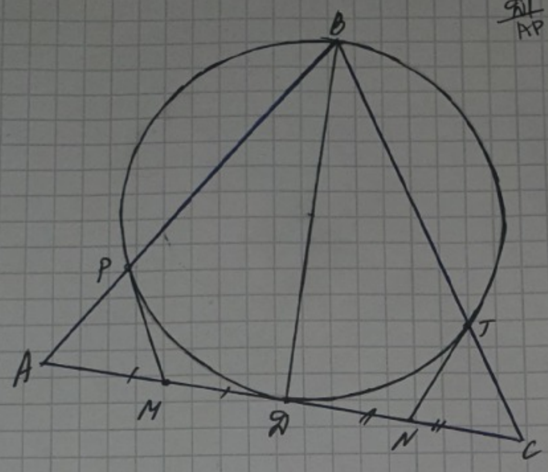
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007702**

ID профиля: **366441**

Вариант 10



$\frac{\cancel{BT}}{AP} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$

$3AP = 2BT$

$BT = \frac{3AP}{2}$

$CT^2 = 9 - \frac{9AP^2}{4} = \frac{9}{4}(4 - AP^2)$

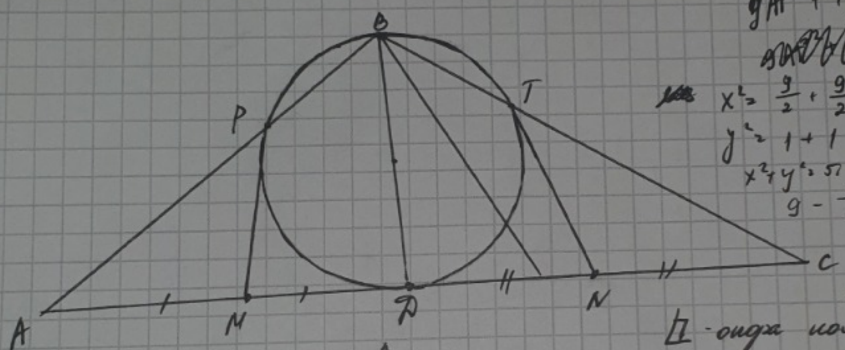
$\sin\alpha = \frac{AP}{2}, \cos\alpha = \frac{CT}{3}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{9-CT^2}{9}} = \frac{AP}{2}$

$\frac{9-CT^2}{9} = \frac{AP^2}{4}$

$9AP^2 = 36 - 4CT^2$

$9AP^2 + 4CT^2 = 36$



$x^2 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos 2\alpha.$

$y^2 = 1 + 1 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(180^\circ - 2\alpha).$

$x^2 + y^2 = 5?$

$9 - \frac{9}{2}\cos 2\alpha + 2 + 2\cos 2\alpha$

$= 5$

$11 - \frac{5}{2}\cos 2\alpha = 5$

$-\frac{5}{2}\cos 2\alpha = -6$

$\cos 2\alpha = \frac{12}{5}$

П - опира на диаметр.

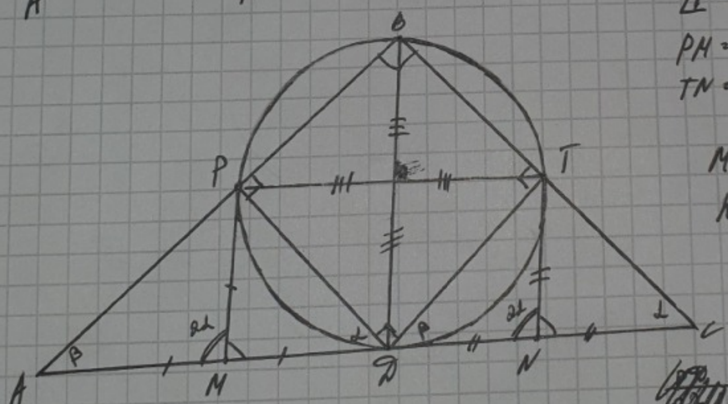
$PM = AM = MD.$

$TN = DN = NC.$

$BT^2 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos 2\alpha = 9 - \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{12}{5}\right) = 9 - \frac{9\cdot 6}{5} = \frac{45-54}{5}$

$MP = 1, NT = \frac{3}{2}, BD = \sqrt{5}.$

Найти: $S_{ABC}.$



$AD = 2, DC = 3$

$AC = 5$

$PT = BD = \sqrt{5}$

$\frac{CT}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{5}$

$\frac{BT}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Ответ: 90°.

