Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

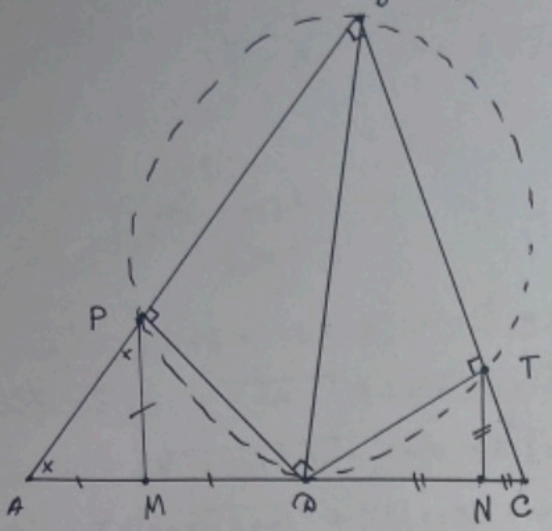
Шифр: **211007793**

ID профиля: **267821**

Вариант 10

Чистовик.

№1



Дано: $\triangle ABC$; окр$(O; \frac{BD}{2}) \cap AB = P$

окр$(O; \frac{BD}{2}) \cap BC = T$

$AM = MD$; $DN = NC$

$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC = ?$

б) $(MP = 1;\ NT = \frac{3}{2};\ BD = \sqrt{5})$

$S_{ABC} = ?$

а)

1. Т.к BD – диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ (как углы, опирающиеся на диаметр)
2. $\angle APD = \angle DTC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (как смежные) $\Rightarrow$ $\angle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольные (по опр)
3. PM – медиана к гипотенузе, значит $PM = AM = DM$ аналогично $TN = DT = NC$.
4. Пусть $\angle PAM = x$, тогда $\angle PDM = 90^\circ - x$ $\angle PDM = \frac{1}{2} \cup PD = \angle PBD$ (как углы между касательной и хордой)
5. $\triangle APM \sim \triangle DTN$ (по 2м сторонам и углу), т.к $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle TND$ (как соответственные)

$\frac{PM}{TN} = \frac{AM}{DN}$, тк $PM = AM$ и $TN = DN$

$\Rightarrow \angle TDN = \angle PAM = x$

6. $\angle TDN = \frac{1}{2} \cup DT = \angle DBT$ (аналогично п.4)
7. $\angle ABC = \angle PBD + \angle DBT = 90 - x + x = 90^\circ$.
8. $PBTD$ - прямоугольник (по признаку), т.к $\angle P = \angle B = \angle T = 90^\circ$
9. $S_{ABC} = S_{PBTD} + S_{ABD} + S_{DTC} = BP \cdot BT + \frac{PD \cdot AP}{2} + \frac{DT \cdot TC}{2}$
10. Т.к $MP = 1$, то $AD = 2MP = 2$, $DC = 2NT = 3$.
11. $BD = \sqrt{5}$, т.е по т. Пифагора $PD^2 + DT^2 = 5$ (1)
12. Из подобия $\triangle PMD \sim \triangle TNC$ (по 2 углам) $\frac{PD}{TC} = \frac{PM}{TN} = \frac{2}{3}$ (2) $PD = \frac{2TC}{3}$
13. по Т. Пифагора для $\triangle DTC$: $DT^2 + TC^2 = 9$; (3)

из (1); (2) и (3) найдем TC:

$\frac{4TC^2}{9} + DT^2 = 5$ $\quad \frac{5TC^2}{9} = 4$; $TC = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $\frac{PD}{TC} = \frac{2}{3}$; $\frac{PD\sqrt{5}}{6} = \frac{2}{3}$; $PD = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$DT^2 + TC^2 = 9$

аналогично найдем AP по т Пифагора $AP^2 = AD^2 - PD^2 = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$; $AB = \frac{2}{\sqrt{5}}$

из подобия (5) $\frac{AP}{DT} = \frac{2}{3}$; $DT = \frac{3AP}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

