Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005109**

ID профиля: **306198**

Вариант 11

$a \quad b \quad ab \quad -2 \leq x \leq 3.$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2} \leq 5$$

Черновик

$a - b + 3 = 2ab \qquad \sqrt{-a^2+5} = b.$

$\cancel{(a+b)^2 = a(a+1) + b(b-1) + 3.} \qquad \sqrt{-a^2+5} = b$

$b(2a+1) = a+3. \qquad b = \frac{a+3}{2a+1}$

$b, a \geq 0$

$\sqrt{-a^2+5}\,(2a+1) = a+3$

$\cancel{(4a^2+4a+1)(-a^2+5)} = a^2+6a+9. \qquad 6+x-x^2 - \max?$

$y = 6\frac{1}{4} \qquad -x^2+x+6$

$a+3 = 2ab+b$

$\underline{a+3}$

$\frac{-b}{2a} \qquad \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 - \max?$

$6\frac{1}{4}$

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \leq 5 - \max?$

$3 + \sqrt{5} \leq 5$

$2ab - a + b - 3 = 0 -$

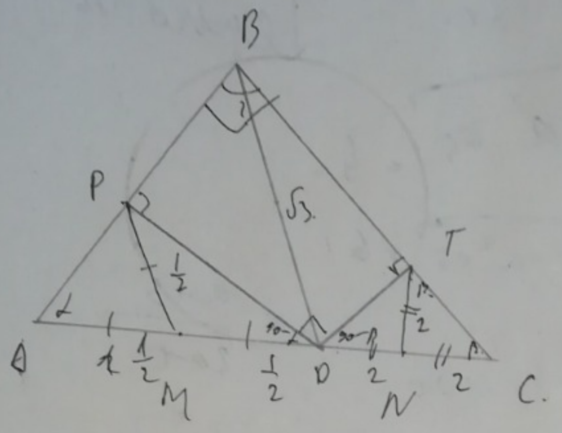
$\cancel{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right)(4b + 13)}$

$(a \qquad -3 + 2ab + b - a = a$

$($

Чертовски

$\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$



$=\frac{4\sqrt{3}+16}{6}$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}+1+\frac{10}{6}=$

$S_{ABC}=?$

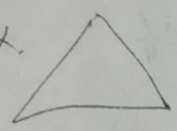
$\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}+2+\frac{20}{6}}{2}=$

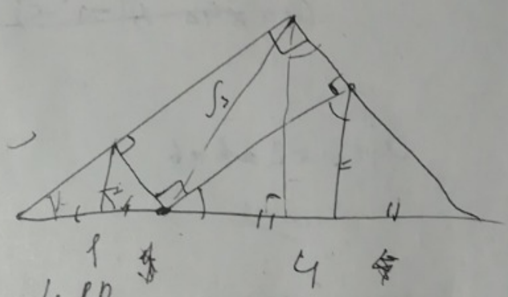
$P_1S_1=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}+16}{6}\right)(}$

