Часть 1

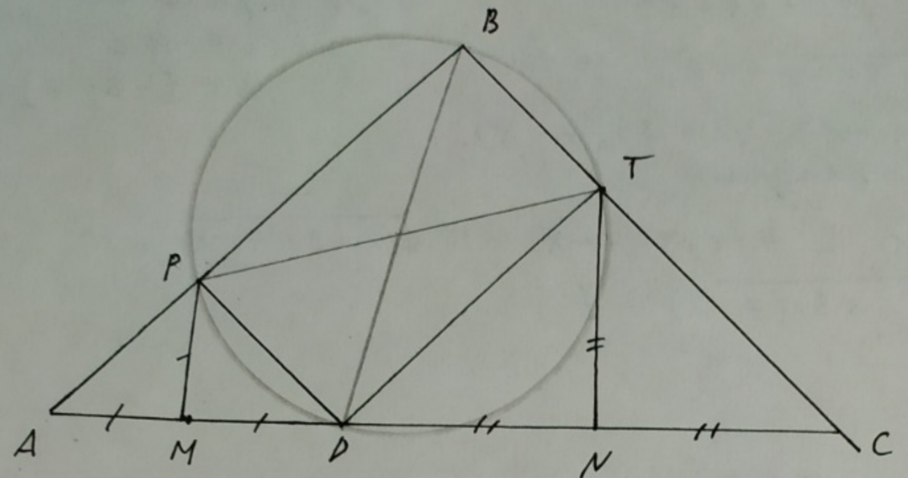
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007635**

ID профиля: **307437**

Вариант 10

№1



а) Т.к. BD – диаметр окружности, углы, которые на него опираются, равны $90°$ $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow$ смежные с ними углы $\angle APD = \angle DTC = 90°$. Тогда $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоуг. $\Rightarrow$ медиана $PM = AM = MD$ и медиана $TN = DN = NC$. Из условия $PM \parallel TN \Rightarrow$ $\angle PMD = \angle TNC$ как соответств., но т.к. $PM = MD$ и $TN = NC$, $\triangle PMD$ и $\triangle TNC$ – р/б $\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \angle NTC = \angle NCT$. Т.к. $\angle MDP = \angle NCT$, $PD \parallel TC$. Аналогично $AP \parallel TD$.

Т.к. $AB \parallel TD$, $\angle PBT + \angle BTD = 180°$, но $\angle BTD = 90° \Rightarrow \angle PBT = 90° =$ $= \angle ABC$

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

№ 2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases}$

$x \in [-3; 7]$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2(\sqrt{21+4x-x^2} - 2)$

Заметим, что $21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$.

Возведем обе части в квадрат:

$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) - 16\sqrt{(x+3)(7-x)} + 16$

Замена переменной: $\sqrt{(x+3)(7-x)} = t$

$10 - 2t = 4t^2 - 16t + 16$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{7+5}{4} = 3$ $\quad t_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

Вернемся к замене:

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = 3$

$(x+3)(7-x) = 9$

$21+4x-x^2 = 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = -2, \ x_2 = 6$

Если подставить в исходное ур-ние, подходит только $x = 6$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{2}$

$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$

$21+4x-x^2 = \frac{1}{4}$

$82 + 16x - 4x^2 = 1$

$4x^2 - 16x - 81 = 0$

$D_1 = 64 + 324 = 388$

$x_1 = \frac{8+2\sqrt{97}}{4} = 2 + \frac{\sqrt{97}}{2}$

$x_2 = \frac{8-2\sqrt{97}}{4} = 2 - \frac{\sqrt{97}}{2}$

Эти корни не подходят

Ответ: $x = 6$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007635**

ID профиля: **307437**

Вариант 10

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2+y^2) + 5x^2y^2 = 81$$

Введем замену: $x^2+y^2 = a, \quad x^2y^2 = в$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + в = 10 \\ a^2 + 5в = 81 \end{cases}$$

$в = 10 - \frac{6}{a}$

$a^2 + 5\left(10 - \frac{6}{a}\right) = 81$

$a^2 - 31 - \frac{30}{a} = 0$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

Подбором находим корень $a = -1$ и делим выражение на $a+1$

$$\begin{array}{l|l} a^3+0a^2-31a-30 & a+1 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3+a^2} & a^2-a-30 \\ \quad -a^2-31a & \\ \quad -\underline{-a^2-a} & \\ \qquad -30a-30 & \\ \qquad -\underline{-30a-30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$a^2-a-30=0$ имеет корни $a=-5$ и $a=6$, но т.к. $a = x^2+y^2$ ни -1, ни -5 не подходят.