$\sin\alpha = \frac{\cancel{BT}}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AP}{2}$, $\cos\alpha = \frac{CT}{3}$

$\Rightarrow 3AP = 2BT$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{9-CT^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-CT^2}}{3} = \frac{AP}{2}$

$CT^2 = \sqrt{\left(\frac{3AP}{2}\right)^2 + 9} =$

$= \sqrt{\frac{36-9AP^2}{4}} = \frac{3\sqrt{4-AP^2}}{2}$

$\frac{9-CT^2}{9} = \frac{AP^2}{4} \Rightarrow 36 - 4CT^2 = AP^2$

$AP^2 + 4CT^2 = 36.$

$AP^2 + \frac{36-9AP^2}{4} = 36$

$\frac{-5AP^2+36}{4} = 36$

$DT^2 = DN^2 + NT^2 - 2\cdot\cos 2\alpha \cdot DN\cdot NT = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 2\cdot\frac{9}{4}\cdot\cos 2\alpha =$

$= \frac{9}{2}(1-\cos 2\alpha)$

$PD^2 = DM^2 + PM^2 - 2\cdot PM\cdot DM\cdot\cos(180^\circ - 2\alpha) =$

$= 1 + 1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 2\alpha = 2(1+\cos 2\alpha)$

$DT^2 + PD^2 = PT^2 = 5.$

$\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cos 2\alpha + 2 + 2\cos 2\alpha = 5.$

$\frac{13}{2} - 5 = \frac{5}{2}\cos 2\alpha$

$\frac{3}{2} = \frac{5}{2}\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$

$DT^2 = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow DT = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$PD^2 = 2\cdot\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5} \Rightarrow PD = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$

$\triangle CDT \sim \triangle CAB$:

$\frac{DT}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = \frac{5DT}{3} = \frac{5\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}}{3} = \sqrt{5}$

$\triangle APD \sim \triangle ABC$:

$\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = \frac{5PD}{2} = \frac{5\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 5.$

Ответ: 5.

$-\frac{1{,}5}{2\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 21+4x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ -(x^2-4x-21) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ x^2-4x-21 \leq 0 \end{cases}$

$21+4x-x^2 = 0$

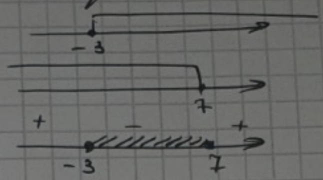
$x^2-4x-21=0$

$\frac{D}{4} = 4+21 = 25$

$x_1 = \frac{2+5}{1} = 7$

$x_2 = \frac{2-5}{1} = -3$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ (x+3)(x-7) \leq 0 \end{cases}$



$x \in [-3; 7]$.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} \;\Big|\; (\;)^2$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + 16 + 8(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) = 2\sqrt{(x+3)(x-7)}$

$x+3+7-x - 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} + 16 + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} = 0.$

$26 - 4\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} = 0$

$26 - 2\cdot(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} = 0$

$26 - 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{7-x} + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} = 0$

$26 + 6\sqrt{x+3} - 6\sqrt{7-x} = 0$

$\cancel{26}^{13} = \cancel{2}\cdot 3(\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3})$

$13 = 3(4 - 2\sqrt{21+4x-x^2})$

$13 = 12 - 6\sqrt{(x+3)(x-7)}$

$1 = -6\sqrt{(x+3)(x-7)}$

$26 - 4ab + 8a - 8b = 0.$

$26 = 4ab + 8b - 8a$

$26 - 4\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} = 0.$

$13 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 4\sqrt{x+3} - 4\sqrt{7-x} = 0$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = x+3+7-x - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\sqrt{(x+3)(7-x)} = (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 - 10.$

$3 + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + 4(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) = 0$

$t = \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}.$

$t^2 + 4t + 3 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1$

$\cancel{t_1 = -2 + \sqrt{7}}$

$\cancel{t_2 = -2 - \sqrt{7}}$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-2+\sqrt{7} \quad (\uparrow)^2$$

$$x+3+7-x-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=7+4-4\sqrt{7}$$

$$-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=1-4\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=4\sqrt{7}-1 \quad (\cdot)^2$$

$$4(21+4x-x^2)=16\cdot 7+1-8\sqrt{7}$$

$$84+16x-4x^2=\underbrace{112+1}_{113}-8\sqrt{7}$$

$$4x^2-16x+29-8\sqrt{7}=0.$$

$$\frac{D}{4}=64-4(29-8\sqrt{7})=-52+32\sqrt{7}.$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-2-\sqrt{7}$$