14. $S_{ABC} = PD \cdot DT + \frac{AP \cdot PD}{2} + \frac{DT \cdot TC}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$

$= \frac{12}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = \frac{25}{5} = 5$

Ответ: 90°; 5

1

Чистовик

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

1) $-x^2+4x+21=0$

ОДЗ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 7]$

$x^2-4x-21=0$

$D_1 = 2+25$

$x = 2 \pm 5$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \end{array}\right.$

$-x^2+4x+21 = -(x-7)(x+3) = (7-x)(x+3)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} - 4$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 7 - x = 2^2\left(\sqrt{(7-x)(x+3)} - 2\right)^2$

$\cancel{10}^{5} - \cancel{2}^{1}\sqrt{(x+3)(7-x)} = \cancel{4}^{2}\left((x+3)(7-x) - 4\sqrt{(7-x)(x+3)} + 4\right)$

$5 - \sqrt{(x+3)(7-x)} = 2(x+3)(7-x) - 8\sqrt{(7-x)(x+3)} + 8$

$2(x+3)(7-x) - 7\sqrt{(x+3)(7-x)} + 3 = 0$

$49(x+3)(7-x) = 4((x+3)(7-x))^2 + 12(x+3)(7-x) + 9$

Замена $(x+3)(7-x) = t$

$4t^2 + 12t - 49t + 9 = 0$

$4t^2 - 37t + 9 = 0$

$D = 1369 - 144 = 7^2 \cdot 5^2$

$t = \frac{37 \pm 35}{8}$

$\left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 0{,}25 \end{array}\right.$

① $-x^2 + 4x + 21 = 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$D_1 = 4 + 12 = 16$

$x = 2 \pm 4$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ -3 \leq x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}$

② $-x^2 + 4x + 21 = \frac{1}{4}$

$4x^2 - 16x - 84 = 1$

$4x^2 - 16x - 85 = 0$

$D_1 = 64 + 340 = 404$

$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{101}}{4} = 2 \pm 0{,}5\sqrt{101}$

$\sqrt{101} > 10$

$2 + 0{,}5\sqrt{101} > 7$

$2 - 0{,}5\sqrt{101} < -3$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + 0{,}5\sqrt{101} \\ x = 2 - 0{,}5\sqrt{101} \end{array}\right. \\ -3 \leq x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

