Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007686**

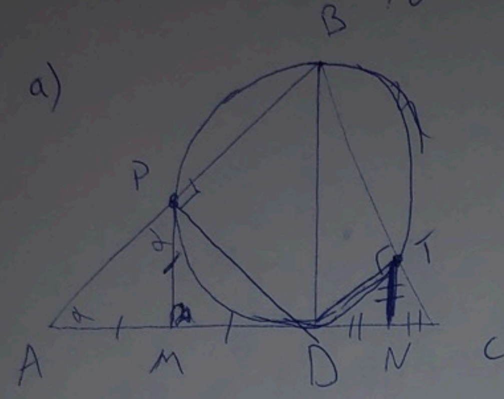
ID профиля: **872203**

Вариант 10

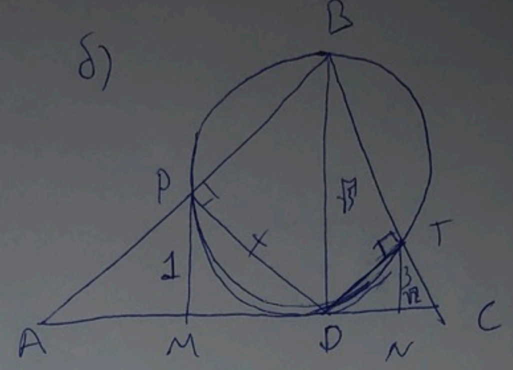
БЕЛОВИК

№1

а)



б)



$MP=1$
$NT=\frac{3}{2}$
$BD=\sqrt{5}$

а) т.к. BD – диаметр то $\angle PDB$ и $\angle BTD$ равен 90

т.к. в прямоуг $\triangle APD$ т.М. явл серед. AD то

$PM=AM=MD$;

Аналогично в прямоуг. $\triangle DTC$: $TN=NA=NC$

Пусть $\angle BAC=\alpha$ тогда $\angle APM=\alpha$ (р/б) $\Rightarrow \angle PMD=2\alpha$

А т.к. по условию $PM \parallel TN$, то $\angle TNC = \angle PMD$

получается что $\angle NCT = \frac{180-\angle TNC}{2} = 90 - \angle TNC = 2\alpha$

Тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180 - \angle BAC \angle BCA = 180° - \alpha - (90-\alpha) = 90°$

б) Пусть $BD = x$, тогда $PD=\sqrt{5-x^2}$

т.к. рассм. $\triangle MPD$, $\triangle NTC$ подоб. $\Rightarrow \triangle MPD \sim \triangle NTC$.
и коэф. подоб. $\frac{3}{2}$

1) $\angle MPD = \angle NTC$ по усл;

2) $\frac{PM}{TN} = \frac{ND}{NC}$;

тогда $TC=\frac{3}{2}$; $PD=\frac{3}{2}x$

$DN=NC=NT=\frac{3}{2}$ т.е. $CD=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

$DT=PB=\sqrt{5-x^2}$ т.к. PBTD прямоуг.

Получаем из $\triangle DTC$: $CD^2=DT^2+TC^2$

$$3^2=(\sqrt{5-x^2})^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2$$

$$9=5-x^2+\frac{9}{4}x^2$$

$$4=\frac{5}{4}x^2$$

$$x=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$AP=\sqrt{AD^2-PD^2}=\sqrt{2^2-x^2}=\sqrt{4-x^2}$ тогда $S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{(AP+PB)(BT+TC)}{2}=$

$=\frac{(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{5-x^2})(x+\frac{3}{2}x)}{2}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{2}\right)/2=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=5$

Ответ: а) 90° б) 5

211007686 (U872203 M1278F14)

БЕЛОВИК №2

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

ОДЗ:
$x+3\geq 0,\ x\geq 3$
$7-x\geq 0,\ x\leq 7$

$(x+3)(7-x)\geq 0$

$-\ 3\ +\ 7\ -$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-4+2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

возведем в квадрат 2 части.

