Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

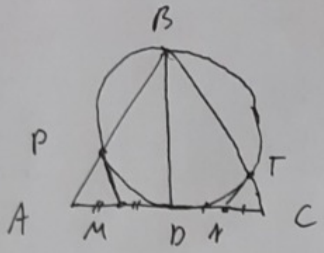
Шифр: **211007747**

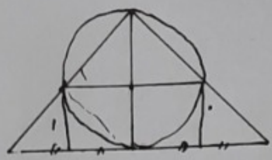
ID профиля: **836323**

Вариант 10

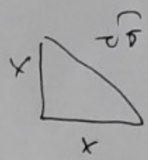
$\boxed{\text{Черновик}}$

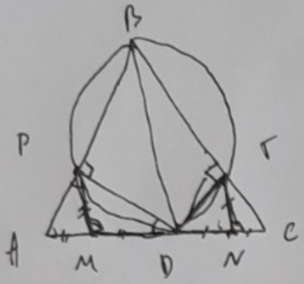
M10

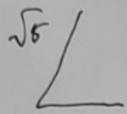




$PD=\sqrt5$



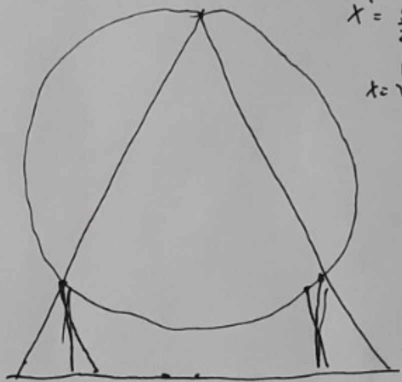


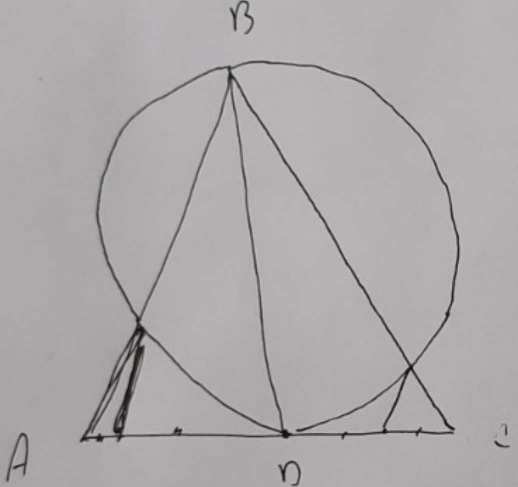


$2x^2=5$

$x^2=\frac{5}{2}$

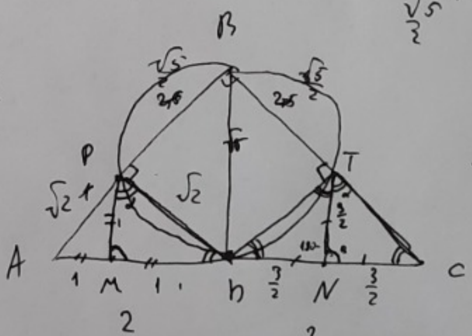
$x=\sqrt{2{,}5}$





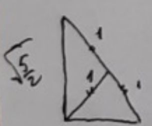
$\frac{2{,}5}{2{,}5}$

$\frac{\sqrt5}{2}$



$\frac{\sqrt5}{2}$

$m=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{2}}$



$a^2+b^2=c^2$ $90-\alpha$

$2(c$

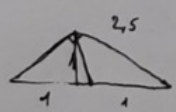
$180-B$ $180-180+B=2$ $B+2\alpha=180$

$P=2+3+5$

$\frac{B}{2}+\alpha=$ $=90^\circ$ $\cos\gamma=\frac{9}{4}$

2,5

$p=5$ $S=\sqrt{5(5-2)(5-3)(5-5)}$



$2+3+5$ $1+1^2-2\cos=\sqrt5$

$=\frac{9}{4}=\cos\gamma$

$\frac{\sqrt5}{2}$ $\frac{5}{2}=2-2\cos\gamma$

Черновик

М10

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$3 - 2 + 4 = 2\sqrt{21+24-36}$