2

Ответ: $-2; 6$

Чистовик

№ 3

(1) $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

(2) $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

т.к Второе уравнение задаёт параболу, где $x_в = в$,

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

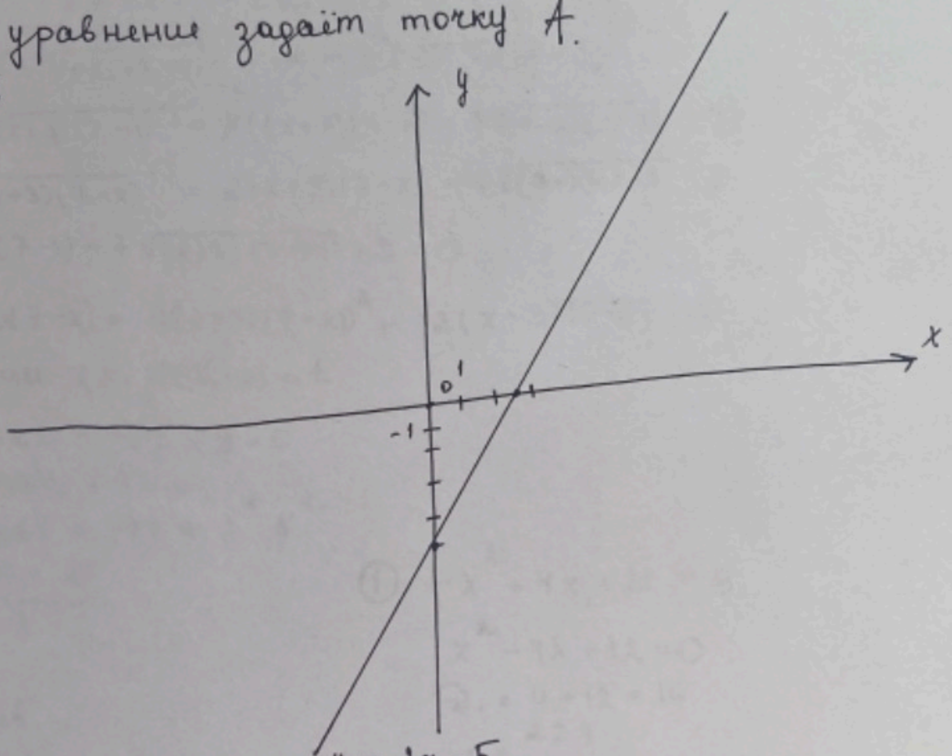
то $в = \frac{2a^2}{2a} = a$

$A(a; \frac{3}{a})$.

найдём $y_в$.

$y_в =$ [зачёркнуто] $a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

первое уравнение задаёт точку A.



$y = 2x - 5$

3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007793**

ID профиля: **267821**

Вариант 10

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

Замение $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$

$$\frac{6}{a} + b = 10$$

① $(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

$x^4+y^4=a^2-2b$

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=81 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2+5b=81 \end{cases} \quad \begin{cases} b=10-\frac{6}{a} \\ a^2+50-\frac{30}{a}-81=0 \end{cases}$$

$$\frac{a^3+50a-30-81a}{a}=0 \quad \begin{cases} a^3-31a-30=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$$

$a^3-31a-30=0$ Делители 30: $\pm1; \pm2; \pm3 \dots$

$a^3-a-30a-30=0$

$a(a^2-1)-30(a+1)=0$

$a(a-1)(a+1)-30(a+1)=0$

$(a+1)(a(a-1)-30)=0$

$$\left[\begin{aligned} &a=-1 \\ &a^2-a-30=0 \end{aligned}\right.$$

1

$D=1+120=121$

$a=\frac{1\pm11}{2}$

$$\left[\begin{aligned} &a=-5 \\ &a=6 \end{aligned}\right.$$

① $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2y^2=16 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2=\frac{16}{y^2} \\ \frac{16}{y^2}+y^2+1=0 \end{cases}$$

Замение $y^2=t$

$\frac{16}{t}+t+1=0$

$\frac{16+t^2+t}{t}=0 \quad \begin{cases} t\neq0 \\ t^2+t+16=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &t=\varnothing \\ &t\neq\varnothing \end{aligned}\right. \\ t\neq0 \end{cases}$$

② $\begin{cases} x^2+y^2=-5 \\ x^2y^2=\frac{56}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2=\frac{56}{5y^2} \\ \frac{56}{5y^2}+y^2=-5 \end{cases}$$

$\frac{56+5y^4+5y^2}{5y^2}=0$

$y^2=t$

$D<0 \quad t\in\varnothing$

③ $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$

$x^2=\frac{9}{y^2}$

$\frac{9}{y^2}+y^2=6$

$\frac{9+y^4-6y^2}{y^2}=0$

$$\begin{cases} y^2\neq0 \\ 9+y^4-6y^2=0 \end{cases}$$

Замениш $y^2=k$

$k^2-6k+9=0$

$D_1=9-9=0$

$k=3$

$y^2=3$

$y=\pm\sqrt{3}$

Чистовик

№ 4

$y = \pm\sqrt{3}$

~~[illegible]~~

1) $y = \sqrt{3}$

$$\frac{6}{3+x^2} + 3x^2 = 10$$

$$\frac{6 + 9x^2 + 3x^4 - 30 - 10x^2}{\underbrace{3+x^2}_{>0}} = 0$$

$3x^4 - x^2 - 24 = 0$

Заменим $x^2 = m$

$3m^2 - m - 24 = 0$

$D = 1 + 288 = 289 = 17^2$

$m = \frac{1 \pm 17}{6}$

$\left[\begin{array}{l} m = -\frac{16}{6} \\ m = 3 \end{array}\right.$ $\quad x^2 \neq -\frac{16}{6}$