$x+3-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+7-x=4(4x-x^2+21)-16\sqrt{4x-x^2+21}+16$

$3-2\sqrt{7x-x^2+21-3x}+7=16x-4x^2+84-16\sqrt{4x-x^2+21}+16$

разделим на 2, возв. в квадр.

$14\sqrt{4x-x^2+21}=16x-4x^2+90$

$-4x^4+32x^3+67x^2-524x-996=0$

$(x+2)(x-6)(4x^2-16x-83)=0$

1) $x=-2$; 2) $x=6$; 3) $4x^2-16x-83=0$
не подх. подх.
по ОДЗ;

$D=256+1328=1584$

$\frac{16\pm 12\sqrt{11}}{8}$

$x_1=2-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$x_2=2+\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$7<\frac{3\sqrt{11}}{2}<8$ не подх.

$49<\frac{99}{2}$

$x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

~~Ответ: $x=6$; $x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2}$~~

Ответ: $x_1=6$; $x_2=2-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

№2

$x<7$ $x>3$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2+16=4(\sqrt{21+4x-x^2})^2$

$\sqrt{x+3-7+x}+\sqrt{16}=\sqrt{4}(\sqrt{21+4x-x^2})^2$

$\cancel{\sqrt{2x+4}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=6\sqrt{(3+4x-x^2)}$

$x^2+4x-3=0$

$D=16-12=4=2^2$

$x_1=\frac{4-2}{2}=1$

$x_2=3$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=6\sqrt{(x-1)(x-3)}$

$7x-x^2+21-3x$

$-x^2-4+21$

88×88: 704, 704, 7744

$83 \times 8 = 664$

$83 \times 4 = 332$, $\times 4 = 1228$

9·11

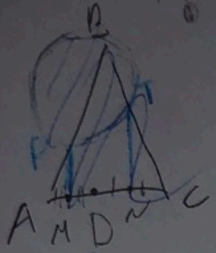
44×44: 176, 176, 2226

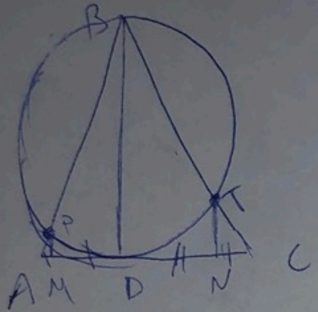
16×16: 96, 16, 256

Чернетка

MP // TN

4·21=84





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007686**

ID профиля: **872203**

Вариант 10

Беловик

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

~~Одз~~ Проведем 2 замены.

$u=x^2+y^2$; $v=x^2y^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{u}+v=10 \\ u^2+\cancel{5}v=81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=10-\dfrac{6}{u} \\ u^2+\cancel{5}v=81 \end{cases} \Rightarrow$$

подставим.

$v=10-\dfrac{6}{u}$

$u^2+50-\dfrac{30}{u}=81$,

$\cancel{u^2+7(10-\frac{6}{u})=81}$

$\cancel{u^2+70-\frac{42}{u}=81}$

$\cancel{u^2-11-\frac{42}{u}}$

Заметим что $u=x^2+y^2\geq 0$, если $u=0$, то $x=y=0$. По одз $x,y\neq 0$

$u^2+50-\dfrac{30}{u}=81 \;|\cdot u$

$u^3+50u-30=81u$

$u^3-31u-30=0$

$(u+1)(u^2-u-30)=0$

$u_1=-1$; $u_2=-5$ не подх. т.к. $u=x^2+y^2\geq 0$; $u_3=6$ подх.

$\dfrac{6}{u}+v=10$

$\dfrac{6}{6}+v=10$

$v=9$; $u=6$

$$\begin{cases} v=x^2y^2 \\ u=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9=x^2y^2 \\ 6=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9=x^2y^2 \\ x^2=6-y^2 \end{cases}$$

