Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

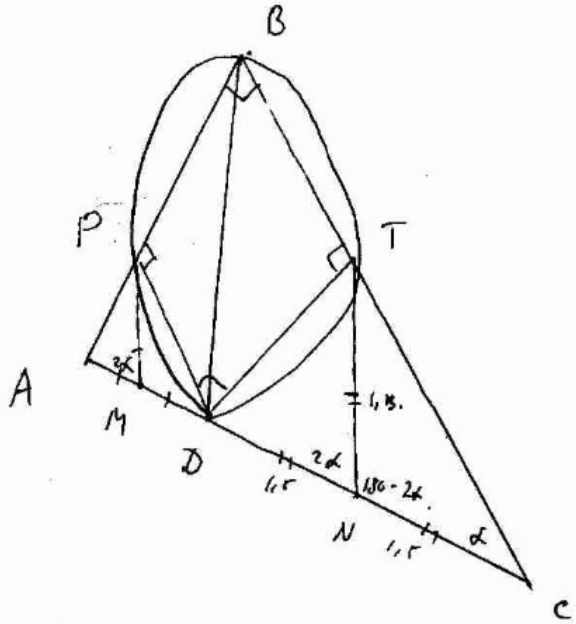
Шифр: **211007706**

ID профиля: **345042**

Вариант 10

Чистовик Математика 10 Вариант 1с.

№1)



Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$
окр. с диам. $BD \cap AB = P$
$\cap BC = T$
M, N - сер. AD и CD.
$PM \parallel TN$
$MP = 1$, $NT = 1{,}5$; $BD = \sqrt{5}$
Найти: $\angle ABC$
S_{ABC}.

Решение: 1) $\angle NTC = \alpha$

2) $\angle BTD = \angle BPD = 90°$ (св-во впис. $\angle$) (опир. на диаметр)

3) $\angle DTC = \angle APD = 90°$ (св-во смежных $\angle$)

4) $\triangle DTC$, $\triangle APD$ - пр/уг. (опр.) $\Rightarrow TN = DN = NC$, $AM = MD = PM$ (св-во медианы пр/уг. $\triangle$)

5) $\triangle NTC$, $\triangle DNT$, $\triangle APM$, $\triangle MPD$ - р/б (по опр.) $\Rightarrow \angle TNC = 180 - 2\alpha$ по св-ву р/б $\triangle$ и Т. о сумме $\angle \triangle$.

6) ~~аналогично~~ $\angle TND = 2\alpha$ (смежный) $\Rightarrow \angle TND = \angle AMP = 2\alpha$ (св-во параллельных прямых)

7) $\angle TNC = 90 - \alpha$ (св-во п/уг $\triangle$)

8) $\angle APM = \angle MAP = 90 - \alpha$ (св-во р/б $\triangle$)

9) $\angle MDP = \alpha$ (св-во п/уг $\triangle$)

10) $\angle PDT = 180 - \alpha - 90 + \alpha = 90°$ (смежные $\angle$).

11) $\angle ABC = 180 - \angle PDT = 90°$ (Т. о сумме $\angle$ многоуг-ка).

12) $BD = PT = \sqrt{5}$ (PT-диаметр по св-ву впис. $\angle$)

13) $PB = a$, $BT = b \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$. (Т.П.)

14) $PD = BT = b$, $DT = PB = a$ (св-во пр-ка)

15) $TC = \sqrt{9 - a^2}$ (Т.П.)

16) ~~$\triangle APM$~~ $\triangle PMD \sim \triangle TNC$ (по 2 пр. ст. и $\angle$ между ними)

17) $\dfrac{\sqrt{9-a^2}}{b} = \dfrac{3}{2}$ (ку подобия)

Чистовик Вариант 10

$2\sqrt{9-a^2}=3b$

$36-4a^2=9b^2$

$b^2=\frac{36-4a^2}{9} \Rightarrow 9a^2+36-4a^2=45$

$5a^2=9$

$a=\frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow b=\sqrt{\frac{36-\frac{36}{5}}{9}}=\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

18) $TC=\sqrt{9-\frac{9}{5}}=\sqrt{\frac{45-9}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ (Т.П.)

