Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

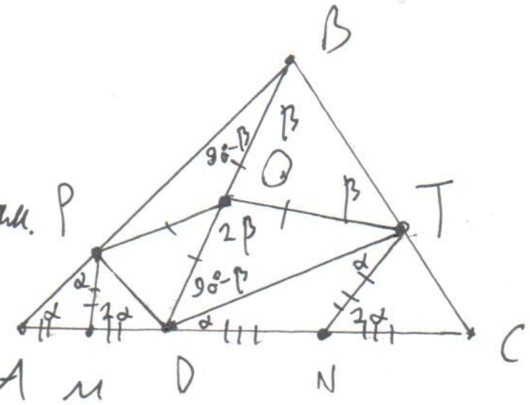
Шифр: **211005118**

ID профиля: **282022**

Вариант 11

Чистовик

№ 1



а) 1) O – середина BD

2) OB = OT = OD = OP из отр. окруж.

3) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ как оп. на диам.

4) $\angle APD = \angle DTC = 90°$ как смеж. =>

=> $AM = MP = MD$; $DN = NC = NT$

по св. медианы в прям. △.

5) ~~$\angle N$~~ $\angle TNC = \angle PMC = 2\alpha$, т.к. $PM \parallel NT$

6) $\angle DTN = \angle APM = \alpha$, т.к. $\triangle AMP$, $\triangle DNT$ – равнобедр.; по св. внеш. ∠

7) Аналогично: $\angle BAC = \angle TDC = \alpha$

8) AB и DT пересекаются с AC под одним углом => $AB \parallel DT$

9) аналогично: $BC \parallel PD$

10) $\angle TBO = \angle BOT = \beta$, т.к. $\triangle BOT$ – равнобедр.

$\angle ODT = 90 - \beta$, т.к. $\triangle OTD$ – равн. бедр.

11) $\angle TOD = 2\beta$, как внеш. => $\angle ODT = 90 - \beta$, т.к. $\triangle OTD$ – равн. бедр.

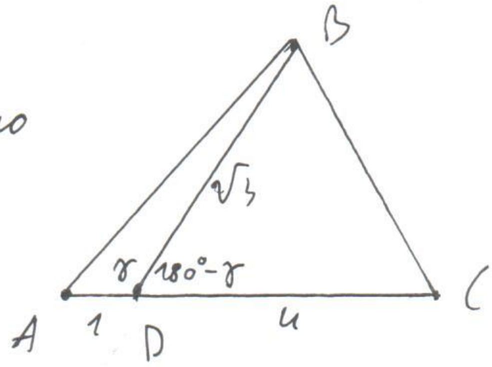
12) $\angle PBD = \angle BDT = 90 - \beta$, как накр. леж. => $\angle ABC = 90°$

б) 13) $PM = 0{,}5$; $NT = 2$ => $AD = 1$; $DC = 4$

14) $\angle ADC = \gamma$; $\angle BDC = 180° - \gamma$; $AB = x$.

15) $1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos\gamma = x^2$; $16 + 3 + 8\sqrt{3}\cos\gamma = 25 - x^2$ по

Т cos



16) $6\sqrt{3}\cos\gamma + 23 = 25$ => $\cos\gamma = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ =>

=> $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$; $\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\frac{65}{3}}$ =>

=> $S_{ABC} = 0{,}5\sqrt{\frac{10 \cdot 65}{9}} = \frac{5}{6}\sqrt{26}$

Чистовик

№ 2

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{(x+2)(3-x)}$. $\quad x+2 \geq 0; 3-x \geq 0 \Rightarrow x \in [-2; 3]$.

$\sqrt{x+2} = a; \sqrt{3-x} = b = \sqrt{5-a^2}$

$a - b + 3 = 2ab$

$(a+3)^2 = (2a+1)^2(5-a^2)$

$a^2+6a+9 = -4a^4-4a^3+19a^2+20a+5$

$(a+1)(a-2)(2a^2+4a-1) = 0$

$a = -1; 2; \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$. $a \geq 0 \Rightarrow a = 2; \frac{\sqrt{6}-2}{2}$.

~~a~~ $\sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x = 2$. $\sqrt{x+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \Rightarrow 4x+8 = 8-4\sqrt{6} \Rightarrow x = -\sqrt{6}$.