3

$\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$21+4x$

$x^2-4x-21=-$

$7x - x^2 + 21 - 3x$

$x^2-4x-21\leq 0$

$-3;7$

$-3;\ 7$

$x^2-4x-20\frac{3}{4}=0$

$21+4x-x^2$

$x^2-4x-\frac{83}{4}=0$

$a-b+4=2ab$

$4x^2-16x-83=0$

$a-b+4=2ab$

$a-ab-b-ab+4=0$

$a-2ab-b+4=0$

$a(1-b)-b(1-a)+4=0$

$a(1-2b)-b(1-2b)$

$\cancel{\sqrt{x+3}=2\sqrt{21+4x-x^2}}$

$t=1$

$x+3+7-x-2\sqrt{21+4x-x^2} = \left(2\sqrt{21+4x-x^2}-4\right)^2$

$10-2\sqrt{21+4x-x^2} = \left(2\sqrt{21+4x-x^2}-4\right)^2$

$\quad\quad\quad\quad\ \ t$

$256+4\cdot4\cdot83$

$10-t=(t-4)^2$

$10-t=t^2-8t+16$

$2\sqrt{21+4x-x^2}=6$

$\times\ 83$
16
498
83
1328

$\cancel{t^2-7t-26}$

$\sqrt{21+4x-x^2}=3$

$t^2-7t+6=0$

$21+4x-x^2=9$

$t=6\quad t=1$

$-x^2+4x+12=0$

$x^2-4x-12=0$

1

$x\geq-3$

$16+48=64$

$\frac{4+8}{2}=6\qquad\frac{4-8}{2}=-2$

Черновик

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$ – т. A

$2x-y=5$

$y=2x-5$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ $x_B=B$

$x_B=\frac{-b}{2a}$ $\frac{2a^2}{2a}=a$

$(y^2-4xy+4x^2)+5a^2-4ay+4x^2+12ax=0$

$f(a)>2x-5$

$a^3-2a^3-ay+a^3+3=0$

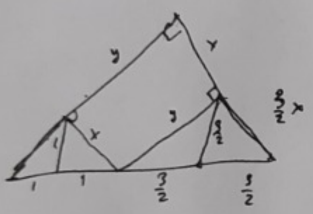
y^2-4ay

$\cancel{8x^2}$

$4x^2+12ax+9a^2$

$y^2-4ay+9a^2$

$(2x+\sqrt{3}a)^2+y-$



$x^2+y^2=5$

$\cancel{x^2+\frac{9}{2}}$

$y^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=9$

$\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}}$

$x^2+y^2=5$

$\frac{18}{5}+$ $\frac{9}{5}$

$y^2+\frac{9}{4}x^2=9$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}$

$x^2+\frac{9}{4}x^2=14$

$\frac{13}{4}x^2=14$

$13x^2=64$

$2r$ $\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$x=\frac{8}{\sqrt{13}}$

$\frac{20}{6}=\frac{16}{5}$

211007747 (U836323 M1277616)

Черновик

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ 16 \\ \hline 498 \\ 83 \\ \hline 1328 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 36 \\ \hline 6 \end{array}$$

1328 : 4.

$$\begin{array}{l} -1328 \mid 4 \\ \ \ 12 \quad\ 332 \mid 4 \\ \ \ 12 \quad -32 \ \mid 83 \\ \qquad\quad\ 12 \end{array}$$

$2\sqrt{332}$

$4\sqrt{83}$

$83 \cdot 4 \cdot 4$

$16 - 4\sqrt{83}$

$\left(2 + \frac{\sqrt{83}}{2}\right)^2$

$4 + 2\sqrt{83} + \frac{83}{2}$

$\frac{8}{2} + \frac{83}{2} = \frac{91}{2} + 2\sqrt{83} \vee 49$

$2\sqrt{83} \vee \frac{98}{2} - \frac{91}{2} =$

$4 \cdot 83$

$\frac{7}{2} = \frac{49}{4}$

$\frac{16}{4} + \frac{83}{4} = \frac{99}{4}$

$49 \cdot 4 = 196$

$4 \cdot 83 < \frac{97 \cdot 97}{4 \cdot 4}$

83

$\frac{83}{4}$

$\frac{100}{4}$

$\boxed{\text{Черновик}}$

$21 - 3 - 4$

$8x^2$ $\quad 2\sqrt{3}$

6

$(y - \dots)(x \dots)$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ $\qquad 3=0 \ \varnothing$