19) $AP=\sqrt{4-b^2}=\sqrt{\frac{20-16}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

20) $S_{ABC}=0,5\cdot(AB\cdot BC)=0,5\cdot\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}+\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)=0,5\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=$
$=5$.

Ответ: $\angle ABC=90^\circ$

$S_{ABC}=5$.

Чистовик Вариант 10.

№2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\cdot\sqrt{(7-x)(3+x)}$.   ОДЗ: $x \in [-3;7]$

Пусть $\sqrt{x+3} = a \Rightarrow \sqrt{7-x} = \sqrt{10-a^2}$

$a - \sqrt{10-a^2} + 4 = 2\sqrt{10-a^2}\cdot a$ ОДЗ: $a \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$.

$a + 4 = \sqrt{10-a^2}\cdot(2a+1)$

$a^2 + 8a + 16 = (10-a^2)\cancel{(2a+1)}(4a^2+4a+1)$

$\Updownarrow$

$4a^4 + 4a^3 - 38a^2 - 32a + 6 = 0.$

Подобрав находим, что $a=-1$ - корень этого ур-ния $\Rightarrow$ поделим многочлен на $a+1$

$$\begin{array}{r|l} 4a^4+4a^3-38a^2-32a+6 & a+1 \\ \hline -\;4a^4+4a^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad & 4a^3-38a+6 \\ -38a^2-32a \quad\quad & \\ -\;-38a^2-38a \quad\quad & \\ 6a+6 & \\ -\;6a+6 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Downarrow$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6 = (a+1)(4a^3-38a+6) = 0.$

$4a^3 - 38a + 6 = 0.$

$4a\cdot(a^2-9) - 2(a-3) = 0.$

$4a(a-3)(a+3) - 2(a-3) = 0.$

$(a-3)(4a(a+3)-2)) = 0.$

$a = 3.$ $4a^2 + 12a - 2 = 0.$

$2a^2 + 6a - 1 = 0.$

$D = 36 + 8 = 44.$ $a = -3+\sqrt{11}$ удов. ОДЗ.

$a = \frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2}$; $a = \frac{-6-2\sqrt{11}}{2} < 0$ и $a = -1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} \neq a$ при таких a не имеет корни.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 3. \iff x = 6 \text{ - удов. ОДЗ} \\ \sqrt{x+3} = -3+\sqrt{11} \iff x+3 = 20-6\sqrt{11} \quad x = 17-6\sqrt{11} \text{ - удов. ОДЗ.} \end{array}\right.$$

~~Ответ: $x=6$, $x=17-6\sqrt{11}$~~.

Ответ: $x = 6$; $x = 17 - 6\sqrt{11}$

211007706 (U345042 M1278030)

Листовая. Вариант 10.

$A(a_1; a_2)$
$B(b_1; b_2)$ $\Rightarrow$ ~~a_2~~ координаты должны удовлетворять системам!

$y = 2x - 5$

$$\begin{cases} a_2 > 2a_1 - 5 \\ b_2 > 2b_1 - 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_2 < 2a_1 - 5 \\ b_2 < 2b_1 - 5 \end{cases}$$

из ур-ния параболы: $y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$$\Downarrow$$

$$b_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$b_2 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}.$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{3}{a} > 2a - 5 \quad \text{или} \quad \frac{3}{a} < 2a - 5.$$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(\underset{7-x}{\cancel{x-7}})(x+3)}$

$x^2 - 4x - 21$

$D = 16 + 84 = 100$

$x = \frac{4 \pm 10}{2} \; 7; -3$

$x+3 \geq 0$

$7 - x \geq 0$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 =$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab}$