$$\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=2+\sqrt{7}$$

$$7-x+x+3-2\sqrt{7-x}\sqrt{x+3}=11+4\sqrt{7}$$

$$t^2+4t+3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=-3 \end{array}\right. , \quad \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-1$$

$$\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=1$$

$$10-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=1$$

$$-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=-9$$

$$\sqrt{(7-x)(x+3)}=\frac{9}{2}$$

$$(7-x)(x+3)=\frac{81}{4}$$

$$-x^2+4x+21-\frac{81}{4}=0$$

$$4x^2-16x+3=0$$

$$\frac{D}{4}=64-12=52.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+\sqrt{52}}{4}=\dfrac{8+2\sqrt{13}}{4}=\dfrac{4+\sqrt{13}}{2} \\ x_2=\dfrac{8-\sqrt{52}}{4}=\dfrac{4-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=3$$

$$10-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=9$$

$$\sqrt{(7-x)(x+3)}=\frac{1}{2}$$

$$-x^2+4x+21=\frac{1}{4}$$

$$4x^2-16x-83=0.$$

$$\frac{D}{4}=64+83\cdot 4=$$

$$=4(16+83)=4\cdot 99=6^2\cdot 11$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+6\sqrt{11}}{4}=\dfrac{4+3\sqrt{11}}{2} \\ x_2=\dfrac{8-6\sqrt{11}}{4}=\dfrac{4-3\sqrt{11}}{2}. \end{array}\right.$$

$\frac{4+\sqrt{13}}{2} \overset{<}{\vee} 7.$

$4+\sqrt{13} < 14$

$\sqrt{13} < 10$

$13 < 100$

$\frac{4-\sqrt{13}}{2} \overset{>}{\vee} -3$

$4-\sqrt{13} > -6$

$-\sqrt{13} > -10$

$\frac{4+3\sqrt{11}}{2} \overset{<}{\vee} 7$

$4+3\sqrt{11} \overset{<}{\vee} 14$

$3\sqrt{11} < 10$

$99 < 100$

$4-\sqrt{13} > 4-3\sqrt{11}$

$-\sqrt{13} > -3\sqrt{11}$

$\frac{4-3\sqrt{11}}{2} \overset{>}{\vee} -3$

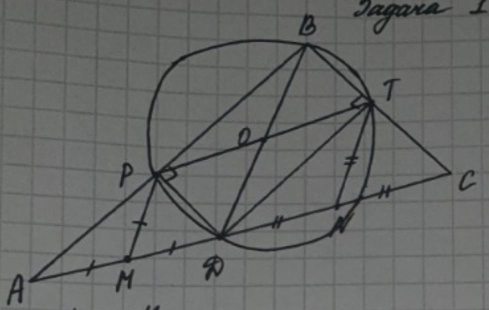
$4-3\sqrt{11} > -6$

$-3\sqrt{11} > -10$

$-99 > -100$

Ответ: $\left\{\frac{4-3\sqrt{11}}{2}; \frac{4-\sqrt{13}}{2}; \frac{4+\sqrt{13}}{2}; \frac{4+3\sqrt{11}}{2}\right\}$

Задача 1.



Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$,
$AM = MD$, $DN = NC$.
$\omega(O, R = \frac{1}{2}BD) \cap AB = P$,
$\omega \cap BC = T$, BD – диаметр ω.
$PM \parallel TN$.

а) Найти: $\angle ABC$ – ?

Решение:

1) Соединим т. P и т. M, т. T и т. N.

2) BD – диаметр ω, т. $P \in \omega$, т. $T \in \omega$ $\Rightarrow$ $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (~~внутренние~~ вписанные углы, опирающиеся на диаметр).

3) $\angle BPD + \angle APD = 180°$ (смежные) $\Rightarrow$ $\angle APD = 180° - \angle BPD = 90°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\triangle APD$ – прямоугольный, PM – медиана $\triangle APD$ $\Rightarrow$ $PM = AM = MD$

(по свойству медианы в прямоугольном треугольнике: она равна половине гипотенузы).

4) $\angle BTD + \angle DTC = 180°$ (смежные) $\Rightarrow$ $\angle DTC = 180° - \angle BTD = 90°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\triangle DTC$ – прямоугольный, TN – медиана $\triangle DTC$ $\Rightarrow$ $TN = DN = NC$

(по свойству медианы в прямоугольном треугольнике: она равна половине гипотенузы).

5) Пусть $\angle CDT = \beta$, $\angle TCD = \alpha$, $\alpha + \beta = 90°$ (т.к. $\triangle DTC$ – прямоугольный).

