^2 = b$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20 \\ \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2 = 20 \\ \frac{4}{a} + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + ab = 5a \\ \cancel{a^2+b=20} \end{cases}$$

$\cancel{a^2 - \frac{4}{a} = 15}$

$a^2+b^2=20$

$a^2 - \frac{4}{a} = 15$

$a^2 - \frac{4}{a} - 15 = 0$

$a^3 - 15a - 4 = 0$

$(a-4)(a^2+4a+1) = 0$

$a=4$

$b=4$

$a^3+4a^2+a-4a^2-16a-4=0$

$x^2y^2=4$

$x^2+y^2=4$

$a^2+4a+1=0$

$(2, 2)$

$D^2 = 16-4=12 \Rightarrow D = 2\sqrt{3}$

$(-2,-2)$

$\frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ $\qquad -2-\sqrt{3}$ $\qquad -2+\sqrt{3}$

$(2,-2)$

$(-2, 2)$

$xy=2$

$xy=-2$ $\qquad (x-y)^2=0$

$(x+y)^2=0$

$7+10+12+5=34$

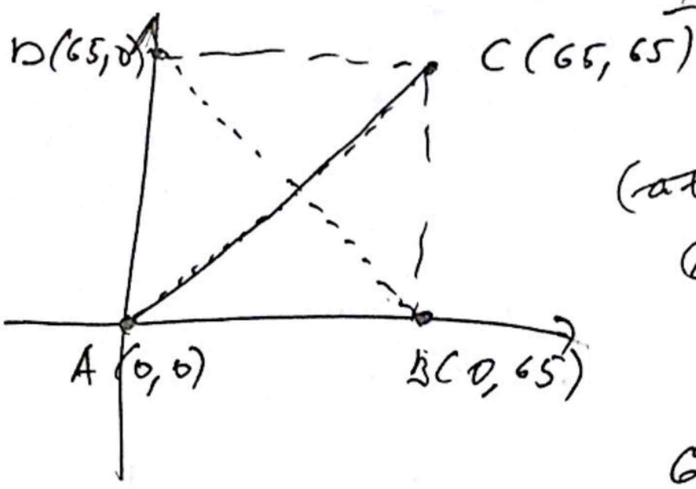
Scanned with CamScanner

5.

Черновик

$4(2\cdot 2^2 + \cdot 2 + 3) =$

$= 4(\cdot 13)$



$(a+1)^2$

$(a+6)^2 - (a+6)^2 (a+6-1)^2$

63(62 62(62)