$a = -19.5$

$\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b} + 4 = 0$

$\cancel{\sqrt{a}}$

$a - b + 4 - 2ab = 0$

$\cancel{\sqrt{x+3}}$

$a + 4 = b(1 + 2a)$

$a^2 + 8a + 16 = b^2 \cdot (1 + 4a + 4a^2)$

$b^2 = \frac{a^2 + 8a + 16}{4a^2 + 4a + 1}$

$\sqrt{x+3} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} + \sqrt{7-x}$

$x + 3 + 16 + 8\sqrt{x+3} = 484 + 16x - 4x^2 + 7 - x + 4(7-x)\sqrt{x+3}$

$4x^2 - 14x + 65 = 4(7-x)\sqrt{x+3} - 8\sqrt{x+3}$

$a^2 + \frac{36-9a^2}{4} = 5$

$4a^2 + 36 - 9a^2 = 20.$

$-5a^2 = -16.$

$a = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$

$b =$

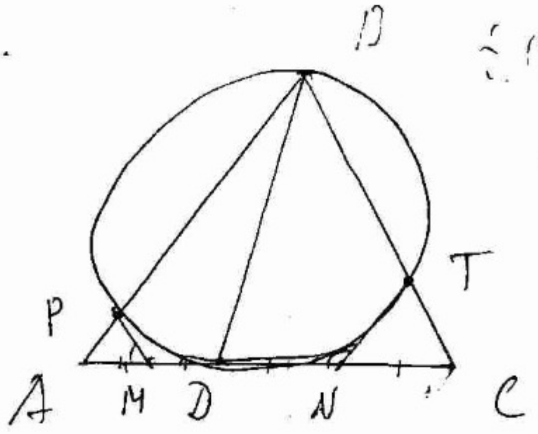
$a^2 + b^2 = 5.$

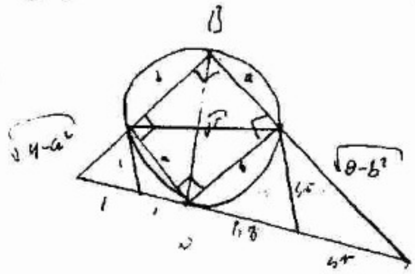
$(a + \sqrt{9-b^2})(b \cdot \sqrt{4-a^2}) =$

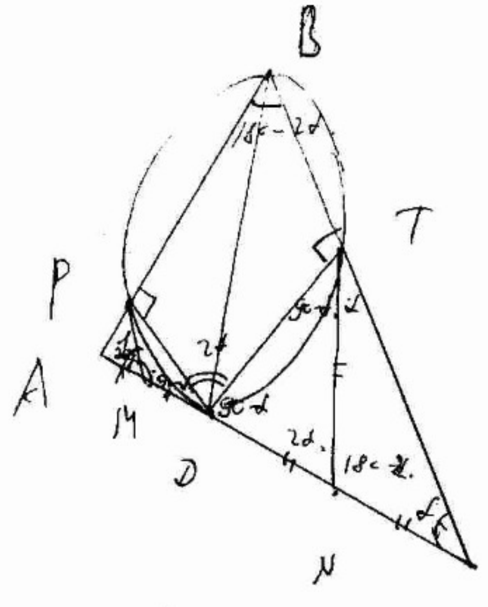
$\frac{\sqrt{9-b^2}}{a} = \frac{3}{2}$

$2\sqrt{9-b^2} = 3a.$

$36 - 4b^2 = 9a^2.$ $b^2 = \frac{36-9a^2}{4}$







$90 - \alpha + \alpha + 180 - 2\alpha$

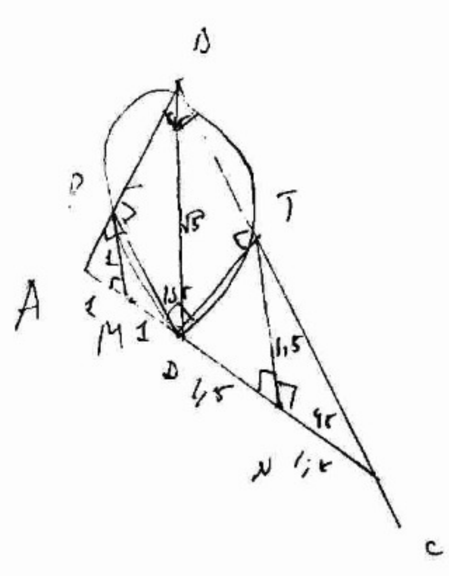
$90 - \alpha + \alpha + 180 - 2\alpha = 18$

$90 - 2\alpha = 0.$

$\alpha = 45$

$180 - 90 + \alpha - \cancel{90}+\alpha = 2\alpha.$

$180 - 90 + \alpha - \alpha = 90.$



$\sqrt{2}a = \sqrt{5}$

$a = \sqrt{2,5}$

211007706 (U345042 M1278030)