6) $\triangle DNT$ – равнобедренный (т.к. $DN = NT$) $\Rightarrow$ $\angle DTN = \angle TDN = \beta$.

по сумме ~~двух~~ углов в $\triangle DNT$:

$\angle DTN + \angle TDN + \angle DNT = 180°$ $\Rightarrow$ $\angle DNT = 180° - \angle DTN - \angle TDN = 180° - 2\beta$.

7) $PM \parallel TN$ (по условию) $\Rightarrow$ $\angle PMN + \angle TNM = 180°$ (односторонние при $PM \parallel TN$ и секущей MN) $\Rightarrow$ $\angle PMN = 180° - \angle TNM = 180° - (180° - 2\beta) =$
$= 2\beta$.

8) $\triangle APM$ – равнобедренный (т.к. $PM = AM$) $\Rightarrow$ $\angle APM = \angle PAM$.

9) $\angle PMD$ – внешний для $\triangle APM$ $\Rightarrow$ $\angle PMD = \angle APM + \angle PAM = 2\angle PAM$ $\Rightarrow$

$\angle PAM = \frac{\angle PMD}{2} = \beta$.

10) ~~Зная~~ по сумме углов в $\triangle ABC$:

$\angle ABC + \angle CAB + \angle ACB = 180°$

$\angle ABC = 180° - \angle CAB - \angle ACB = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha+\beta)$, но

$\alpha+\beta = 90°$ (см. пункт 5) $\Rightarrow \angle ABC = 90°$.

Ответ: $90°$.

б) Дополнительно известно: $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$.

Найти: S_{ABC} - ?

Решение:

1) из пункта а:

$\angle DNT = 180° - 2\beta$

$\angle PMD = 2\beta$.

$AM = PM = MD$, $DN = NT = NC$, $\angle ABC = 90°$.

2) т.к. около четырехугольника PBTD описана окружность ω, $\angle ABC = 90° \Rightarrow PT$ - диаметр (на дугу $\breve{PT}$ опирается $\angle ABC = 90°$).

Значит, $PT = BD = \sqrt{5}$.

3) по т. косинусов в $\triangle DNT$:

$DT^2 = DN^2 + NT^2 - 2DN \cdot NT \cdot \cos(180° - 2\beta) = 2DN^2 - 2DN^2 \cdot \cos(180° - 2\beta)$,

но $\cos(180° - 2\beta) = -\cos 2\beta \Rightarrow DT^2 = 2DN^2(1 + \cos 2\beta)$

4) по т. косинусов в $\triangle PMD$:

$PD^2 = PM^2 + MD^2 - 2PM \cdot MD \cdot \cos 2\beta = 2PM^2 - 2PM^2 \cos 2\beta =$

$= 2PM^2 \cdot (1 - \cos 2\beta)$.

5) PT - диаметр $\Rightarrow \angle PDT = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр) $\Rightarrow \triangle PTD$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$PD^2 + DT^2 = PT^2$

$2PM^2 \cdot (1 - \cos 2\beta) + 2DN^2(1 + \cos 2\beta) = PT^2$

$2PM^2 - 2PM^2 \cos 2\beta + 2DN^2 + 2DN^2 \cos 2\beta = PT^2$

$$\cos 2\beta = \frac{PT^2 - 2RN^2 - 2PM^2}{2RN^2 - 2PM^2} = \frac{5 - 2\cdot\frac{9}{4} - 2}{2\cdot\frac{9}{4} - 2} = \frac{3 - \frac{9}{2}}{\frac{9}{2} - 2} =$$

$$= \frac{3 - 4{,}5}{4{,}5 - 2} = -\frac{3}{5}.$$

6) $RT^2 = 2\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{5}$. (см. пункт 3)

$RT = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

7) $PR^2 = 2\cdot 1\cdot\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5}$ (см. пункт 4)

$PR = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$

8) $\triangle CTR \sim \triangle CBA$ ($\angle CTR = \angle ABA = 90^\circ$; $\angle C$ – общий):

$\frac{CT}{CB} = \frac{CR}{CA} = \frac{TR}{BA} = \frac{3}{5}$ $\left(\text{т.к. } \left.\begin{matrix} CR = 2NC = 3 \\ AR = 2MR = 2 \end{matrix}\right\} AC = CR + AR = 5\right)$

$AB = \frac{5RT}{3} = \frac{5\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}}{3} = \sqrt{5}$

9) $\triangle PAR \sim \triangle BAC$ ($\angle APR = \angle ABC = 90^\circ$; $\angle A$ – общий):

$\frac{PA}{BA} = \frac{AR}{AC} = \frac{PR}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = \frac{5PR}{2} = \frac{5\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

10) $\triangle ABC$ – прямоугольный $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5.$

Ответ: 5.