$x^2+y^2 = 6$, тогда $x^2y^2 = 9$

x^2 и y^2 – корни ур-ния $t^2-6t+9=0$, поэтому

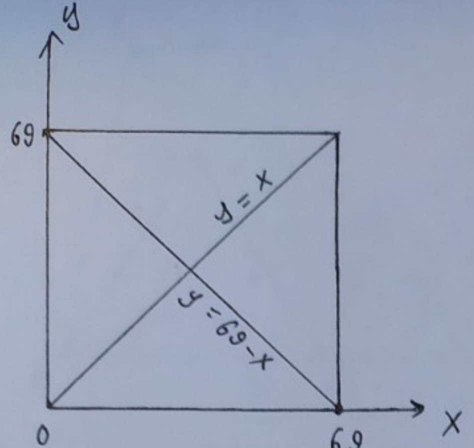
$x^2 = y^2 = 3$.

Тогда возможны ответы:

$(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

211007635 (U307437 M1278027)

№5



Заметим, что прямая $y = x$ проходит через т. $(0; 0)$ и т. $(69; 69)$, а прямая $y = 69 - x$ проходит через т. $(0; 69)$ и т. $(69; 0)$ $\Rightarrow$ эти прямые являются диагоналями квадрата. Всего в квадрате содержится 68^2 узлов, поэтому способов выбрать любые два узла – $A = C^2_{68^2} = \frac{68^2(68^2-1)}{2}$. Нас интересуют только пары, в которых хотя бы одна из точек лежит на диагонали, поэтому вычтем все пары, где обе точки не лежат на диагоналях. Таких пар будет $B = C^2_{68\cdot 66} = \frac{68\cdot 66(68\cdot 66-1)}{2}$, т.к. на диагоналях не лежат ровно $68^2 - 68\cdot 2 = 68\cdot 66$ точек. Также нужно вычесть количество пар, в которых точки лежат на прямой, параллельной одной из осей. Рассмотрим прямую, параллельную OX или OY и содержащую 68 узлов. Всего пар узлов, лежащих на этой прямой, в которых один или оба узла лежат на диагоналях, можно выбрать $\frac{68\cdot 67}{2} - \frac{66\cdot 65}{2}$ (как и в случае выше вычитаем кол-во пар, где ни один из узлов не лежит на диагонали). Всего же таких прямых – $68\cdot 2$, т.е. 68 параллельных OX и 68 параллельных OY. Тогда всего надо вычесть

$$C = 68\cdot 2\cdot\left(\frac{68\cdot 67}{2} - \frac{66\cdot 65}{2}\right) \text{ пар.}$$

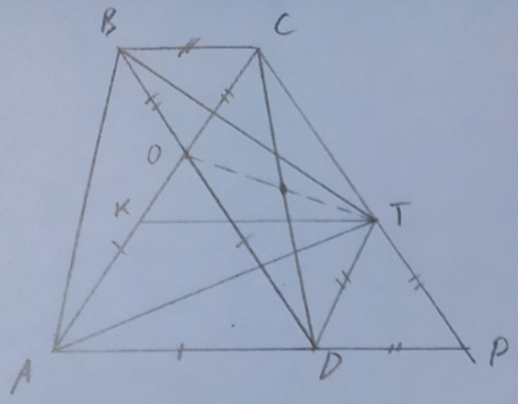
$$A - B - C = 68\cdot\left(\frac{68\cdot(68^2-1) - 66\cdot(68\cdot 66-1) - 2\cdot(68\cdot 67 - 66\cdot 65)}{2}\right) =$$

$$= 68\cdot(34\cdot 4623 - 33\cdot 4487 - 68\cdot 67 + 66\cdot 65) = 68\cdot(9111 - 4556 + 4290) =$$

$$= 68\cdot 8845 = 601460.$$

Ответ: 601460.

№6



а) $ABCD$ – равнобокая трапеция. Рассмотрим четырехугольник $OCTD$: т.к. диагонали в нем точкой пересечения делятся пополам, это параллелограмм $\Rightarrow CO = TD$ и $CT = OD$. $BD \parallel CT$ (т.к. $OD \parallel CT$ в ▱) и $BC = TD \Rightarrow BCTD$ – равнобокая трапеция $\Rightarrow$ диагонали в ней равны $\Rightarrow BT = CD = AB$. Пусть $CT \cap AD = P$, тогда $\angle CAD = 60°$, $\angle DOC = 120° \Rightarrow \angle OCT = 60° \Rightarrow \angle APC = 60° \Rightarrow \triangle ACP$ – правильный. Проведем $KT \parallel AP$, причем $K \in AC$. Тогда $\angle KAP = TPA \Rightarrow AKTP$ – равнобокая трапеция. Т.к. $DP = TP = AK = OC$ и $\angle KAP = \angle TPD = \angle ACP$, $AKTP = DOCP \Rightarrow AT = DC = BT = AB$. Т.к. $AB = BT = AT$, $\triangle ABT$ – правильный ■.

211007635 (U307437 M1278027)