$\sqrt{x+3}\,(1-2\sqrt{7-x})-\sqrt{7-x}\,(1+\sqrt{3+x})$

$a-b+4-2ab=0.$

$a-4ab+2ab-b+4$

$a-4ab+2ab-b+4=0.$

$\cancel{a(1+2b)}$

$a+4-2ab$

$\cancel{a+4-2b}$

$a+4-b-2ab=0$

$a+4-2b(a+4)+7b=0.$

$(a+4)(1-2b)+7b=0.$

$\cancel{a-ab}$

$a-b+4+(a-b)^2-a^2-b^2=0.$

$(a-b)(a-b+1)+4-a^2-b^2$

$a-b+4-2ab+a^2b^2$

$\sqrt{11}-3+4$

$\sqrt{11}+1=\sqrt{10-20+6\sqrt{11}}\cdot(-6+2\sqrt{11}+1)$

$-5+2\sqrt{11}$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

211007706 (U345042 M1278030)

2) $a-b+4=2ab.$

$a+4=b(2a+1)$

$b=\frac{a+4}{2a+1}$

$\sqrt{x+3}+4=2\sqrt{(7-x)(x+3)}+\sqrt{7-x}$

$\sqrt{x+3}+4=\sqrt{7-x}(2\sqrt{x+3}+1)$

$x+3+16+8\sqrt{x+3}=84+16x-4x^2+7-x+4(7-x)\sqrt{x+3}$

$4x^2-14x-72=\sqrt{x+3}\cdot(4(7-x)-8)$

$=\sqrt{x+3}\cdot(20-4x)$

$D=196+1152=1348.$

$a^2\le 10.$ $\quad 6\cdot 3.$

$20-6\sqrt{11}$

$9-1+4=12$

$2\cdot\sqrt{1\cdot 9}=$

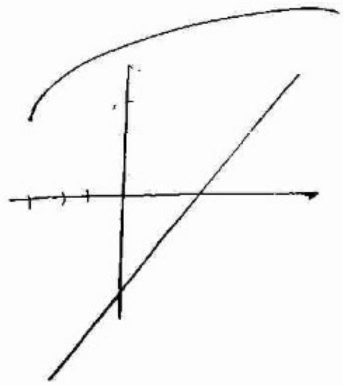
$3-1+4=0$

$y=2x-5.$

$3-1+4 \quad 6.$

$2\cdot\sqrt{3}.$

$\sqrt{35}$



-6

$x\ge -3.$

$-6 \quad x\le 7.$

$17-6.$

$\sqrt{x+3}=a \quad \sim 7-x=\sqrt{10-a^2}$

$4a(a^2-9)-2(a-1)$

$a-\sqrt{10-a^2}+4=2a\cdot\sqrt{10-a^2}$

$4a^3-36a-2a+6.$

$a^2+8a+16=4a^2(10-a^2)$

$a+4=\sqrt{10-a^2}(2a+1).$

$a^2+8a+16=(10-a^2)(4a^2+4a+1).$

$a^2+8a+16=40a^2+40a+10-4a^4-4a^3-a^2$

211007706 (U345042 M1278030)

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0.$

14

$4-4-38+32+6.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007706**

ID профиля: **345042**

Вариант 10

Чистовик Вариант 10

№4) $x^2+y^2=u$, $x^2y^2=v$

$\Downarrow$

$x^4+y^4=u^2-2v$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{6}{u}+v=10 \\ u^2+5v=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{u}+5v=50 & (1) \\ u^2+5v=81. & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1):\ u^2-\frac{30}{u}-31=0 \quad /\cdot u\neq 0$

$u^3-31u-30=0.$

~~заметим что~~

Подбирая находим, что $u=-1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} u^3-31u-30 & u+1 \\ \hline -(u^3+u^2) & u^2-u-30 \\ -u^2-31u & \\ -(-u^2-u) & \\ -30u-30 & \\ -(-30u-30) & \\ 0 & \end{array}$$

$u^3-31u-30=(u+1)(u^2-u-30)=0.$

$u^2-u-30=0.$

$u=6;-5$, заметим, что $u>0$ т.к. $x^2+y^2>0 \Rightarrow u=6$

из (1) ур-ния $v=10-\frac{6}{u}=10-1=9.$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=6-y^2. \\ (6-y^2)y^2=9 \end{cases}$$