$2\beta=180-2\alpha$

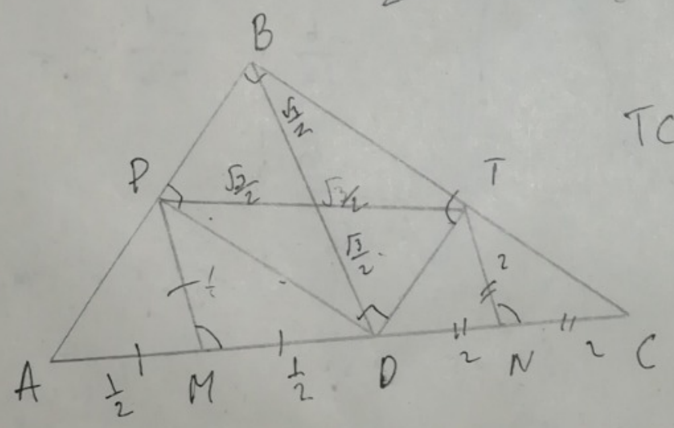
$AC=8.$

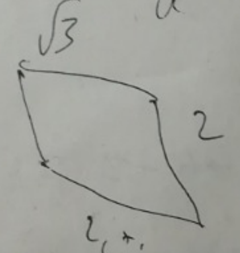
$\beta=90-\alpha.$





$TC=4PD$



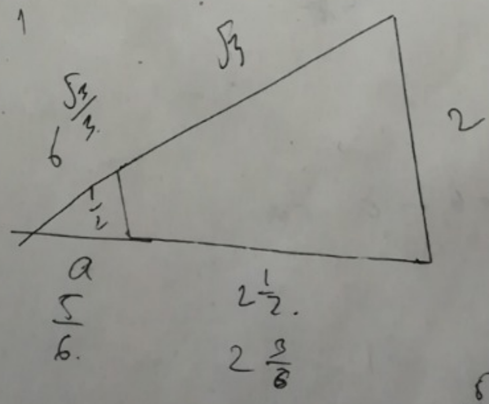


a

$\sqrt{8-a^2}$

$16\cdot\sin 2\alpha$

$+\ \sin\angle F$



$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha+2.$

$6+\sqrt{3}=46.$

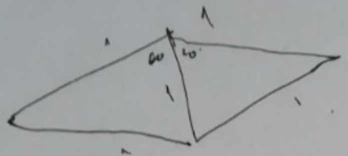
$6=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a+2,5=4a$

$\frac{5}{6}=\frac{2,5}{3}=a.$

a b ab

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+3=2\sqrt{6+x-x^2}$ Черновик



$\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}+2}-\sqrt{3-\frac{1+\sqrt{21}}{2}}+3$

$\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}-\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}+3$

$a^2+b^2=5$

$6+x-x^2=1$

$\cancel{5+3-2ab=4ab}$

$x^2-x-5=0$

$5+2ab=4a^2b^2-6ab+9$

$D=1+20=21$

$4a^2b^2-8ab+4=0$

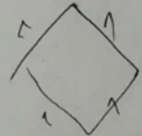
$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

$4(ab-1)^2=0$

$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$? $|27|$

$\sqrt{x+2}\ \sqrt{3-x}$

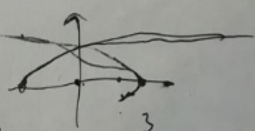
$ab=1$ $\sqrt{ab+}$



$\sqrt{21}<5$

$\frac{1-\sqrt{21}}{2}+2$? 0

$\sqrt{21}<\sqrt{25}$



$1-2\ 13$

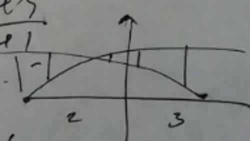
$5-\sqrt{21}>0$ -1 $3^2-\frac{1+\sqrt{21}}{2}$? 0

