Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007505**

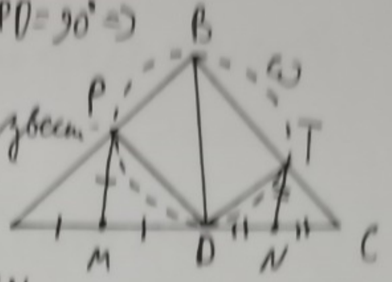
ID профиля: **212769**

Вариант 10

Чистовик

1.

а) Т.к. $P \in \omega$, а BD - диаметр, то $\angle BPD = 90^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle APD$ - прямоуг., аналогично $\triangle CTD$ - прямоуг., про прямоуг. $\triangle$ известно, что их медиана из прямого угла равна половине гипотенузы, т.е. $AM = MD = PM$ и $DN = NC = TN$



$\angle PMD = \angle TNC$ (как одностор. при $PM \parallel TN$ и сек. MN) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PMD \sim \triangle TNC$ (т.к. $\frac{PM}{TN} = \frac{MD}{NC}$) $\Rightarrow \angle PDM = \angle TCN$, аналогично $\angle PAM = \angle TDN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - \angle PAM - \angle TCN = 180^\circ - \angle PAM - \angle PDM = \angle APD = 90^\circ$.

$\boxed{\text{Ответ: } 90^\circ = \angle ABC.}$

б) $\triangle ABC \sim \triangle APD$ ($\angle ABC = 90^\circ = \angle APD$ и $\angle BAC$ - общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AD}$

$AD = 2PM$ (PM - медиана в прямоуг. $\triangle$) $= 2$

$DC = 2TN = 3$ (аналогично)

$\Rightarrow AC = AD + DC = 5 \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{5}{2} AP$

Заметим, что $\angle PBT = \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ \Rightarrow PBTD$ - прямоуг. $\Rightarrow TD = PB$

т.к. $\triangle PMD \sim \triangle TNC$, то $\frac{AP}{TD} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow TD = \frac{3}{2} AP = PB$. Напишем Th Пифагора для $\triangle APD$ и $\triangle PBD$

$\triangle APD$: $AP^2 + PD^2 = 4$

$\triangle PBD$: $PD^2 + BP^2 = 5 = PD^2 + \frac{9}{4} AP^2$

вычтем: $\frac{5}{4} AP^2 = 1 \Rightarrow AP = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AB = \sqrt{5} \Rightarrow \cancel{BC = \sqrt{AB}}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = 5.}$

Чистовик.

2.

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2} \Rightarrow x+3\geq 0$ и $7-x\geq 0 \Rightarrow x\in[-3;7]$ (ОДЗ)

$21+4x-x^2=\underbrace{(7-x)}_{\geq 0}\underbrace{(x+3)}_{\geq 0} \Rightarrow 21+4x-x^2\geq 0$

Пусть $a=\sqrt{x+3}$ $b=\sqrt{7-x}$, заметим, что $a^2+b^2=x+3+7-x=10$

Тогда наше уравнение имеет вид

$a-b+4=2\cdot ab \Rightarrow a-b+4+a^2+b^2-a^2-b^2-2ab=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-b)+4+(a-b)^2-(a^2+b^2)=0 \Rightarrow (a-b)^2+(a-b)-6=0$

Пусть $a-b=t$, тогда имеем:

$t^2+t-6=0$, по Th Виета $t_1=2$ (1)
$t_2=-3$ (2)

(1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2$

$\sqrt{x+3}=2+\sqrt{7-x}$

$x+3=4+7-x+2\cdot 2\cdot\sqrt{7-x}$

$2x-8=4\cdot\sqrt{7-x}$

$x-4=2\cdot\sqrt{7-x}$

$x^2-8x+16=28-4x$

$x^2-4x-12=0$, по Th Виета: $\left.\begin{array}{l}x_1=6\\ x_2=-2\end{array}\right\}$ оба подходят под ОДЗ

(2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3$

$\sqrt{x+3}=\sqrt{7-x}-3$

$x+3=7-x+9-6\sqrt{7-x}$

$2x-13=-6\sqrt{7-x}$

$6\sqrt{7-x}=13-2x$

$36(7-x)=169+4x^2-52x$

$252-36x=4x^2-52x+169$

$4x^2-16x-83=0 \Rightarrow D'=64+332=36\cdot 11$

~~$D'=16+332=348=4\cdot 87$~~

$x_{3,4}=\frac{8\pm 6\sqrt{11}}{4}$

$2+1,5\sqrt{11}\leq\frac{4+3\sqrt{11}}{2}<\frac{4+\sqrt{100}}{2}=7$ входит в ОДЗ

$2-1,5\sqrt{11}=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}>\frac{4-\sqrt{100}}{2}=-3$ входит в ОДЗ