$-y^4+6y^2-9=0.$

$y^4-6y^2+9=0.$

$(y^2-3)^2=0.$

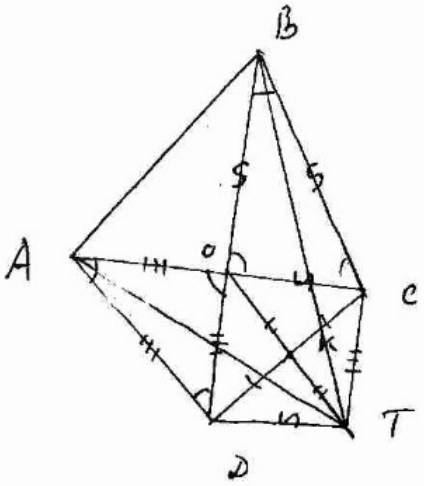
$y=\pm\sqrt{3}$ $\quad y=\sqrt{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

~~x.~~ $\quad y=-\sqrt{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}.$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})\ (\sqrt{3};-\sqrt{3})\ (-\sqrt{3};\sqrt{3})\ (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Чистовик Вариант 10

№6)



Дано: $ABCD$ – выпукл. 4х к.
$AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ – прав-ые
K – сер. CD. $BC = 2$, $AD = 7$.
$OK = KT$
$K \in OT$
Д-ть: $\triangle ABT$ – прав
Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение Док-во: 1) $ODTC$ – пар-м (пр-к.)

2) $\angle DOC = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$ (смежные $\angle$) св-во р/с $\triangle$

3) $\angle OCT = \angle ODT = 60°$ (св-во $\parallel$ прямых)

4) $DO = CT$, $DT = OC$ (св-во пар-ма)

5) $BT = \sqrt{BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120°} = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos 120°} =$
$= \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120°} = AB = AT$, т.к. $AD = AO = CT$, $DT = CB = BO = ?$
(Т. cos)
$\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный (по опред.)

ч.т.д.

Решение: 1) из док-ва $BT = \sqrt{4 + 49 + 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{53 + 14} = \sqrt{67} = AT = AB$

2) $S_{ABT} = \sqrt{1{,}5\sqrt{67} \cdot (0{,}5\sqrt{67})^3} = 67 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}} = \cancel{4489}\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ф. Герона)

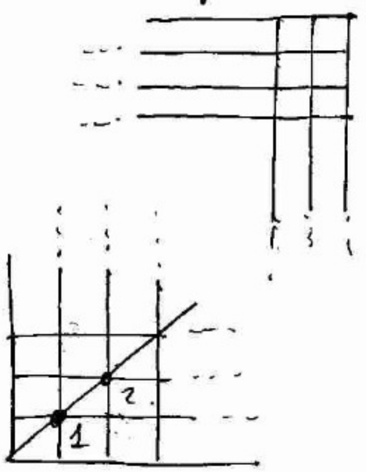
3) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOB} = \frac{4\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{53\sqrt{3}}{4} + \frac{14\sqrt{3}}{2} = \cancel{\frac{67\sqrt{3}}{4}} = \cancel{S_{ABT}} = \frac{53\sqrt{3} + 28\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$.

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Чистовик Вар. 10.



~~По~~ Будем ставить точки в пересечении узла и диагонали, двигаясь по этой диагонали.

Поставим точку 1 => имеем (68^2-1) вар. поставить точку 2, где этом. $2\cdot 67$ вар. нам не подходят

Поставим точку 2 => (68^2-1) вар. поставить еще одну точку, $2\cdot 67$ из которых нам не подходят $+1$ вар. мы уже учли, поставив 1 точку => аналогично, двигаясь по 1-ой диагонали получаем:

$(68^2-1)-2\cdot 67+(68^2-1)-2\cdot 67-1+(68^2-1)-2\cdot 67-2\ldots+(68^2-1)-2\cdot 67-68.$

для 2-ой диагонали квадрата поступаем аналогично, но для каждой точки 2 диагонали, стоящей мы уже учли 68 вар. точки на 1 диагонали.