-2 <3

$5-\sqrt{21}$

$b=\frac{a+3}{2a+1}$

$a^2+b^2+9+6a-6b-2ab=4a^2b^2$



5 14

$a+3=2ab+b$

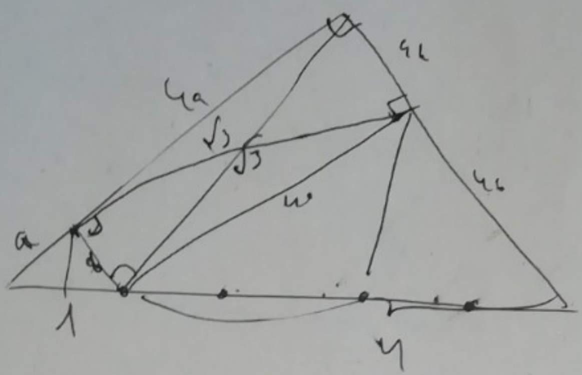
$4a^2b^2+2ab-6a+6b-14=0$

$\frac{\sqrt{x+2}+3}{2\sqrt{x+2}+1}$

$4(2ab+1)^2-2ab-6a+6b-15$

a б aб

Черновик



$$25a^2 + 25б^2 = 25$$

$$a^2 + б^2 = 1.$$

$$16a^2 + б^2 = 3.$$

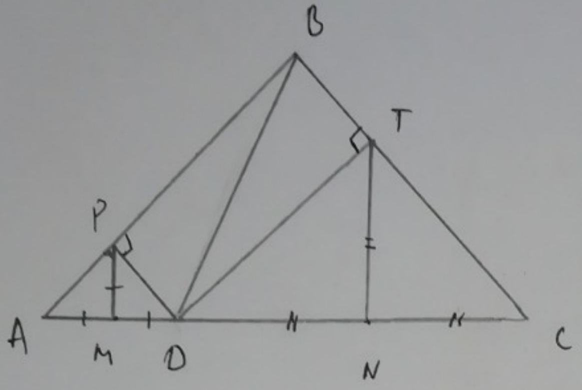
$$15a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{15}} \quad ; \; б = \sqrt{\frac{13}{15}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \, 5a \cdot 5б = \frac{1}{2} \, 25 \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \sqrt{26}$$

N1.



а) ABC — ?

Т.к. BD — диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow PM = AM$, $TN = DN$

Т.к. $TN \parallel PM$, то $\angle AMP = \angle DNT$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$

Пусть $\angle PAD = \alpha \Rightarrow \angle ADP = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCT = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ABC = 90$.

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 2$, $BD = \sqrt{3}$, S_{ADC} — ?

$AD = 1$, $DC = 4 \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ $k = 4$.

Пусть $AP = a$, $PD = b$. $\Rightarrow DT = 4a = PB$, $TC = 4b$, $BT = b$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$, $16a^2 + b^2 = 3$. $\Rightarrow 15a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{15}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{13}{15}}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} 5a \cdot 5b = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \sqrt{\frac{13}{15}} =$

$= \frac{1}{2} 25 \cdot \frac{1}{15} \sqrt{26} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{26} = \frac{5\sqrt{26}}{6}$.

№2.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 3 = 2\sqrt{6+x-x^2}$ $\underline{x=2.}$

Пусть $\sqrt{x+2} = a$, $\sqrt{3-x} = b$, тогда $\sqrt{6+x-x^2} = ab$.

$a - b + 3 = 2ab$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005109**

ID профиля: **306198**

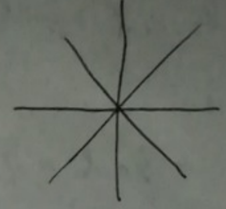
Вариант 11

Черновик

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20. \end{cases}$$

$\pm a; \pm b$

$\pm b; \pm a.$



$$\frac{16}{x^2+y^2} + 4x^2y^2 = 4x^4 + 4y^4 + 8x^2y^2$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20. \\ \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

$$\frac{16}{x^2+y^2} = x^4+y^4-x^2y^2 \quad \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$

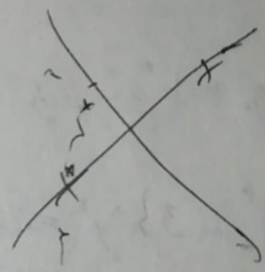
$\sqrt{2}$

$$\frac{4+x^4y^2+y^4x^2-5x^2-5y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2} = 15 \qquad y = 65 - x$$

$0; 65$

$65; 0.$



$$x^4+y^4+4x^2y^2+\frac{4}{x^2+y^2} = 25$$

$$(x^2+y^2)^2 + 2x^2y^2 + \frac{4}{x^2+y^2} = 25$$

$$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 20.$$

$$\frac{4}{\sqrt{20-x^2y^2}} + x^2y^2 = 5.$$

$$x^2y^2 = 5 - \frac{4}{x^2+y^2}$$

$$x^4+y^4 \cancel{+15} - \frac{12}{x^2+y^2} = \cancel{20} \; 5 = \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2.$$

$$x^4+y^4+x^2y^2 = \frac{16}{x^2+y^2}$$

$\cancel{y-\sqrt{2}}$

$\cancel{(y^2-2)(x^2-2)=}$

8

211005109 (U306198 M1276369)