$x^2 = 3$; $x = \pm\sqrt{3}$

~~Ответ: $(-\frac{16}{6}; \sqrt{3})$; $(-\frac{16}{6}; -\sqrt{3})$; $(3; \sqrt{3})$ $(3; -\sqrt{3})$ $(\sqrt{3}; -\frac{16}{6})$ $(-\sqrt{3}; -\frac{16}{6})$, $(\sqrt{3}; 3)$ $(-\sqrt{3}; 3)$~~

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

2

211007793 (U267821 M1274555)

Чистовик

№5

1) Общее количество узлов внутри квадрата, данного нам:

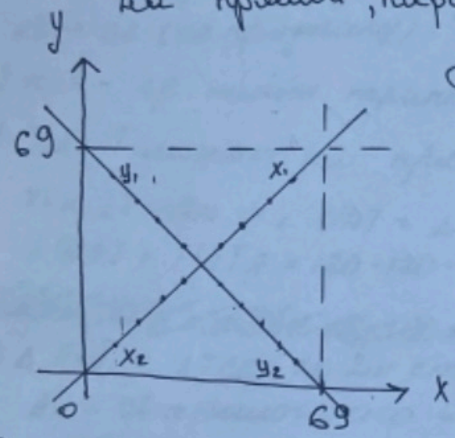
$K_1 = 68 \times 68$ (т.к не считаем границы квадрата) количество узлов, лежащих на прямых $y=x$ и $y=69-x$ - это количество узлов, лежащих на диагоналях квадрата, (т.к $y=x$ и $y=69-x$ - диагонали):

$K_2 = 68 \cdot 2$

2) Количество способов выбрать 2 узла, один из которых лежит на диагонали

$68 \cdot 2 \cdot (68 \cdot 68 - 1) = 136 \cdot 4623$

3) Рассмотрим количество таких пар, что они лежат на прямой, параллельной осям.



Для каждой точки рассмотрим количество точек, пара с которыми даст параллельные осям прямые

4) Для X_1 это 67, для y_1 - 66, т.к для x_1 мы посчитали пару (X_1, y_1).

аналогично для точек X_2 и Y_2

Сложим эти значения $67+66+67+66+67+66+67+66 = 67 \cdot 4 + 66 \cdot 4 = 4 \cdot (67+66) = 4 \cdot (67 \cdot 2 - 1)$

Теперь будем двигаться к центру квадрата, пока не получим что узлы соединяют соседние клетку

Суммируем $S = 4(67 \cdot 2 - 1 + 65 \cdot 2 - 1 + \quad + 3 \cdot 2 - 1 + 1 \cdot 2 - 1) =$

$= 4(2(67+65+ \quad + 3+1) - 34) = 4\left(2 \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 33}{2} \cdot 34 - 34\right) =$

$= 4((2+66) \cdot 34 - 34) = 4(34(68-1)) = 4 \cdot 34 \cdot 67$

Итоговый ответ $136 \cdot 4623 - 4 \cdot 34 \cdot 67 = 628728 - 136 \cdot 67 =$
$136(4623 - 67) = 136 \cdot 4556 = 529626$

3

Ответ: 529626

211007793 (U267821 M1274555)

Чистовик

№6

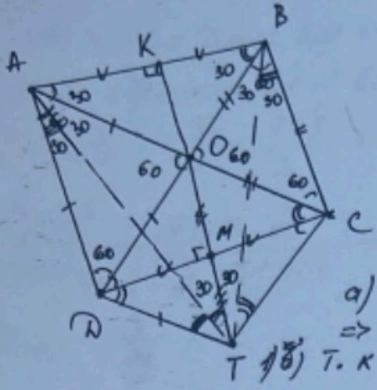
Дано: ABCD - выпуклый; △AOD - правильный и △BOC - правильный;

O симметрична T отн M: (DM = CM)

Док-ать:

а) △ABT - правильный

б) (BC = 2; AD = 7;) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$



а) △DOC = △AOB (по 2м сторонам и углу) ⇒ AB = DC

1) Т.к T симметрична O от M, то TO ∩ AB = K: (AK = KB), т.е т.K - медиана в △ATB

2) TDOC - параллелограмм (по признаку) т.к OM = TM и DM = MC

$\angle CDT = \angle DCO = \angle DBA$ (по св-ву) $\angle DTC = \angle DOC = 120°$

$\angle TCD = \angle CDO = \angle CAB$

3) ABCD - равнобедренная трапеция по опр. т.к AB = DC

AD ∥ BC (по признаку), т.к $\angle ADO = \angle OBC$; а они накрест лежащие

4) KM - ср. линия трапеции, т.е $KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$; KM ∥ AD ∥ BC

5) Т.к T лежит на прямой KM, то TK ∥ AD ∥ BC

6) Т.к $\angle T = 120 \Rightarrow \angle ODT = \angle OCT = 60°$

7) $\angle DAT + \angle DTA = 180 - 120 = 60 = \angle CBT + \angle CTB$

~~8)~~

8) △ADT = △TCB (по 2м сторонам и углу) $\angle D = \angle C$; BC = DT (т.к BC = OC = DT)

AD = CT аналогично ⇒

$\angle DTA = \angle CBT$; $\angle DAT = \angle BTC$; $\angle DTA + \angle CBT = 60$; $\angle DAT + \angle BTC = 60$

9) ~~...~~

$\angle DAB + \angle CBA = 180$ (по св-ву трапеции)

$\angle TBA + \angle TAB = 180 - \angle T$

$\angle DAT + \angle CBT = 60$, т.к $\angle D = \angle C = 120$, а $\angle DAT + \angle CBT = 180 - \angle D = 60$ б

$\Rightarrow 2 \cdot 60 + \angle TAO + \angle TBO = 180°$

$\angle TAO + \angle TBO = 60 \Rightarrow \angle TAB + \angle TBA = 180 \Rightarrow \angle T = 60°$

10. Т.к △DAT = △CTB ⇒ AT = TB ⇒ △ATB - равноб ⇒ △ATB - равност, т.к $\angle T = 60$

11. $S_{ABT} = \frac{AB\sqrt{3}}{4}$. $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

12. $TK = KM\left(= \frac{AD + BC}{2}\right) + TM\ (TM = MO = KO) = \frac{AD + BC}{2} + \frac{AD + BC}{4} = \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{18 + 9}{4} = \frac{27}{4}$

~~13.~~

14. По т.м ~~...~~ $h_{ABT} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$; $AB = \frac{2 \cdot 27}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

15. Т.к ABT - равност, то TK - медиана и высота, т.е TM ⊥ DC, TK ⊥ AB

16. $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{81 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{243\sqrt{3}}{16}$

4

Чистовик
№6б.

17) $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

т.к $KM \parallel AD$ и $DM \perp KM$ и $AK \perp KM$ => $AK \parallel DC$

18) Таким образом AB - высота $= \frac{9\sqrt{3}}{2}$

19. $S_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

20. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{81 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{2 \cdot 8 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{2 \cdot 8} = \frac{6}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

5

211007793 (U267821 M1274555)

№1

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=8 \end{cases}$$

Замены $x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

$x^4+y^4 = a^2-2b$

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=8 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2+5b=8 \end{cases}; \quad b = 10-\frac{6}{a}$$

Если $\underline{\underline{b}}$

$\cancel{a=10}$

$a^2+50-\frac{30}{a}=8$

$\frac{6}{a}=10-b$

$a=\frac{6}{10-b}$

$\frac{a^3+50a-30}{a}=8$

$a \neq 0$

$a(10-b)=63$

$\frac{a+50a-30-8a}{a}=0$

$\frac{a^3+42a-30}{a}=0$

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=8 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \ \ \cdot(-5) \\ a^2+5b=8 \end{cases}$$

Делители 30.