$2; -\sqrt{6} \in [-2; 3] \Rightarrow$ Ответ: $2; -\sqrt{6}$

№ 3

$4y^2 + (8x+4a)y + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$

$y = \frac{-2a-4x\pm\sqrt{-16(x+a)^2}}{4} \Rightarrow x = -a; y = 0{,}5a. A = (-a; 0{,}5a)$.

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 4$. При $a = 0$ не парабола $\Rightarrow a \neq 0$.

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{4}{a}$.

$x_B = a; y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{4}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow$ ~~A~~ $B = (a; \frac{4}{a})$.

лежат по разные стороны $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0{,}5a+3a > 4 \\ \frac{4}{a} - 3a < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 0{,}5a+3a < 4 \\ \frac{4}{a} - 3a > 4 \end{cases} \end{array}\right.$.

$0{,}5a + 3a > 4$ при $a > \frac{8}{7}$. Тогда: $\frac{4}{a} - 3a < 4 \Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 4 > 0$. При $a > \frac{8}{7}$ и,

т.к. $\frac{8}{7} > 0, 3 > 0, 4 > 0, 3\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{8}{7}\right) - 4 > 3+4-4 > 0 \Rightarrow$ при $a > \frac{8}{7}$: и.

Чистовик

№3 продолжение.

При $a \in (0; \frac{8}{7})$: $0{,}5a+3a<4$; $\frac{4}{a}-3a>4 \Leftrightarrow 3a^2+4a-4<0.$

$3a^2+4a-4=0$ при $a=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{3}=-2; \frac{2}{3} \Rightarrow$ ~~при~~ $a\in(0;\frac{2}{3})$: и

ветви вверх

При $a=\frac{8}{7}$: x; $a>0$

при $a<0$: $0{,}5a+3a<4$; $\frac{4}{a}-3a>4 \Leftrightarrow 3a^2+4a-4>0 \Rightarrow a\in(-\infty; -2)$ (аналогично)

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup(0;\frac{2}{3})\cup(\frac{8}{7};\infty)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005118**

ID профиля: **282022**

Вариант 11

Чистовик

№4

$x^2+y^2=a>0$; $x^2y^2=b\geq 0$ ($a>0$, т.к. $\frac{4}{a}+b=5$)

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+b=5\\ a^2+b=20\end{cases} \Rightarrow a^2-\frac{4}{a}=15 \Rightarrow a^3-15a-4=0 \Rightarrow (a-4)(a^2+4a+1)=0.$$

При $a>0$: $a^2+4a+1>0 \Rightarrow a=4$. $x^2=t\geq 0$; $y^2=k\geq 0$.

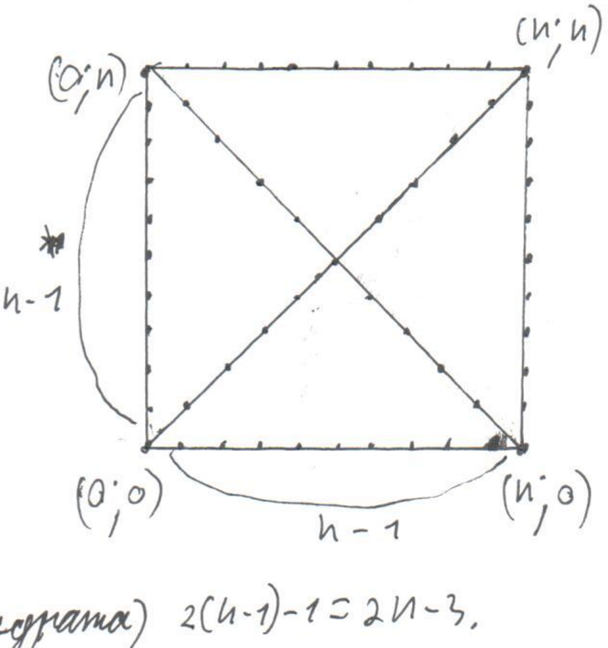
$a=4 \Rightarrow b=4$.

$t+k=4$; $tk=4 \Rightarrow t(4-t)=4 \Rightarrow (t-2)^2=0 \Rightarrow t=2=k \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$; $y=\pm\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

№5



$n=65$. Требуется выбрать два узла сетки (очевидно различных), хотя бы один из которых лежит на диагонали, оба лежат внутри квадрата, координаты по осям абсцисс и ординат выбранных узлов соответственно различны.