$ay=-ax^2+2a^2x-a^3-3$ $\qquad 1-3+4=2$ $\quad y=2x-5$

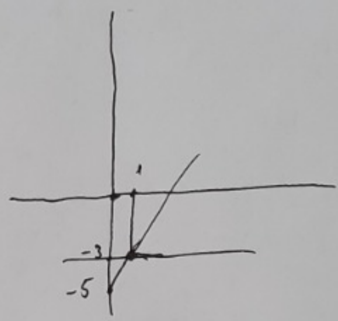
$y=-x^2+2ax-a^2-3$ $\qquad y$

$\frac{-2a}{-2}=a$

$y=-a^2+2a^2-a^2-3$

$y=-3$

$y=-x^2+2ax-a^2-3$



$y^2-4xy-4ay$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$y^2-4(x-a)y$

$y^2-4xy-4ay+8x^2+12ax+5a^3$

$y^2-4(x+a)y$

$y^2-(4+a)y+8x^2+12ax+5a^3=0$

$y(y-4(x+a)$

$16+a^2+8a-32x^2-48ax+20a^3$

$21a^3$

$-32x^2-48ax+8a+21a^3+16$

$32x^2+48ax-8a-21a^3-16=0$

$(48a)^2-4(32\cdot(-$

M10

Чистовик Вариант-10

№2

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$x \geq -3$ $x \leq 7$ $21+4x-x^2 \geq 0$

$-3 \leq x \leq 7$

$$x+3+7-x-2\sqrt{21+4x-x^2}=\left(2\sqrt{21+4x-x^2}-4\right)^2$$

$$10-2\sqrt{21+4x-x^2}=\left(2\sqrt{21+4x-x^2}-4\right)^2$$

$2\sqrt{21+4x-x^2}=t,\quad t>0$

$10-t=(t-4)^2$

$10-t=t^2-8t+16$

$t^2-7t+6=0$

$t_1 \cdot t_2=6$, $t_1+t_2=7$ $\Rightarrow t_1=6; t_2=1$

$2\sqrt{21+4x-x^2}=6$

$\sqrt{21+4x-x^2}=3$

$21+4x-x^2=9$

$x^2-4x-12=0$

$x_1x_2=-12$, $x_1+x_2=4$ $\Rightarrow \boxed{x_1=-2 \quad x_2=6}$

$2\sqrt{21+4x-x^2}=1$

$21+4x-x^2=\frac{1}{4} \quad |\cdot 4$

$84+16x-4x^2=1$

$4x^2-16x-84=-1$

$4x^2-16x-83=0$

$D=256+16\cdot 83=1328$

$x_1=\frac{16\pm\sqrt{1328}}{8}=\frac{16\pm 4\sqrt{83}}{8}=2\pm\frac{\sqrt{83}}{2}$; $2+\frac{\sqrt{83}}{2}>-3$; $2+\frac{\sqrt{83}}{2} \vee 7$

$4+\frac{83}{4}+2\sqrt{83} \vee 7^2$

$2\sqrt{83} \vee \cancel{\frac{97}{2}}\ \frac{91}{8}\ \frac{196}{4}-\frac{99}{4}$

$2\sqrt{83} \vee \frac{97}{4}$

$\sqrt{83} \vee \frac{97}{8}$, $\frac{97}{8}>12$, $\sqrt{83}<10$

т.е $2+\frac{\sqrt{83}}{2}$ – подходит

$2-\frac{\sqrt{83}}{2}<7$

$2-\frac{\sqrt{83}}{2} \vee -3$

$5 \vee \frac{\sqrt{83}}{2}$

$\frac{100}{4} > \frac{83}{4}$

т.е $2-\frac{\sqrt{83}}{2}>-3$ $2-\frac{\sqrt{83}}{2}$ – подходит

Ответ: $x=2\pm\frac{\sqrt{83}}{2}$; $x_1=-2$; $x=6$

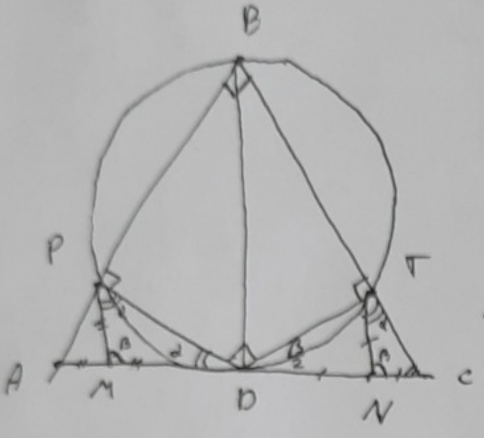
1

М10

Чистовик Вариант-10

N1

Решение



а) $\angle BPD = \angle DTB = 90°$ (Опираются на диаметр)