$$\frac{4}{a+b} + ab = 5$$

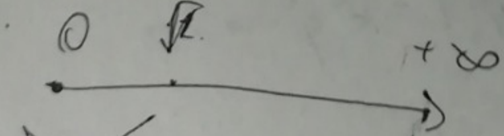
$$a^2+b^2+3ab=20$$

$$(a+b)^2+ab=20$$

$$20-(a+b)^2 = 5-\frac{4}{a+b}$$

$$15+\frac{4}{a+b}=(a+b)^2$$

Черновик

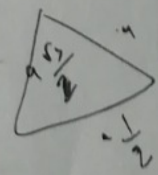


$$(x^2+y^2)^2-\frac{4}{x^2+y^2}=15$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2}+x^2y^2=5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=20 \end{cases}$$

$$\frac{8}{x^2+y^2}+2x^2y^2=10=$$

$$=x^4+y^4+x^2y^2-\frac{8}{x^2+y^2}$$



$$x^4+y^4-x^2-y^2$$

$$\frac{16}{a+b}+4ab=20 ;$$

$$a^2+b^2+3ab=20$$

$$a^2+b^2=\frac{16}{a+b}+ab.$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=16$$

$$a^3+a^2b+b^2a+b^3=a^2b+b^2a+16.$$

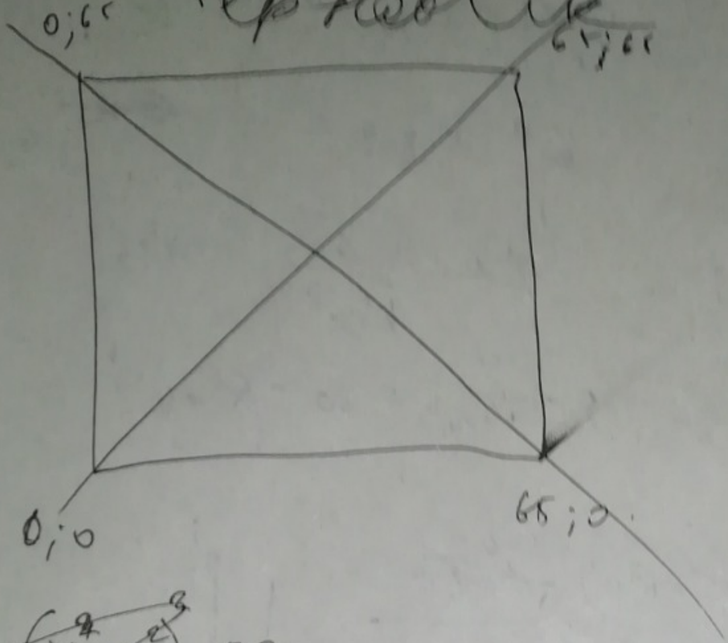
$$a+b=\frac{16}{a^2-ab+b^2}$$

$$a^3+b^3=16$$

$$(x-y)^2+(x^2-2)+(y^2-2)$$

$$\frac{a^2-ab+b^2}{4}+ab=5$$

Черновик



64?

2.

66.

132

$\cancel{(x^2+y^2)^3 = 20}$

65. 0 $\underbrace{\quad}_{}$ 32 $\underbrace{\quad}_{}$ 65

$20-(x^2+y^2)^2 = 5-\frac{4}{x^2+y^2}$

65-1 0-1

$65 = 1 \cdot 2^{32}$

$15+\frac{4}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^2$

64

$15+\frac{4}{t} = t^2$

128.