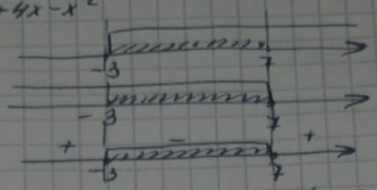
Задача 2.

Решить уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$.

Решение:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \\ 21+4x-x^2\ge 0 \end{cases}$$



$21+4x-x^2=-(x+3)(x-7)=(x+3)(7-x)$, т.е. $(x+3)(x-7)\le 0$

Значит, $x\in[-3;7]$.

2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\ge -4$.

Возведём обе части в квадрат:

$(x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)})+16+8(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$10-4\sqrt{(x+3)(7-x)}+16+8\sqrt{x+3}-8\sqrt{7-x}=0 \quad |:2$

$13-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+4\sqrt{x+3}-4\sqrt{7-x}=0$.

Посмотрим, чему равно $(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2$:

$(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2=x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=10-2\sqrt{(x+3)(7-x)}\Rightarrow$

$\Rightarrow -2\sqrt{(x+3)(7-x)}=(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2-10$.

$13-10+(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2+4(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})=0$

Пусть $t=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}$, $t\ge -4$

$t^2+4t+3=0$

по т. Виета:

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=-3 \end{array}\right.$$

Вернёмся к замене:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-1$ $\qquad$ $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3$

$\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = 1 \quad ()^2$

$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 1$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{9}{2}$

$-x^2+4x+21-\frac{81}{4}=0$

$4x^2-16x+3=0$

$\frac{D}{4} = 64-12=52$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{8+\sqrt{52}}{4} = \frac{4+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{8-\sqrt{52}}{4} = \frac{4-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

$\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = 3$

$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 9$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{2}$

$-x^2+4x+21 = \frac{1}{4}$

$4x^2 - 16x - 83 = 0$

$\frac{D}{4} = 64+83\cdot 4 = 6^2\cdot 11$

$\left[\begin{array}{l} x_3 = \frac{8+6\sqrt{11}}{4} = \frac{4+3\sqrt{11}}{2} \\ x_4 = \frac{8-6\sqrt{11}}{4} = \frac{4-3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

Проверка:

$\frac{4+\sqrt{13}}{2} \overset{<}{\vee} 7$

$4+\sqrt{13} < 14$

$\sqrt{13} < 10$

$\frac{4+3\sqrt{11}}{2} \overset{<}{\vee} 7$

$4+3\sqrt{11} < 14$

$3\sqrt{11} < 10$

$99 < 100$

$\frac{4-3\sqrt{11}}{2} \overset{>}{\vee} -3$

$4-3\sqrt{11} > -6$

$-3\sqrt{11} > -10$

$10 > 3\sqrt{11}$

$100 > 99$

$\frac{4-\sqrt{13}}{2} \overset{>}{\vee} -3$

$4-\sqrt{13} > -6$

$-\sqrt{13} > -10$

$100 > 13$

$4-\sqrt{13} \overset{>}{\vee} 4-3\sqrt{11}$

$-\sqrt{13} > -\sqrt{99}$

Ответ: $\left\{\frac{4-3\sqrt{11}}{2}; \frac{4-\sqrt{13}}{2}; \frac{4+\sqrt{13}}{2}; \frac{4+3\sqrt{11}}{2}\right\}$

211007702 (U366441 M1273217)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007702**

ID профиля: **366441**

Вариант 10

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$, $a\geq 0, b\geq 0$

$\frac{6}{a+b}+ab=10$

$6+ab(a+b)=10(a+b)$

$a^2b+ab^2-10a-10b+6=0$

$a^2b+a(b^2-10)-10b+6=0$

$D=(b^2-10)^2-4(10b+6)\cdot b = b^4-20b^2+100+40b^2-24b^2 =$

$= b^4-20b+10-24b^2$

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81 \end{cases}, \quad ab=10-\frac{6}{a+b}$$