$\Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоугольные, тогда

PM и TN медианы $\Rightarrow PM = AM = MD$

$TN = DN = NC \Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \angle NTC = \angle NCT = \alpha$

$\angle PMD = \angle TNC = \angle \beta$

$\triangle DTN$ - р/б $\Rightarrow \angle NDT = \frac{180 - (180 - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$

$\angle MDT = \alpha$

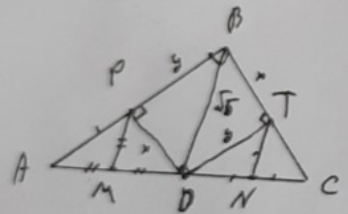
$\angle PDT = 180 - (\alpha + \frac{\beta}{2})$ из $\triangle NTC: \beta + 2\alpha = 180°$

$\angle PDT = 180 - 90° = 90°$ $\qquad \frac{\beta}{2} + \alpha = 90°$

$PBDT$ - вписанный $\Rightarrow \angle PBC = 180° - \angle PDT = 90°$ $\quad$ $\angle PBC = \angle ABC = 90°$

Ответ: $90°$

б)



$\triangle APD \sim \triangle DTC$, $k = \frac{3}{2}$

$\frac{PD}{TC} = \frac{3}{2}$ $\quad TC = \frac{3}{2}x$, тогда

из ~~PBTD~~ $\triangle BDT$: $x^2 + y^2 = 5$

$DC = 3$: $y^2 + (\frac{3}{2}x)^2 = 9$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + (\frac{3}{2}x)^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + \frac{9}{4}x^2 = 9 \end{matrix} \qquad \frac{9}{4}x^2 - x^2 = 4$$

$\frac{5}{4}x^2 = 4 \quad x^2 = \frac{16}{5} \quad x = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$y^2 = 5 - x^2 \quad y^2 = \frac{9}{5};\ y = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$AP = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad TC = \sqrt{9 - \frac{9}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $S_{ABC} = S_{PBTD} + S_{APD} + S_{DTC}$

$S_{ABC} = x \cdot y + \frac{x \cdot AP}{2} + \frac{y \cdot TC}{2} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = 5$

Ответ: 5

2

Чистовик Вариант-10

№3

(1) $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

(2) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=2x-5$

2) $ay=-ax^2+2a^2x-a^3-3 \;/:a$, $a\neq 0$ т.к $\cancel{f_2(a=0)}$
$3\neq 0$

$y=-x^2+2ax-a^2-3$

$x_B=-\frac{2a}{-2}=a$ $\quad f_2(a)=-\cancel{8}a^2+2a^2-a^2-3=-3$

т.е если $a>1$, то т.B лежит правее прямой $y=2x-5$

если $a<1$, то т.B лежит левее прямой $y=2x-5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007747**

ID профиля: **836323**

Вариант 10

Чистовик В-10 М10

№4

$$\begin{cases}\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10\\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81\end{cases}$$

$x^2+y^2=a\geq 0$

$x^2y^2=b$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{6}{a}+b=10\\ a^2+5b=81\end{cases}$$

$b=10-\frac{6}{a}$

$a^2+5(10-\frac{6}{a})=81$ $a^2+50-\frac{30}{a}-81=0$

$a^2-31-\frac{30}{a}=0$ $a^3-31a-30=0$

Схема Горнера:

	1	0	-31	-30
-1	1	-1	-30	0

т.е $(a+1)(a^2-a-30)=0$

$a=-1<0$ $\varnothing$ $a=-5<0$ $\varnothing$ $a=+6$ ✓

$a=6$ $b=9$

$$\begin{cases}x^2+y^2=6\\ x^2y^2=9\end{cases}$$

$y^2=6-x^2$

$x^2(6-x^2)=9$ $6x^2-x^4-9=0$ $x^4-6x^2+9=0$

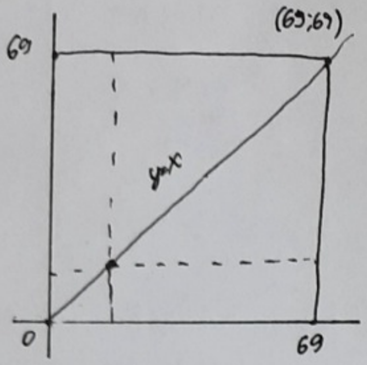
$(x^2-3)^2=0$

$x=\pm\sqrt{3}\rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Ответ $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