Итого получаем: $2\cdot(69\cdot(68^2-1)-69\cdot 67\cdot 2-1-2\ldots-68)-68\cdot 68=$

$=2\cdot(69\cdot 69\cdot 67-69\cdot 67\cdot 2-69\cdot 34)-68\cdot 68=$

$=2\cdot 69(69\cdot 67-67\cdot 2-34)-6868=2\cdot 69\cdot(4623-134-34)-68\cdot 68=$

$=2\cdot 69\cdot(4523)-4624=624174-4624=619550.$

Ответ: 619 550.

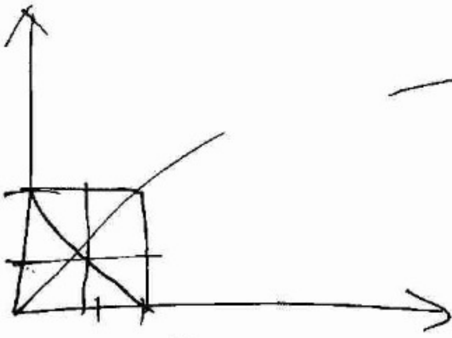
211007706 (U345042 M1278031)

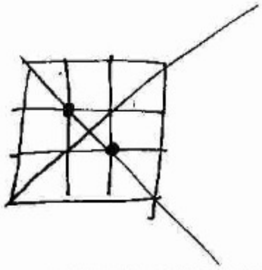
5)

$69\cdot 69\cdot 67.$

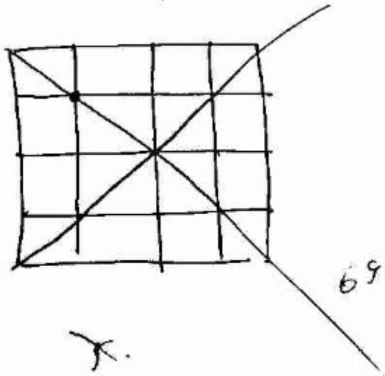
~~1+68~~

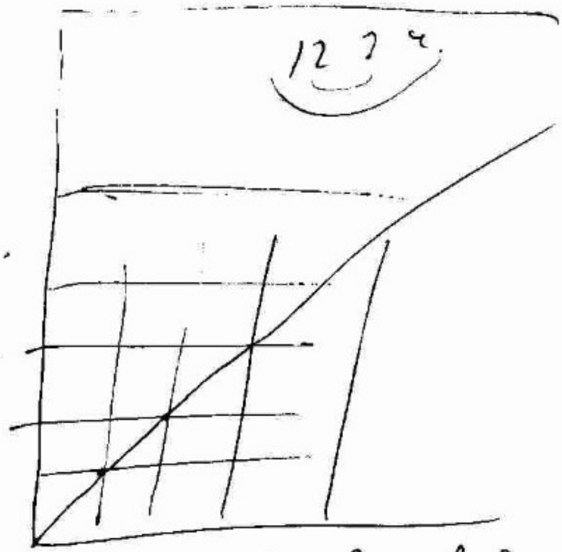
$\frac{69\cdot 68}{2}.$





4

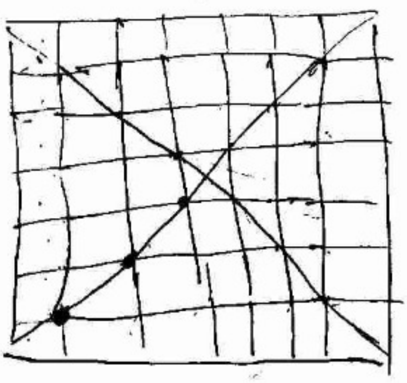




12 ?

69.

7.



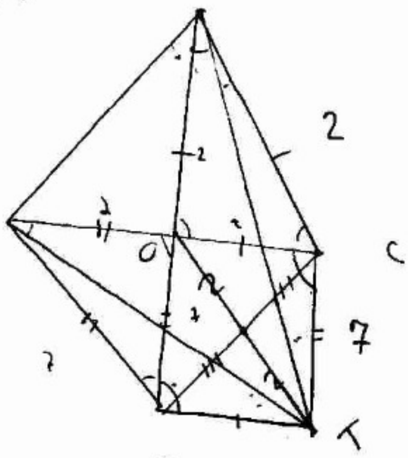
7

$68+68=136$ вар. вообр. ущ на гр.