Узлов на диагоналях (внутри квадрата) $2(n-1)-1=2n-3$.

Узлов внутри квадрата: $(n-1)^2$.

~~Каждый узлов лежащих~~

Узлов имеющих одинаковую абсциссу/ординату с данным (включая данный): $2(n-1)-1=2n-3$.

Тогда с каждым узлом на диагонали может быть выбрано в пару $(n-1)^2-(2n-3)=(n-2)^2$ узлов.

Чистовик

№5 продолжение

Количество способов выбрать два узла ~~искомым~~ требуемым способом (кол. способов выбрать два ~~дна~~ узла на диаг. посчитано дважды): $(2n-3)(n-2)^2$

С каждым узлом на диаг., кроме центрального, может быть в паре: $(2n-3)-3=2n-6$ узлов.

С центральным: $(2n-3)-1=2n-4$ узлов.

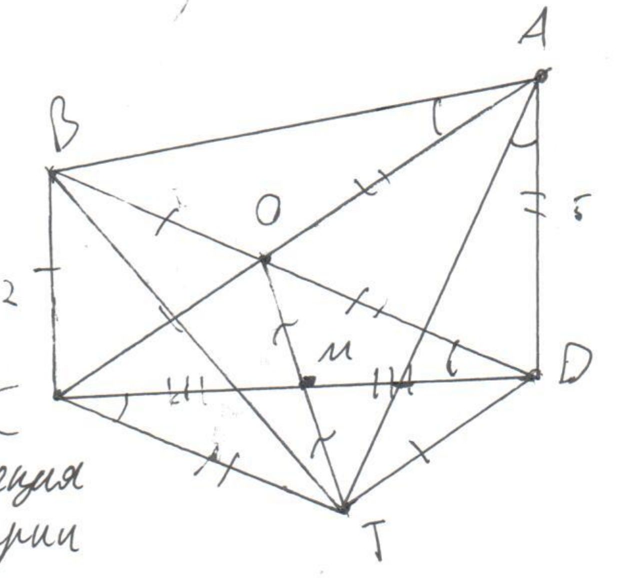
Кол. пар узлов на диаг.: $\frac{(2n-3-1)(2n-6)+1\cdot(2n-4)}{2}=(2n-5)(n-2)$.

Делить на 2, т.к. каждая пара посчитана дважды.

Итог: $(2n-3)(n-2)^2-(2n-5)(n-2)=63(63\cdot127-125)=63(8001-125)=$

$=63\cdot7876=496188$

№6



а) 1) M – серед. CD

2) OM=MT; CM=MD =>

=> ODTC – парал. по признаку

3) OD=CT по ~~опр.~~ св. парал.

4) TD∥CB по опр. парал. =>

=> ADTC – равнобокая трапеция

5) ∠DCT=∠TAD в силу симметрии

6) ∠DCT=∠CDO как накр. леж.

7) ∠BOA=∠COD как верт. => ΔBOA=ΔCOD по призн. (СУС).

8) ∠CDO=∠BAO как соот. => ∠BAC=∠DAT => ∠BAT=60°, т.к. ∠OAD=60°

9) Аналогично: ∠ABT=60°. => ∠BTA=60° => ~~BAT~~ ΔBAT – правильн.

б) 10) ∠OAD=∠OCB => ABCD – равнобокая трапеция

Чистовик

№6 продолжение

11) Из-за симметрии, высота трапеции ABCD — это ~~сумма~~ объединение высот $\triangle OBC$ и $\triangle ADO$ из верш. O. Её длина:

: $2 \cdot \sin 60° + 5 \cdot \sin 60° = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

12) $S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2+5}{2}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

13) $AB^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos 120° = 4 + 25 + 10 = 39$ ($\angle BOA = 120°$, как смеж. $\angle BOC$)

14) $\triangle ABT$ — правильный $\Rightarrow$ высота $ABT = \sqrt{39} \cos 60° = \sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABT} = \sqrt{39} \cdot \left(\sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0{,}5 = 39\frac{\sqrt{3}}{4}$

15) $S_{ABT} : S_{ABCD} = 39 : 49 = \frac{39}{49}$