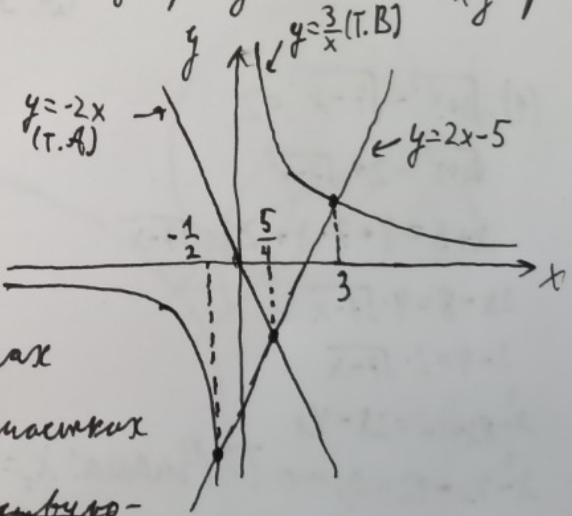
$\boxed{\text{Ответ: }\{6;-2;2\pm 1,5\sqrt{11}\}}$

Чистовик

3.

Рассм. 1-е уравнение: $y^2-y(4x+4a)+5a^2+8x^2+12ax=0$, решим его как квадратное от y: $D^1=4x^2+8ax+4a^2-5a^2-8x^2-12ax=-a^2-4ax-4x^2=-(a+2x)^2\le 0$, чтобы решение было D д.б. $\ge 0 \Rightarrow$ в данном случае $D=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{2}$, тогда $y=2x+2a=a$, т.е. все точки A лежат на прямой $y=-2x$, причём заполняют всю эту прямую, но точки этой прямой выше прямой $2x-y=5$, т.е. $y=2x-5$ при $-2x>2x-5 \Rightarrow 5>4x \Rightarrow x<\frac{5}{4}$, и ниже этой прямой при $x>\frac{5}{4}$,

Теперь рассм. 2-е уравнение: $ax^2-2a^2x+a^3+3=ay$, заметим, что при $a=0$ уравнение имеет вид $3=0$ и не имеет решений, теперь пусть $a\ne 0$, разделим на a: $x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=y$, эта парабола имеет $x_в=\frac{-2a}{-2\cdot 1}=a$, тогда $y_в=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$, т.е. все точки B лежат на графике $y=\frac{3}{x}$, для любого $a \Rightarrow$ заполняют график полностью. Изобразим на Oxy график точек A, точек B, и прямую $2x-y=5$:



Найдём т. пересеч. графиков $y=\frac{3}{x}$ и $y=2x-5$: $\frac{3}{x}=2x-5$ ($x\ne 0$, т.к. $x=0$ не корень)

$3=2x^2-5x \Rightarrow 2x^2-5x-3=0$ $D=25+24=49$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{4}=3, -\frac{1}{2}$. Из графика видно, что $y=\frac{3}{x}$ выше прямой $y=2x-5$ на участках $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup$ на $(0;3)$, и ниже прямой на участках $(-\frac{1}{2};0)$ и $(3;+\infty)$ ~~пересекаем соответствующие области~~. Заметим, что в первом случае с прямой $y=-2x$, числу a соответствует "y" координата $\Rightarrow$ мы имеем, что график $y=-2x$ выше прямой $2x-5=y$, при $a\in(-2\cdot\frac{5}{4};+\infty)$, т.е. $a\in(-\frac{5}{2};+\infty)$ и ниже прямой при $a\in(-\infty;-\frac{5}{2})$, а во втором графике $y=\frac{3}{x}$ числу a соответствует "x" координата, поэтому этот график выше прямой $2x-5=y$, при $a\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;3)$ и ниже прямой при $a\in(-\frac{1}{2};0)\cup(3;+\infty)$, если пересечь соответствующие области, получим, что точки A и B находятся по одну сторону от прямой при $a\in(-\infty;-\frac{5}{2})\cup(-\frac{1}{2};0)\cup(3;+\infty)$