64·63

$\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 2 = 4\cdot 3 = 12$

$4\cdot 6 + 4\cdot 6 =$

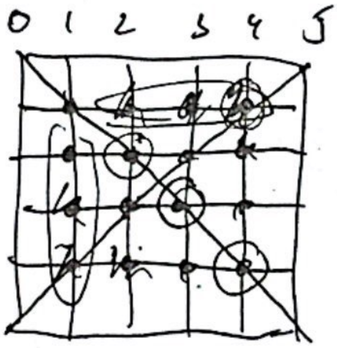
$= 24 + 24 + 12$

$8\cdot 4 = 32$

$4\cdot 3 = 12$

$2\cdot 4 = 8$

52



~~2·64~~

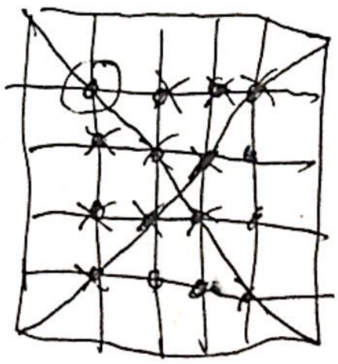
~~16·4~~

$\cancel{2\cdot 64\cdot(63^2 - 63)}$

$2\cdot 64\cdot 63\cdot 62$

$2\cdot 64(63^2 - 63 - 62)$

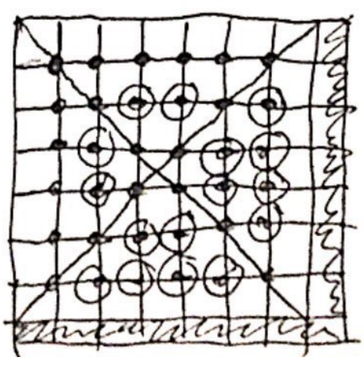
64-63



8·

4,2

$25 - 5 - 4 = 16$



Scanned with CamScanner

Черновик

5

$62 \times 2 = 124$

~~62~~

$62 \cdot 125 = 31 \cdot 250$

~~$62($~~

$64(2 \cdot 62^2 + 62 + 63) = 64(62(2 \cdot 64 + 1) + 63) =$

$= 64(62 \cdot 125 + 63)$

$30 \cdot 250 = 15 \cdot 500 = 7500 + 250$

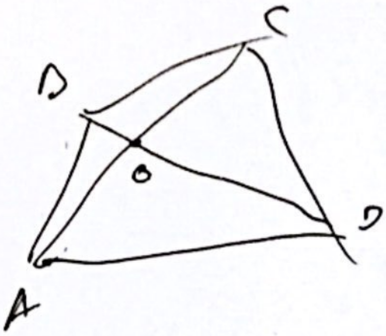
$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 62 \\ \hline 250 \\ 750 \\ \hline 7750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7750 \\ +\ 63 \\ \hline 7813 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7813 \\ \times\ 64 \\ \hline 31252 \\ 46878 \\ \hline 500032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7813 \\ \times\ 64 \\ \hline 31252 \\ 46878 \\ \hline \boxed{500032} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3844 \\ \times\ 2 \\ \hline 7688 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7688 \\ 125 \\ \hline \boxed{7813} \end{array}$$

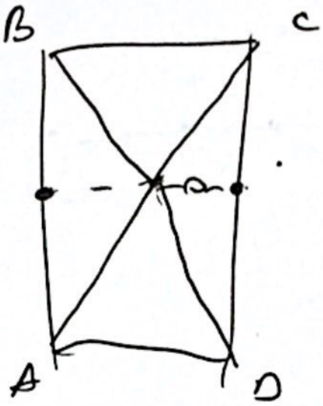
Scanned with CamScanner

черновик



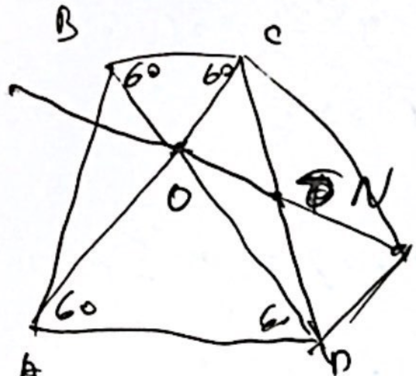
$a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$\sin 120° = \sin 60°$



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$



$\frac{156}{4} = 39$

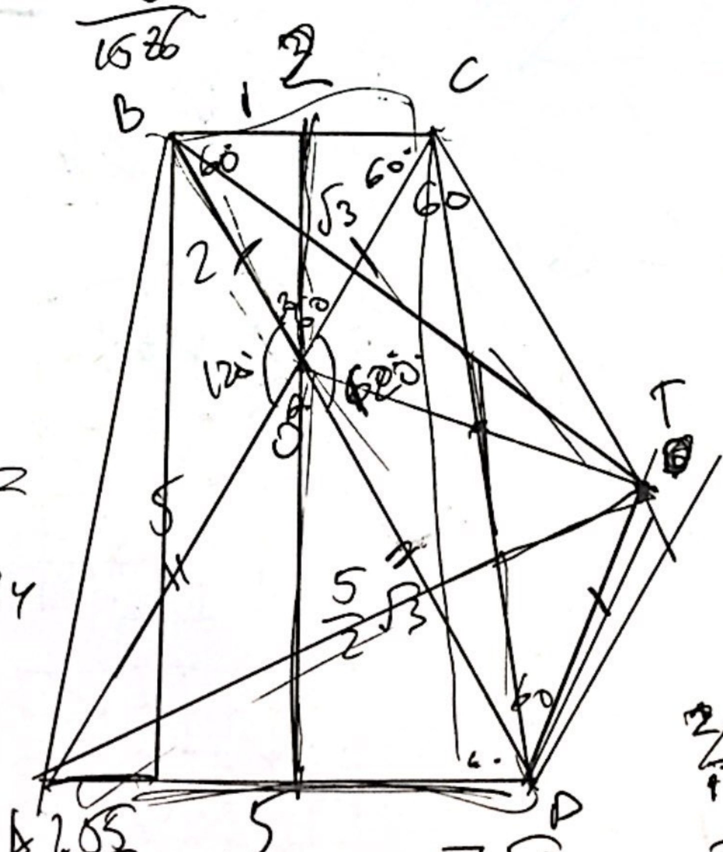
$\frac{14 \cdot 9}{1686}$

$49 \cdot 3$

$\times \frac{49}{3}$ 147

$\frac{49}{4} = 2$

224



$\frac{25 \cdot 3}{4}$ $\frac{25}{4}$ 25

$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6$ $\frac{7}{2}$

$21\sqrt{3}$

$AB^2 = 4 + 25 + 7$

$+5$

$\sqrt{3}$

$\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$

$\frac{49 \cdot 3 + 9}{4}$

$\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Scanned with CamScanner