$64^2 - 64 - 63.$

~~63 · 64~~

$63^2.$

$t^3-15t-4=0.$

$121 \cdot 63^2.$

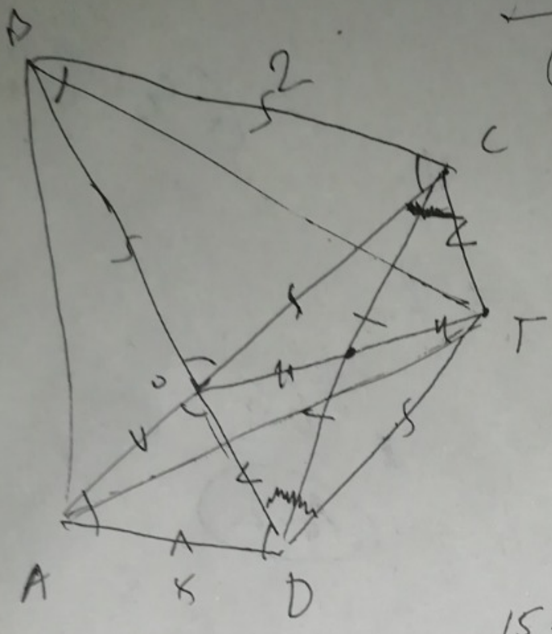
$(t-4)(t^2+4t+1)=0$

$D = 16-4 = 12$

$t = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = -2\pm\sqrt{3}.$

211005109 (U306198 M1276369)

Черновик



$BT = AT$. $\cancel{BA}$ 4.

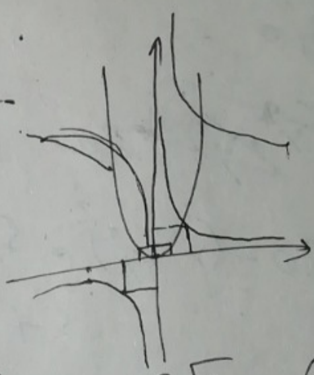
$\cancel{AB}$ $\frac{4}{x^2+y^2}$ x^2+y^2

$5 - \frac{4}{x^2+y^2} = 20 - (x^2+y^2)^2$

$15 = (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2}$

$15 = (x^2+y^2)^2 - \frac{4}{x^2+y^2}$

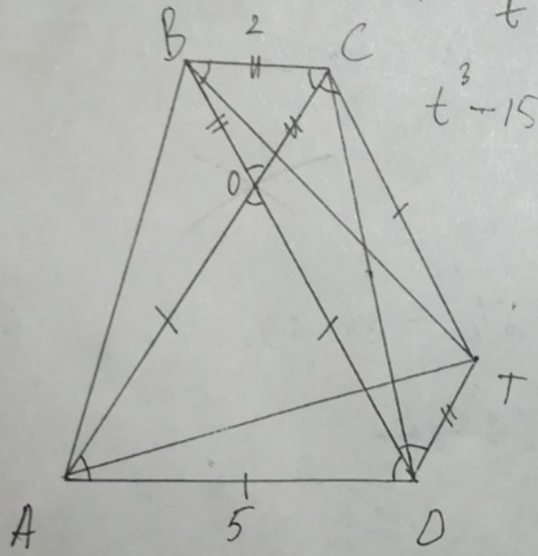
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

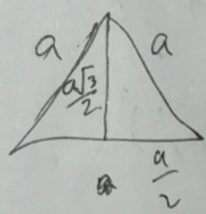


$15 + \frac{4}{t} = t^2$.

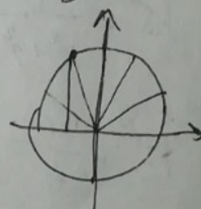
68

$t^3 - 15t + 4 = 0$.





$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ – высота



$AT^2 =$

$25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 120$

$-\frac{1}{2}$

$29 + 10$.

$\sqrt{39}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$h = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{39}}{2}$

$\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{2}$

$\frac{49\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{39}{49}$

$\frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2}$

$\frac{39\sqrt{3}}{4}$

№5.

1) Прямые $y=x$ и $y=65-x$ являются прямыми, содержащими главные диагонали квадрата.

2) Т.к. [redacted] кол-во узлов на стороне квадрата четное число, то пересекаются диагонали __не__ в узле.

3) Каждая из ~~дв~~ главных диагоналей содержит ~~66~~ 64 ~~узлов~~ узла, исключая те, которые на границе.