$\boxed{\text{Ответ: } a\in(-\infty;-\frac{5}{2})\cup(-\frac{1}{2};0)\cup(3;+\infty)}$

Черновик.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$a - b + 4 = 2ab$

$x \in [-3; 7]$ $a - ab + 2 = b + ab - 2$ $a - b + 4 = (a-b)^2$

$(1-b)a + 2 = (1+a)b - 2$

$a - b + 4 + (a-b)^2 = a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 = 10$ $a - 2ab - b + 4 =$

$x + 3 + 7 - x - 2\sqrt{\dots} = 4(\quad) + 16 - 16\sqrt{\dots}$

$36 \cdot 7 = 252$

$83 \cdot 4 = 332$

$2 + 1{,}5\sqrt{11} \vee 7$

$4 + 3\sqrt{11} \vee 14$

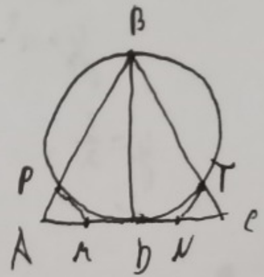
$3\sqrt{11} \vee 10$

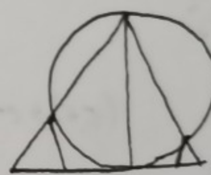
$99 \vee 100$

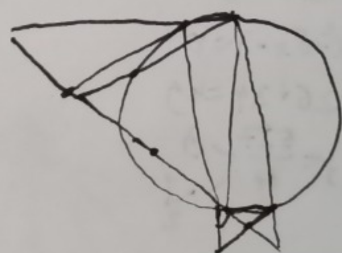
$<$

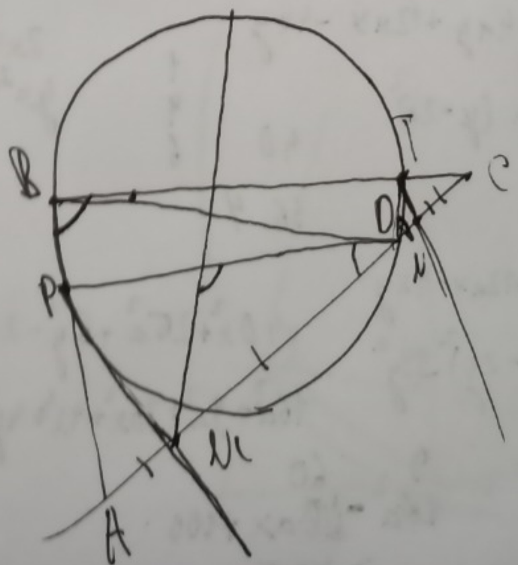
$4 - 3\sqrt{11} \vee -6$

$10 \vee$



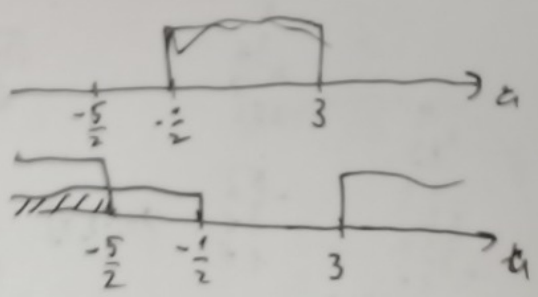






$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$y^2-4xy+4x^2$



$8x^2+y^2+a^2+4a^2-4ay+12ax$ a^2+4a^2

$-4xy$ $4x^2+4x^2$

$16x^2+2y^2+10a^2-8ay+24ax$

$-8xy$

$ax^2-2a^2x+a^3+3=ay$

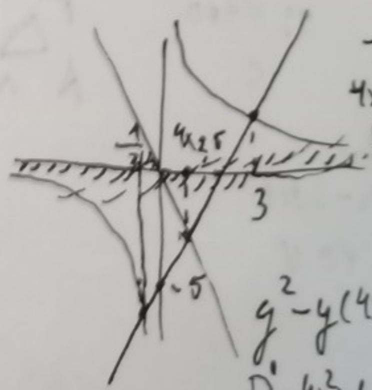
$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$x_0=a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