$a^2+b^2+70-\frac{42}{a+b}=81$

$a^2+b^2+7ab=81$ $\quad a^2+b^2-\frac{42}{a+b}-11=0$

$(a+b)^2=81-5ab$, $\quad 5ab=81-(a+b)^2$

$\frac{6}{a+b}+\frac{81-(a+b)^2}{5}=10 \quad |\cdot 5(a+b)$

$(a+b)81-(a+b)^3+30-50(a+b)=0$

$-(a+b)^3+31(a+b)+30=0$

$(a+b)^3-31(a+b)-30=0$, $\quad t=a+b$

$t^3-31t-30=0$

	1	0	-31	-30	
-1	1	-1	-30	0	– корень.
1	1	1	-31	-61	

$(t+1)(t^2-t-30)=(t+1)(t-6)(t+5)$

$D=121$

$t_1=\frac{1+11}{2}=6$

$t_2=\frac{1-11}{2}=-5$

но $t\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=-1$, $t=-5$ – не корни.

$b=6.$

$a+b=6.$

$\cancel{\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}}$

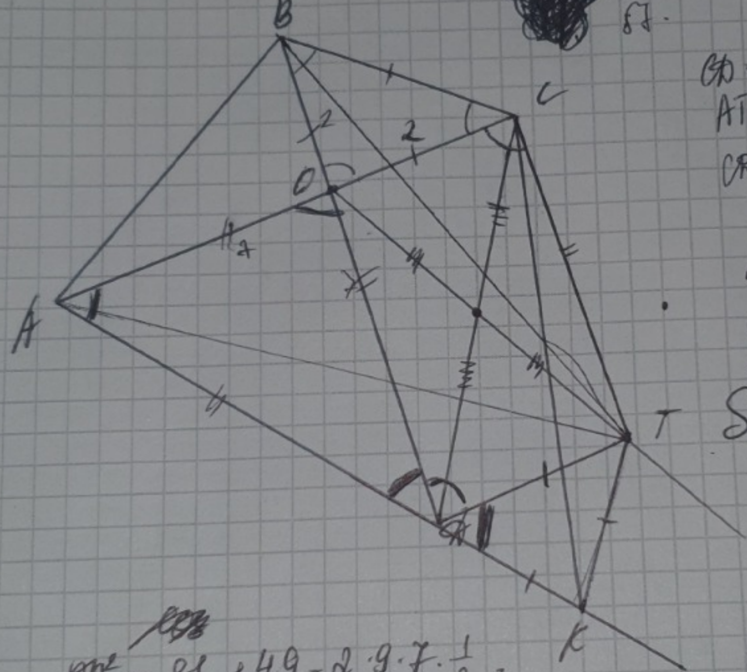
$$\begin{cases} a+b=6 \\ ab=9 \end{cases}, \begin{cases} a^2+9-6a=0 \\ b=\frac{9}{a} \end{cases} \begin{cases} (a-3)^2=0 \\ b=\frac{9}{a} \end{cases} \quad \begin{matrix} a=3 \\ b=3 \end{matrix}$$

$x^2=y^2=3$

$x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}.$

Ответ $(\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3}),(\sqrt{3};-\sqrt{3}),(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

67.



$CD=BT.$
$AT=CD.$
$CK=AB.$

через р/б трапецию!