4) Если первая точка лежит на главной диагонали, то вторая точка может лежать где угодно, только не на одной вертикали или горизонтали с 1-ой точкой.

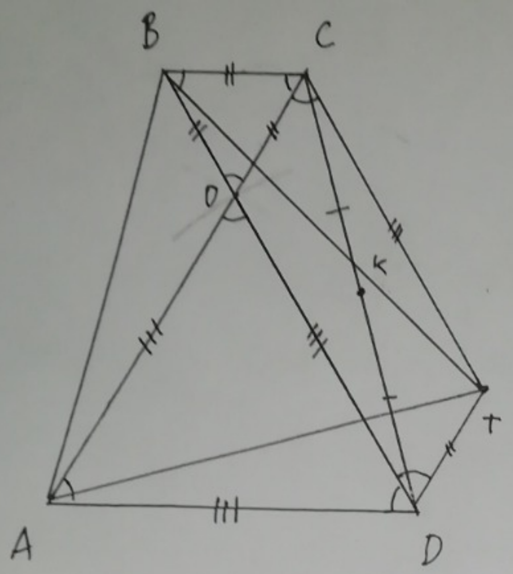
Из выше-упомянутых фактов получаем формулу:

$$\underbrace{\underbrace{(64+64)}_{\text{варианты располож. 1-ой точки}}\underbrace{(64^2-64-64+1)}_{\text{варианты располож. 2-ой точки}}}_{\text{дважды посчитаны случаи, где обе точки на главных диагоналях}} - \underbrace{(64+64)(128-3)}_{\text{число способов разместить обе точки на главные диагонали}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 128 \cdot 63^2 - 128 \cdot 125 = 128(63^2-63-62) = 128 \cdot 62^2.$$

Ответ: $128 \cdot 62^2$

№6.



а) ABT – правильный?

Пусть K – середина CD.

тогда $OK = KT$, $CK = KD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $OCTD$ – парал-м.

$\angle OCT = \angle AOD$, $OD = CT$,

$TD = OC$, $\angle TCO = \angle TDO$

Тогда $\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$

по 2 сторонам и углу между ними. $\Rightarrow$ $AB = BT = TA$. Что и т.д.

б) $BC = 2$, $AD = 5$, $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

По теореме косинусов:

$AB^2 = 5^2 + 2^2 - 2\cdot 5\cdot 2\cdot \cos 120 = 25 + 4 + 10 = 39.$

Площадь правильного $\triangle$-ка стороной a = $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow$ $S_{ABT} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}$.

$ABCD$ – равнобед. трапеция. Высота $ABCD = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Длина средней линии $= \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $S_{ABCD} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{7}{2} = \dfrac{49\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{39}{49}$$

N 4.

$$\begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 5 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 20 \end{cases}$$

$(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 5 - \frac{4}{x^2+y^2} \\ x^2y^2 = 20-(x^2+y^2)^2 \end{cases} \Rightarrow 5 - \frac{4}{x^2+y^2} = 20-(x^2+y^2)^2.$$

Пусть $x^2+y^2=t \Rightarrow t \geq 0$

$\Rightarrow 5-\frac{4}{t} = 20-t^2 \Rightarrow t^2 = 15+\frac{4}{t} \Rightarrow t^3-15t+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t-4)(t^2+4t+1)=0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-4=0 \Rightarrow t=4. >0. \\ t^2+4t+1=0 \end{array}\right.$

$t^2+4t+1=0 \qquad D = 16-4=12.$

$t_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = -2\pm\sqrt{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1<0 \\ t_2<0 \end{array}\right\} \rightarrow$ не подходит.

$$\begin{cases} \frac{4}{4} + x^2y^2 = 5 \\ 4^2 + x^2y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2 = 4. \Rightarrow x^2y^2 = x^2+y^2 = 4. \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-1} . \Rightarrow \frac{x^4}{x^2-1} = 4 \Rightarrow x^4 = 4x^2-4 \Rightarrow x^4-4x^2+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2-2)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}. \Rightarrow x^2+y^2 = 4 \Rightarrow 2+y^2=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{2}.$