13

$4\cdot 9+4\cdot 5=4\cdot(14)=56$

$4\cdot(1)$



3 – 4.

5 – 56.

7.

35.

$69\cdot(68^2-1)-69\cdot 67\cdot 2-$

$-1-2-\dots-68.$

$((68\cdot 68)-1).$

$(68^2-1)-67\cdot 2+$

$+(68^2-1)-67\cdot 2-1+$

$+(68^2-1)-67\cdot 2-2+$

211007706 (U345042 M1278031)

$\dots+(68^2-1)-67\cdot 2-\frac{69-1}{2}\cancel{34}\,68.$

65
× 69
67
483
+ 414
4623

64
× 68
68
544
+ 408
4624

412
4523
× 1138
36184
13569
+ 4523
6.24174
− 4624
619550

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81\end{cases}$$

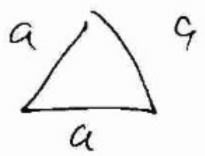
$$6+x^4y^2+x^2y^4=10x^2+10y^2$$

4^4

$$\begin{array}{r} \times\ 67\\ 67\\ \hline 469\\ 402\\ \hline 4489\end{array}$$

$x^2+y^2=u$ $\qquad u^2-2v+7v=81.$

$x^2y^2=v.$



$$\begin{cases}\dfrac{6}{u}+v=10\\ u^2+5v=81\end{cases}$$

~~$6+uv+10u=$~~

~~$6+10u$~~

$$\begin{cases}6+uv-10u=0.\\ u^2+5v-81=0\end{cases}$$

$\frac{3}{2}a\cdot(\frac{1}{8}a^2$

$4\sqrt{\frac{9}{16}a^4}$

$$\begin{array}{r} \times\ 67\\ 67\\ \hline 9\end{array}$$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

~~u^2+uv~~

$u^2+u(v-10)+5v=0.$

$u^2+u(v-10)+5v-81=0.$

$D=v^2-20v+100-20v+324=$

$=v^2-40v+424.$

$6+u(v-10)=0.$

~~$u=10$~~ $\qquad u=-\frac{6}{v-10}$

~~$6+10u=$~~

$uv=10u-6$

$v=\frac{10u-6}{u}.$

$u^2+\frac{10u-6}{u}-81=0.$

$u^3-71u-6=0.$

~~$27=125$~~ $\quad 3$

$6x+x=71$

$x=\frac{71}{7}=10\frac{1}{7}.$

$+x-6x=71$

$x=-\frac{71}{5}=-$

$$\begin{array}{r} \times\ 71\\ 8\\ \hline 568\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 64\\ 8\\ \hline 512\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 81\\ 9\\ \hline 729\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 71\\ 9\\ \hline 639\end{array}$$

21100770 (U345042 M1278031)

$$\begin{cases} \frac{6}{u} + v = 10 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10u - uv - 6 = 0. \\ u^2 + 5v - 81 = 0 \end{cases}$$

$\cancel{10u - 5uv + 5uv.}$

$u^2 \quad \cancel{10u^2 - u^2}$

$u(10 - v) = 6.$

$u = \frac{6}{10 - v}$

$\frac{36}{100 - 20v + v^2} + 5v - 81 = 0.$

$5v^3 - 100v^2 + 500v - 81v^2 + 1620v - 8100 + 36 = 0.$

$5v^3 - 181v^2 + 2120v - 8064 = 0.$

$8064 \,|\, 181$
$-724 \quad 44$
$\cancel{8}24$

$\frac{6}{u} + v = 10.$

$$\begin{cases} \frac{30}{u} + 5v = 50 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$$

$u^2 - \frac{30}{u} = 31$

$-1 + 31 - 30 = 0.$

$u^3 - 31u - 30 = 0.$

$-1 + 31 - 30.$

$u^2 - 30u - u - 30$

$u^3 - 31u - 30 \,|\, u + 1$
$-u^3 + u^2 \quad u^2 - u - 30 = 0.$
$\cancel{-31u - 30}$
$-u^2 - 31u$
$-u^2 - u$
$-30u - 30$

$D = 1 + 120 = 121$

$u = \frac{1 \pm 11}{2} = 6; -5.$

$9 + 9 + 7 \cdot 9 = 9 \cdot ($

211007706 (U345042 M1278031)