$a=\frac{6}{10-b}$

$-\frac{30}{a}-5b=-50$

$900-$

$\begin{array}{r} 42 \\ \times 30 \\ \hline 00 \\ 126 \\ \hline 1260 \end{array}$

$a^2-\frac{30}{a}=-42$

$a^2-\frac{30}{a}+42=0$

$\frac{a^3-30+42a}{a}=0$

1 3 5) 7 9) 11 13 15) 17 19) 21 23 25 27 29) 31 33 35 37 39) 41

5 5 8 43 45 47 49) 51 53 55 57

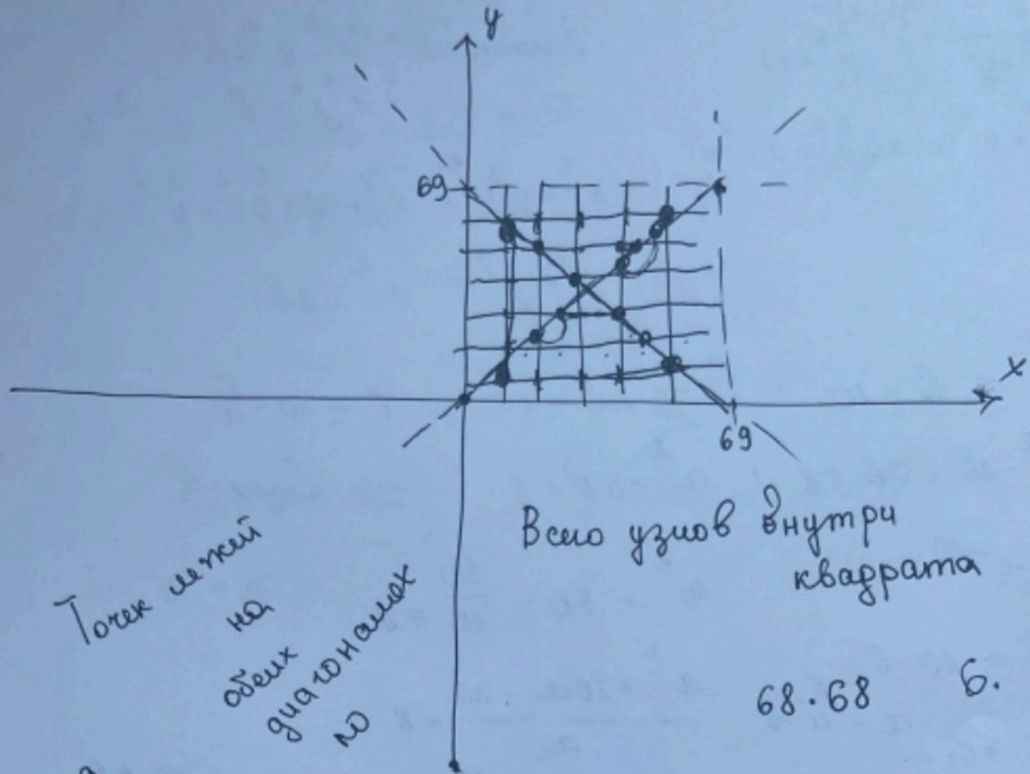
5

59) 61 63 65 67

5

$30+4=34$

№5



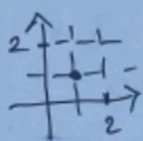
Всего узлов внутри квадрата

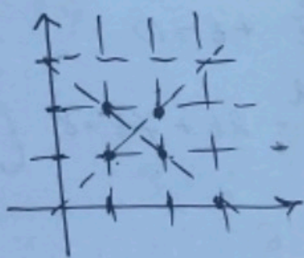
$68 \cdot 68$ б.