$BC=2,\ AD=7.$

$S_{ABT} : S_{ABCD}.$

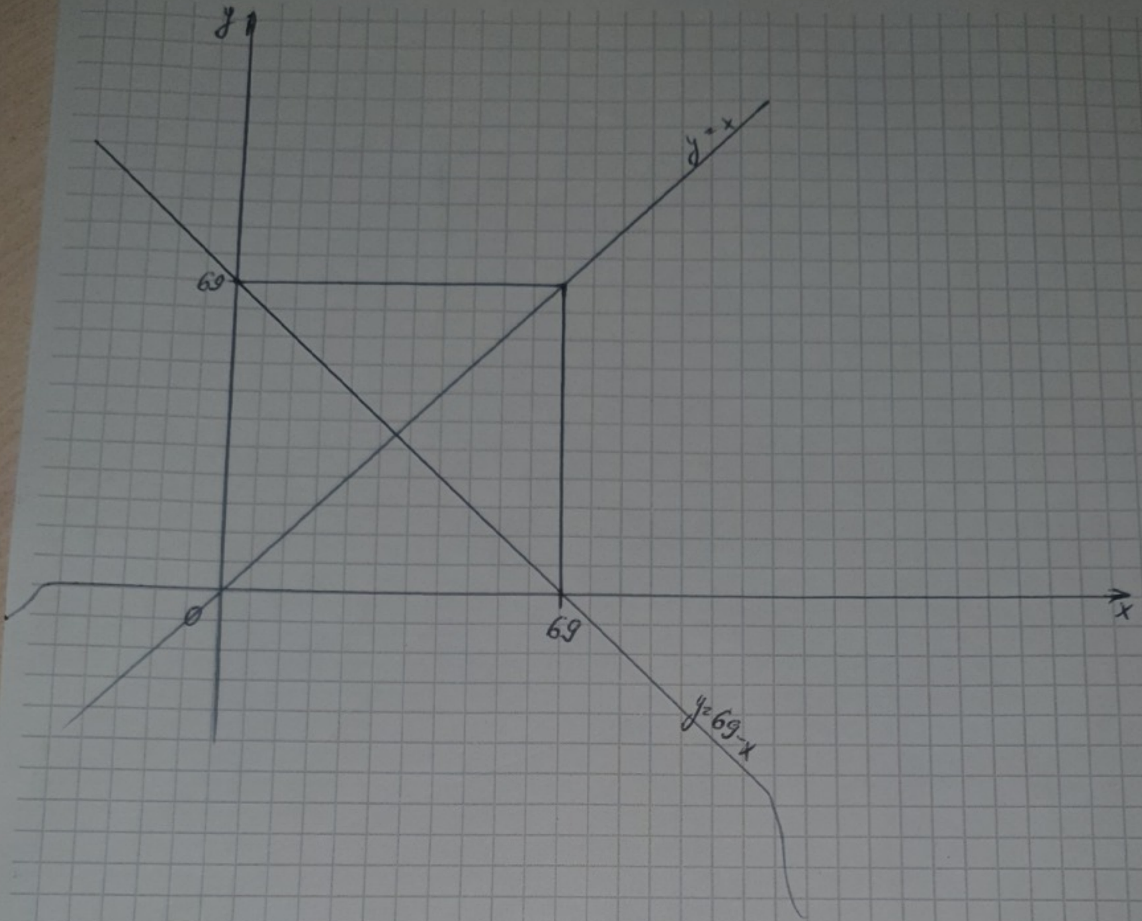
$$S_{трап}=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot9\cdot9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$AB^2=81+49-2\cdot9\cdot7\cdot\frac{1}{2}=81+49-63=18+49=67.$$

$\sqrt{67}.$

$$S_{ABT}=\frac{1}{2}\,67\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{67\sqrt{3}}{4}$$

$\frac{67}{81}=$ Ответ: $67:81$



211007702 (U366441 M1273218)

Задача 4.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

Решение:

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$, при чем $a\geq 0$, $b\geq 0$.

ОДЗ: $a+b\neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{6}{a+b}+ab=10 \\ (a+b)^2+5ab=81 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{6}{a+b}+ab=10 \\ ab=\dfrac{81-(a+b)^2}{5} \end{cases}$$

Подставим значение ab из 2-го уравнения системы в первое, получаем:

$$\frac{6}{a+b}+\frac{81-(a+b)^2}{5}=10 \quad \Big| \cdot (a+b)\cdot 5$$

$$30+81(a+b)-(a+b)^3=50(a+b)$$

$$-(a+b)^3+31(a+b)+30=0$$

$(a+b)^3-31(a+b)-30=0$, пусть $t=a+b$, $t>0$:

$$t^3-31t-30=0$$

по схеме Горнера-Руффини:

	1	0	-31	-30
-1	1	-1	-30	0 – корень.

$$(t+1)(t^2-t-30)=0$$

$$t^2-t-30=0$$

$$D=1+120=121$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=6 \\ t_2=-5 \end{array}\right.$$

$(t+1)(t+5)(t-6)=0$, НО! $t>0 \Rightarrow t=-1$, $t=-5$ не удовл. системе уравнений!

$t=6$ – корень системы уравнений, т.е.:

$a+b=6$, тогда ~~система приобретает вид~~ имеем:

$$\begin{cases} ab = 9 \\ a + b = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = \dfrac{9}{a} \\ a + \dfrac{9}{a} = 6 \end{cases}, \quad a \neq 0,$$

~~[illegible]~~ умножим на a обе части:

$$\begin{cases} b = \dfrac{9}{a} \\ a^2 - 6a + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{9}{a} \\ (a - 3)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3 \\ a = 3. \end{cases}$$