Чистовик В-10 М10

№5



т.к границы квадрата не считаются, то всего имеем 67^2 узлов $= 4489$

1) Рассмотрим прямую $y=x$ на ней всего лежит 67 узлов, после того как мы выбрали узел на $y=x$ допустим с корд. $(a;b)$, то ~~все~~ прямые $y=b$ и $x=a$ уже не доступны

т.е недоступно становится 132 узла, тогда доступно: $4489-1-132=4356$

тогда для прямой $y=x$ - имеем $67\cdot4356$ способов

2) для прямой $y=69-x$ - ситуация аналогичная (при этом $y=69-x$ и $y=x$ пересекутся не в узле $69-x=x$ $x=34{,}5 \notin \mathbb{Z}$, поэтому случаи не повторятся

Таким образом, для прямой $y=69-x$ имеем $67\cdot4356$ способов

Итого: $2\cdot67\cdot4356$

$$\begin{array}{r} 4356 \\ \times\ \ 67 \\ \hline 30492 \\ +\ 25916 \\ \hline 289652 \end{array}$$

$289652\cdot2=579304$

Ответ: 579304

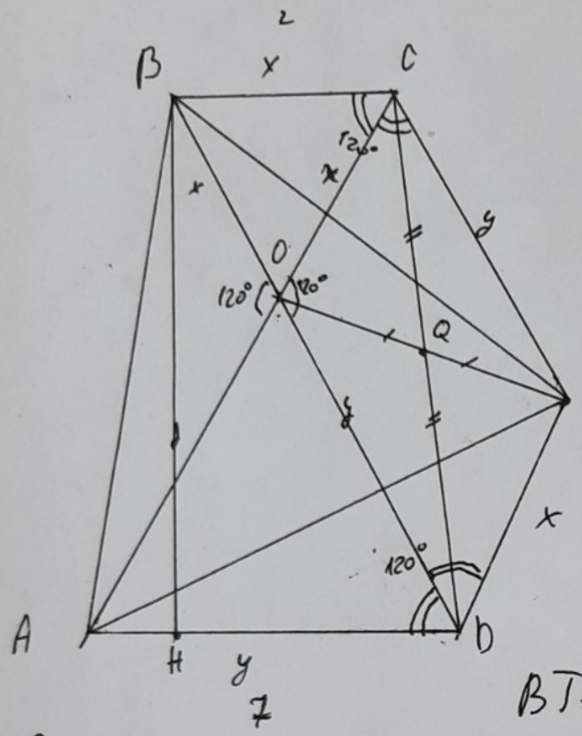
②

211007747 (U836323 M1277617)

M10

Чистовик В-10

№6



а) $OT \cap CD = Q$, т.к $CQ = QD$ и $OQ = QT \Rightarrow$

$\Rightarrow OCTD$ – параллелограмм, тогда

$OD = CT = y$, $OC = TD = x$

$\angle COD = \angle CTD = 120^\circ$: $\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$

$\angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$

тогда $BT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ}$

$AT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ}$

$BA = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ}$, т.е

$BT = AT = BA$, т.е $\triangle ABT$ – правильный, ч.т.д.

б) ~~$S_{ABCD} = \frac{2 \cdot 7}{2} BH$, $h = BH =$~~

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} BT}{4}$ $BT = \sqrt{2^2 + 7^2 - 2 \cdot 14 \cos 120^\circ} = \sqrt{53 + 14} = \sqrt{67}$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot 67}{4}$; $BH = \sqrt{BT^2 - 2{,}5^2}$ $BH = \sqrt{67 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{268 - 25}{4}} = \frac{\sqrt{243}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = 4{,}5 \cdot \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9\sqrt{243}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 67}{4} \cdot \frac{4}{9\sqrt{243}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 67}{9 \cdot 9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{201}}{81\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{\sqrt{201}}{81\sqrt{3}}$

3

211007747 (U836323 M1277617)