Точек лежит на обеих диагоналях по

$68 \cdot 2$

$(n-1)2+1$

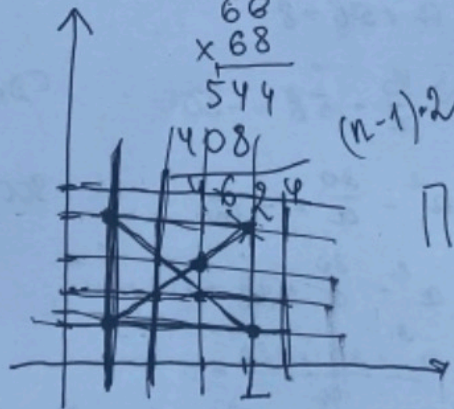




$$\begin{array}{r} 64 \\ 68 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 4624 \end{array}$$

$(n-1)\cdot 2$

Всего вариантов выбрать 2т



Посчит

Если n-чёт

$136 \cdot 4623 - \cancel{67} - \cancel{67} - \cancel{67} - \cancel{67} \cdot 67 \cdot 4 -$

$- 65 \cdot 4$

Рассмотрим каждую точку. до диагонам

т.е 24 клетки

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a^3 - a - 30a - 30 = 0$

$a(a^2 - 1) - \cancel{3}30$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 24 \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 9 \end{array}$$

$-\frac{6}{5} + b = 10$

$b = 10 \frac{6}{5}$

$\frac{56}{5}$

$-6 + b = 10$

$b = 16$

$5t^2 + 5t + 56 = 0$

$t^2 + t + 16 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 56$

$D = 1 -$

$(x - 3)^2 = 0$

$\frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{18 + 9}{4}$

$= \frac{27}{4}$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$ $\quad \frac{6}{3+3} + 9 = 10$

$a = \frac{27 \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2} \cdot \sqrt{3}}$ $\quad 9 + 9 + 7 \cdot 9 = 81$ $\quad 4,5 +$

$\frac{27\sqrt{3}}{6}$ $\quad 9(2 + 7)$

$= \cancel{2}\ \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\frac{81 \cdot 3}{4 \cdot}$

$a^3-31a-30$

$a^2-\frac{30}{a}-31=0$

$a^3-30+31a=0$

$3\,4556$

$1+31$

$=32-30$

$\times\ 136$

27336

14668

4556

529626

$(60-x)+(60-y)$

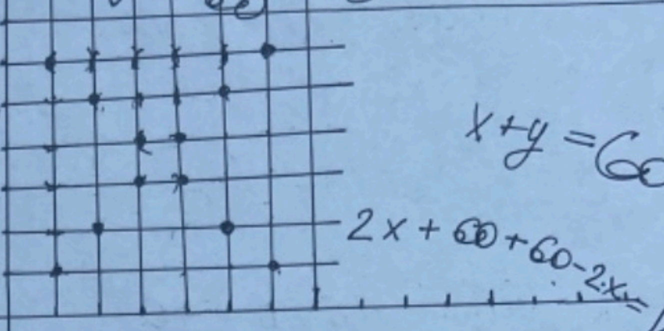
x

d^3+

$2x+2y+60\cdot 4=360$

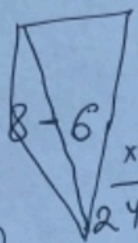
$x+y+120=180$

$x+y=60$



$x+y=60°$

$2x+60+60-2x=180$



$8-6$

81
$\times\ 3$
243

$1+31-30$

$1-31-30=-60$

$4\cdot 5+1\cdot 3+1$

$a^3+0a^2-31a-30\ |\ a-1$

a^2+a-1

$-a^3-a^2$

a^2-31a

a^2-a

$-30a-30$

$-30a+30$

$1\cdot 200$

$x-4\cdot((67\cdot 2)-1+(65\cdot 2)-1+\dots\dots$

$x-4\cdot(2(67+65+\dots\dots 1)-$

$x-4\cdot(2(67+65\dots\dots+1)-34)=$

4623
$-\ 67$
4556

$\frac{27}{4}$ $\frac{27}{8}$

$a+b=60$

$k+m=60$

67
$\times 34$

27
$\times 27$

$67+66$

$27^2(5)$

4623
$\times\ 136$
27738
13869
4623
628728

$=67+67-1$

34
$\times\ 4$
136

$27^2+27\cdot 4$