$(a+b+c+d)^2=$

$y=\frac{3}{x}$



$-2x=2x-5$

$4x=5$

$x=\frac{5}{4}$

$2x-5=\frac{3}{x}$

$2x^2-5x-3=0$

$D=25+24=49$

$x_{1,2}=\frac{5\pm7}{4}$ 3, $-\frac{1}{2}$

$y^2-y(4x+4a)+5a^2+8x^2+12ax\le0$

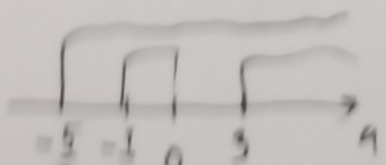
$D'=4x^2+4a^2+8ax-5a^2-8x^2-12ax=$

$=-(a^2+4ax+4x^2)=-(a+2x)^2\le0$

$y=-2x$

$2x=-a$ $x=-\frac{a}{2}$

$y=2x+2a=a$



$8x^2+5a^2+y^2-4ay+12ax-4xy$

$y^2-4ay+4a^2=(y-2a)^2$

$a^2+12ax+$

$16x^2+10a^2+2y^2-4ay+12ax-4xy$

$a^2-8ay+16y^2=(a-2y)^2$

$9a^2+24ax$

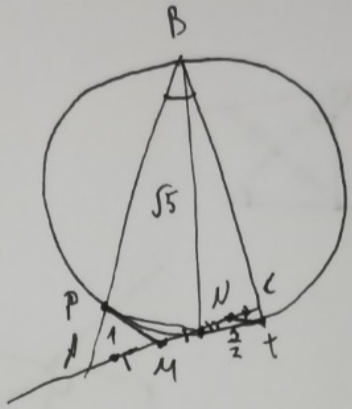
$40x^2+25a^2+5y^2-20ay+60ax-20xy$

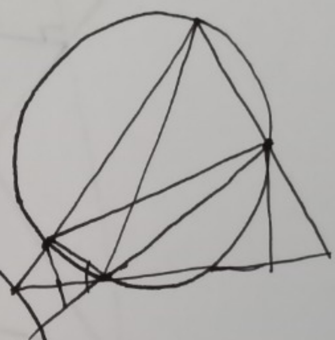
$16a^2+9a^2+36x^2+4x^2+4y^2+y^2-20ay+60ax-20xy$