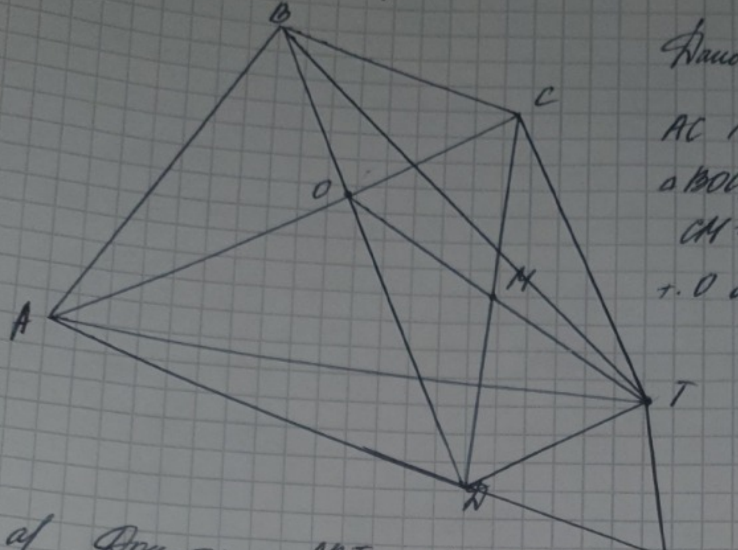
Вернёмся к замене:

$$\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Имеем пары: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Ответ: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Задача 6.



Дано: ABCD — выпуклый четырехугольник,
$AC \cap BD = O$,
$\triangle BOC$, $\triangle DOA$ — правильные,
$CM = MD$, т. T — симметрична
т. O относительно т. M.

а) Док-ть: $\triangle ABT$ — правильный.

Док-во:

1) $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ — правильные $\Rightarrow \angle BOC = \angle CBO = \angle BCO = \angle OAD = \angle ODA = \angle ADO = 60^\circ$; $BC = BO = OC$, $AO = OD = AD$.

2) $\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$ ~~прям~~ (при секущей AC и накрест лежащих углах $\angle BCA$ и $\angle CAD$).

3) $\left.\begin{array}{l} AC = OC + AO \\ BD = OB + OD \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BD.$

4) $\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ AC = BD \end{array}\right\}$ ABCD — равнобедренная трапеция $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB = CD$.

5) соединим CT и TD, отметим т. $N \in AD$ (прямой) такую, что $NT = ND = DT$, тогда $\triangle DTN$ — правильный $\Rightarrow$ $\angle TDN = \angle TND = \angle DTN = 60^\circ$.

6) $\angle ADO + \angle ODT + \angle TDN = 180^\circ$ (образуют развернутый угол) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ODT = 180^\circ - \angle TDN - \angle ADO = 60^\circ$.

7) т. T — симметрична т. O, относительно т. M, т.е. $OM = MT$.

$\angle CNO = \angle TNA$ (вертикальные)
$CN = NT$
$CM = MA$ (условие)
$\Rightarrow \triangle CNO = \triangle ANT$ (по двум сторонам и углу между ними). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCA = \angle CAT \Rightarrow CO \parallel AT$ (по накр. лежащим углам $\angle OCA$ и $\angle CAT$ и секущей CA),

$CO \parallel AT$, $CO = AT$, значит ~~[illegible]~~ $OCTA$ - параллелограмм. $\Rightarrow$
$\Rightarrow OA \parallel CT$.

8) $OA \parallel CT$
$CO = BC = AT$
$\Rightarrow BCTA$ - равнобедренная трапеция $\Rightarrow$
$\Rightarrow BT = CA$.

9) $OC \parallel AT$
$CT = OA = AA$
$\Rightarrow ACTA$ - равнобедренная трапеция $\Rightarrow$
$\Rightarrow AT = CA$.

10) Имеем: $BT = CA$
$AT = CA$
$AB = CA$
$\Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный.
Ч.т.д.

б) Дополнительно известно: $BC = 2$, $AA = 7$.
Найти: $S_{ABT} : S_{ABCA}$.
Решение:
1) $ABCA$ - трапеция $\Rightarrow S_{ABCA} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BA \cdot \sin \angle BOC$.

$BA = AC = OC + AO = BC + AA = 9$

$S_{ABCA} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

2) $S_{ABT} = \frac{1}{2} \sin \angle ABT \cdot AB \cdot BT$.

$\triangle ABT$ - правильный $\Rightarrow \angle ABT = 60°$.

211007702 (U366441 M1273218)

3) по т. косинусов в $\triangle ABO$:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle ABO = 49 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 49 + 4 + 14 = 67 \Rightarrow AB = BT = \sqrt{67}$$

4) $$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{2}$$

5) $$S_{\triangle ABT} : S_{ABCK} = \frac{67\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81} = 67 : 81$$

Ответ: 67 : 81.