$9=(6-y^2)y^2$

$9=6y^2-y^4 \;|\cdot -1$

$\cancel{9=y^2(6-y^2)}$ $y^4-6y^2+9=0$

$\boxed{y^2=a}$

$a^2-6a+9=0$

$D=36-36=0$; $a=\dfrac{6-0}{2}=3$, $y=\pm\sqrt{3}$

1

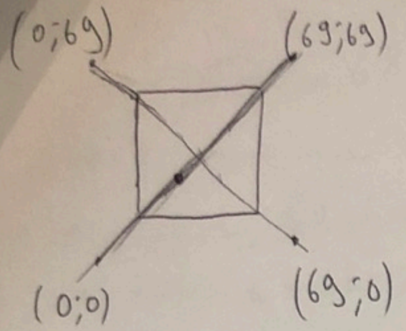
Беловик. №4

$x^2 = 6 - 3$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Отв: ~~$(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$~~ $x = \pm\sqrt{3}$; $y = \pm\sqrt{3}$



№5.1

1) Одна из точек лежит на прямой, всего 140 разных точек, по 70 с одной прямой
у прямых нет общей точки в узлах сетки
$x = 69 - x$, $2x = 69$, $x = 34{,}5$; не целая координата.
т.к. границу мы не включаем (по усл), вычитаем
точки (0;0), (69;69), (69;0), тогда
всего по 68 точек на одной из прямой 136
Всего внутри квадрата 68^2 точек.

• Сначала рассмотрим случай, когда обе точки на прямых. Для каждой точки на прямой есть 2 точки с другой прямой комбинация с одной из этих точек будет лежать на прямой параллельной одной из оси. Значит всего $\frac{136\cdot(136-3)}{2} = 68\cdot 133$ пар т.к. вычитаем
Самую первую точку, также 2 „запрещенные" точки. Делим на 2, т.к. каждую пару посчитали 2 раза

Теперь посчитаем кол-во пар, когда одна точка лежит на прямой, вторая нет
первая точка имеет 136 вариантов
Вторая точка имеет ~~...~~ $(68\cdot 68 - 136 - 66 - 66)$ вар.
Все точки, вычитаем точки из прямых
вычитаем по 66 точек с каждой из осей
т.к. не должны лежать на прямой параллельной

Беловик. №5.2

осм. Всего 68 точек, но ~~т~~ 2 точки уже лежат на прямых $x=y$ или $y=69-x$

Тогда всего:

$68 \cdot 133 + 68 \cdot 68 - 136 - 132 = 13400$

Ответ: 13400

4

Черновик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$\cancel{x^2} = 81 - y^4 - 7\cancel{x}y^2$

$x^2 = 9 - y^2 - \boxed{7}xy$

$x = 9 - y^2 - \sqrt{7}y$

$\frac{6}{81-y^4} + (81 - y^4 - 7y^2)y^2$

$\frac{6}{81-y^4} + 81y^2 - y^6 - 7y^4$

$\frac{6}{81-y^4} - y^6 - 7y^4 + 81y^2$

$\frac{6}{81-y^4} - \frac{y^2}{1}(y^4 - 7y^2 + 81)$

$\frac{6 - y^2(81-y^4)}{81-y^4} = \frac{6 - 81y^2 + y^6}{81-y^4} = (9-y^2)(9+y^2)$

$\frac{16}{y^4} + y^4 + 28 = 81$

$\frac{16}{y^4} + \frac{y^4}{1} = -20$

$\frac{16+y^4y^4}{y^4} = 16 + y^4 = 20$

$y^4 = -36$

$\frac{6}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{1} =$

$= \frac{6 + (x^2y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$

$\frac{6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 10x^2 - 10y^2}{x^2+y^2}$

$\cancel{\frac{7 + x^2y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} =$

$\cancel{x^2 + y^2 + 7xy = 9}$

$= 6 + x^2y^2 4 = 10$

$x^2y^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{y^2}$

$x^2 = \frac{4}{y^2}$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

x^2

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 133 \\ \hline 204 \\ 204 \\ 68 \\ \hline 9044 \\ \times 4360 \\ \hline 13400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 4624 \\ -404 \\ -132 \\ \hline 4492 \\ -132 \\ \hline 4360 \end{array}$$

$D = 1 + 120 = 11^2$

$u_1 = \frac{1-11}{2} = -5$

$u_2 = \frac{1+11}{2} = 6$

211007686 (U872203 M1278115)