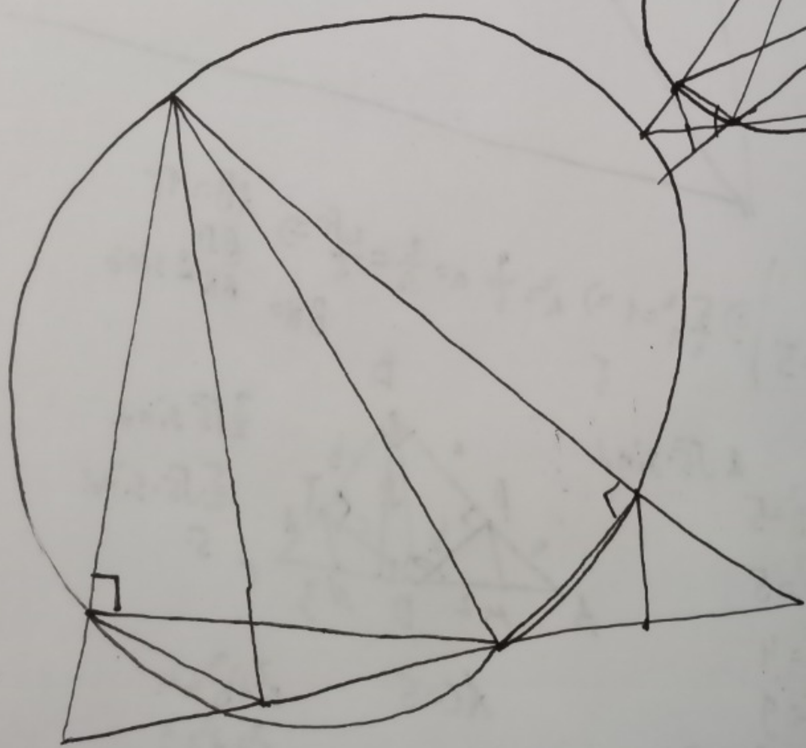
$9a^2-60ax+100$

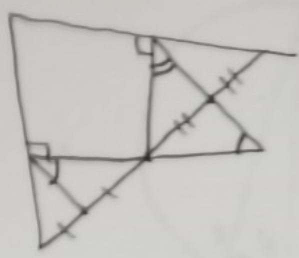
$2\cdot5$

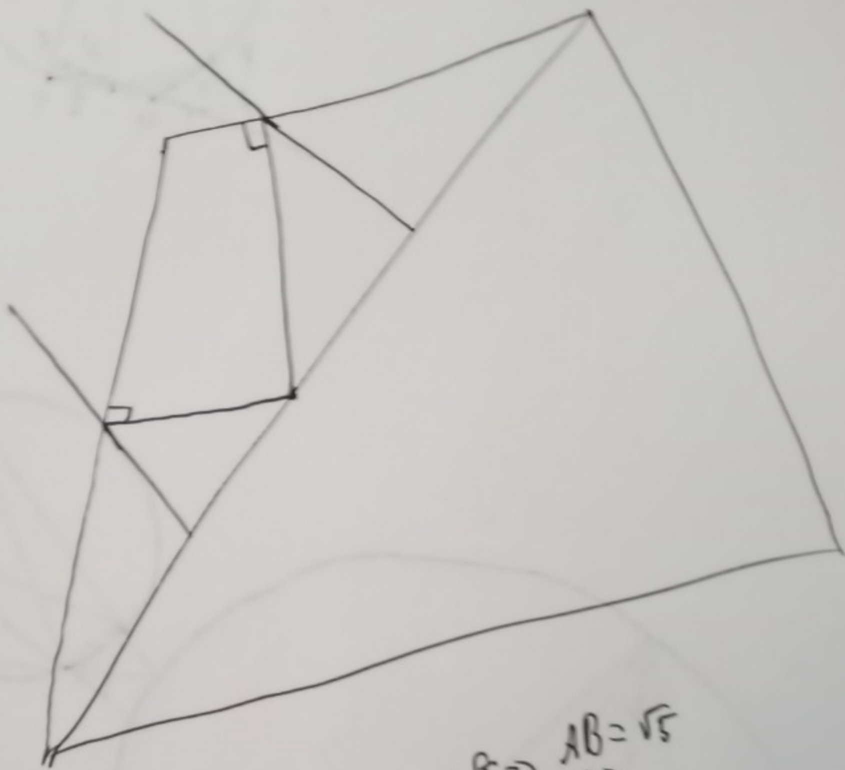
211007505 (U212769 M1276712)


B
√5
P
N
C
A
1
M
1/2
t







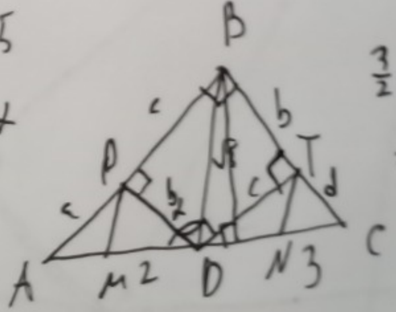


$AB=\sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l} b^2+a^2=4 \\ b^2+\frac{9}{4}a^2=5 \end{array}\right) \Rightarrow \frac{5}{4}a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{4}{5} \quad a=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$BH=\frac{BD}{BH}2\sin\alpha$

5



$1\sqrt{5}\cdot\sin\alpha$

$\frac{3}{2}\sqrt{5}\sin\alpha$

$\frac{5}{2}\sqrt{5}\cdot\sin\alpha$

5·

$$\begin{cases} 1\cdot BP^2+PD^2=5 \\ BT^2+TD^2=5 \\ AP^2+PD^2=4 \\ TC^2+TD^2=9 \end{cases}$$

$AC=5$

$a^2+b^2=4$

$c^2+d^2=9$

$AP^2+BP^2+BT^2+TC^2=$

$(a+c)^2+(b+d)^2=$

$(AP+BP)^2+(BT+TC)^2=25$

$=13+2(ac+bd)=13+2k(a^2+b^2)=$

$AP^2+BP^2+BT^2+TC^2+2(AP\cdot BP+TC\cdot BT)=25$

$c=ak$ $\quad =13+8k$

a^2k+b^2k

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007505**

ID профиля: **212769**

Вариант 10

Чистовик.

4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+2x^2y^2+y^4+5x^2y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a>0$; $x^2y^2=b\geq 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2+5b=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{a}+5b=50 \\ a^2+5b=81 \end{cases}$$ „−" (вычтем) $\Rightarrow a^2-\frac{30}{a}=31$ $(a\neq 0)$ $\Rightarrow a^3-31a-30=0$

$\Rightarrow (a+1)(a^2-a-30)=0 \Rightarrow (a+1)(a+5)(a-6)=0$, т.к. $a>0$, то $a=6$ ед. корень $\Rightarrow$

$a=-1$ корень

Th Виета

$\Rightarrow a^2+5b=81=36+5b \Rightarrow b=9 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$ т.е. x^2 и y^2 – корни уравнения $t^2-6t+9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t-3)^2=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow x^2=y^2=3 \Rightarrow$ существует 4 решения: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

$\boxed{\text{Ответ: } (\sqrt{3};\sqrt{3});\ (\sqrt{3};-\sqrt{3});\ (-\sqrt{3};\sqrt{3});\ (-\sqrt{3};-\sqrt{3})}$

Чистовик.

Б.

Рассмотрим 1-й случай, когда обе точки находятся на прямой $y=x$ или $y=69-x$, заметим, что это, по сути, диагонали нашего квадрата, т.к. они пересекаются в точке $(34{,}5; 34{,}5)$ т.е. не в узле, то всего узлов сетки на этих диагоналях $(69-1)\cdot 2=136$, поставив первую точку в узел с координатами $(a;b)$, тогда мы не сможем по условию задачи поставить вторую точку на a-тую вертикаль или b-тую горизонталь, т.е. из всех доступных узлов у нас первой точкой „заблокировано" 3 узла: $(a;b)$; $(a;69-b)$; $(69-a;b)$, т.е. осталось $136-3=133$ варианта, куда поставить вторую точку. Итого, т.к. порядок выставления точек нам не важен $\frac{136\cdot 133}{\underbrace{2}_{\text{кол-во перестановок}}}=68\cdot 133$ вариантов поставить 2 точки на диагонали.

2-й случай, на диагонали находится только одна точка, тогда вторая точка изначально может занимать 68^2 (общее число узлов) -136 (число узлов на диагоналях) $=68\cdot 66$ (узлов) но первая точка поставленная в узел $(a;b)$ блокирует всю a-тую вертикаль ($68-2$ (узлы на диагоналях) $=66$ узлов) и всю b-тую горизонталь (ещё 66 узлов), т.е. у второй точки $68\cdot 66-2\cdot 66=66^2$ (вариантов), т.е. всего суммарно $\underbrace{136}_{\text{варианты поставить первую точку}}\cdot\underbrace{66^2}_{\text{варианты поставить вторую точку}}=$

$=2\cdot 68\cdot 66^2$.

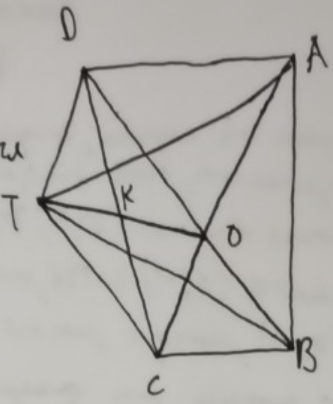
Других случаев нет, поэтому существует всего: $68\cdot 133+2\cdot 68\cdot 66^2=68(133+2\cdot 66^2)=68(133+2\cdot 4356)=68\cdot(133+8712)=68\cdot 8845=$
$=601460$ вариантов выбрать 2 точки из условия.

$\boxed{\text{Ответ: 601460 вариантов}}$

211007505 (U212769 M1276713)

Чистовик

6



а) K - сер. $CD \Rightarrow$ $CK=KD$; $OK=KT$ (усл.) $\Rightarrow CODT$ - параллелограмм (диагонали т. пересеч. делятся пополам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OC=DT$; $OC \parallel DT$; $CT=OD$; $CT \parallel OD$

$AD=AO=OD$ ($\triangle AOD$ - прав.); $BC=BO=OC$ ($\triangle BOC$ - прав) $\Rightarrow DT=OC=OB$; $CT=OD=OA$

$\angle TDC=\angle OCD$ (накрест лежащ. при $DT \parallel OC$ и сек. DC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT=\angle TDC+\angle ADC=\angle OCD+\angle ADC=180^\circ-\angle CAD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ (т.к. $\triangle AOD$-прав.); $\angle AOB=$
$=180^\circ-\angle AOD=120^\circ$ (т.к. $\triangle AOD$ - прав.)

$\angle ADT=\angle AOB$; $DT=OB$; $AD=AO$ $\Rightarrow \triangle ADT=\triangle AOB$, аналогично $\triangle BCT=\triangle AOB \Rightarrow AT=AB=BT \Rightarrow \triangle ABT$ - прав.
ч.т.д.

б) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$ (где d_1, d_2 - диагонали четырехугольника, α - угол между диаг.)

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot(AO+OC)(BO+OD)\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}(2+7)(2+7)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$

$AB^2=AO^2+BO^2-2\cdot\cos 120^\circ\cdot AO\cdot BO=49+4-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot 7=67$
(Th косинусов $\triangle AOB$)

$S_{ABT}=\frac{1}{2}AB\cdot AT\cdot \sin(\widehat{AB, AT})=\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 67\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{67\sqrt{3}}{4}$

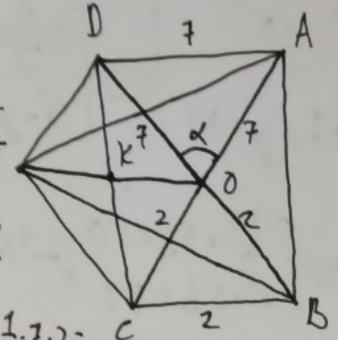
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{67\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}}=\frac{67}{81}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{67}{81}.}$

Черновик.

6

б) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1 d_2\cdot\sin\alpha$ (где d_1, d_2 – диагонали четырехугольника, α – угол между диагоналями)



$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(OC+AO)(OB+OD)\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot9\cdot9\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{81\sqrt3}{4}$

$AT^2=AB^2=AO^2+BO^2-2\cdot\cos120^\circ\cdot AO\cdot BO=49+4+2\cdot\frac{1}{2}\cdot7\cdot2=$

$=49+4+14=67\Rightarrow AB=\sqrt{67}$

$S_{ABT}=\frac{1}{2}AB\cdot AT\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot67\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{67\sqrt3}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{67\sqrt3}{4}}{\frac{81\sqrt3}{4}}=\frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{67}{81}.$

5634
×8845
68
70960
53070
601660

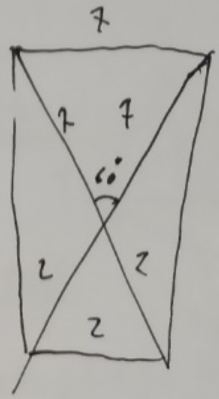
9
×66
166
1 396
396.
×4356
2
+8412 = 8845
133

5.

Рассмотрим 1-й случай, когда обе точки находятся на прямой $y=x$ или прямой $y=69-x$, заметим, что это, по сути, диагонали нашего квадрата, т.к. они пересекаются в точке $(34{,}5; 34{,}5)$, т.е. не в узле сетки, то всего узлов сетки на этих диагоналях $(69-1)\cdot2=136$, поставим первую точку в узел с координатами $(a;b)$, тогда мы не сможем по условию задачи поставить вторую точку на a-тую вертикаль или b-тую горизонталь, т.е. из всех доступных узлов у нас первой точкой „заблокировано" 3 точки: $(a;b)$; $(a;69-b)$ и $(69-a;b)$, т.е. ~~од~~ остается 133 варианта, куда поставить вторую точку. Итого, т.к. порядок выставления точек нам не важен у нас $\frac{136\cdot133}{\underset{\leftarrow \text{кол-во перестановок}}{2}}=68\cdot133$ варианта поставить точки на диагонали.

Теперь второй случай

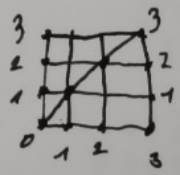
S_{ABCD}



$\frac{1}{2} 9 \cdot 9 \cdot \sin 60° =$

$\frac{1}{2}(2\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot 2+\cancel{1} 7\cdot 7)\cdot \sin 60 = \frac{1}{2}(2+7)^2$

$2\cdot 68$ $2\cdot 68$

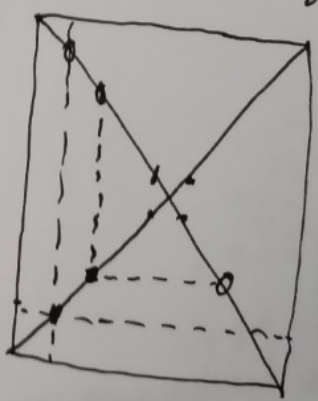


$68+67$ $2\cdot 67$

4

$120+15$ $68\cdot 67$

135



68^2 66

$68\cdot 66 - 2\cdot 66$

$68 \cdot 66^2$

$68(66^2+67) = 68\cdot 67\cdot 66+68$