Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007496**

ID профиля: **321421**

Вариант 10

Чистовик Лист 1 из 3

№2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ: $x \geq -3$, $x \leq 7$.

$x \in [-3; 7]$

$21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4$

$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x)+16-16\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$4(x+3)(7-x) - 14\sqrt{(x+3)(7-x)} + 6 = 0$

Пусть $a = \sqrt{(x+3)(7-x)}$ $a \geq 0$.

$2a^2 - 7a + 3 = 0$

$a = \frac{1}{2}$ или $a = 3$

$\left[\begin{array}{l}(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}\\(x+3)(7-x) = 9\end{array}\right.$

1) $(x+3)(7-x) = 9$.

$-x^2+4x+12=0$.

$\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-2\end{array}\right.$

2) $(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$

$4x^2-16x-83=0$

$\frac{D}{4} = 8^2 + 4\cdot 83 = 4(16+83) = 4\cdot 99$

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{8-6\sqrt{11}}{4} = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}\\x = \frac{8+6\sqrt{11}}{4} = 2 + \frac{3\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} = \sqrt{\frac{99}{4}} < \sqrt{25}$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} < 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{array}{l}2 - \frac{3\sqrt{11}}{2} > -3\\2 + \frac{3\sqrt{11}}{2} < 7\end{array}$

Ответ: $2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$; -2; 6; $2 + \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

211007496 (U321421 M1277692)

№3.

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0.$

$(2x-y+2a)^2+(a+2x)^2=0.$

$\begin{cases} 2x-y+2a=0 \\ a+2x=0. \end{cases}$

$x=-\frac{a}{2}$

$y=2a+2x=a$

$A(-\frac{a}{2};a)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}.$

$y=(x-a)^2+\frac{3}{a}.$

$x_{в.}=a$

$y_{в.}=\frac{3}{a}.$

$B(a;\frac{3}{a})$

1) $\begin{cases} y_B>2x_B-5 \\ y_A>2x_A-5 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{a}>2a-5 \\ a>-a-5 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2a^2-5a-3}{a}<0 \\ 2a>-5 \end{cases}$

$-\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{2}$ 0 3

$a>-\frac{5}{2}$

$a\in(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})\cup(0;3)$

2) $\begin{cases} y_B<2x_B-5. \\ y_A<2x_A-5 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{a}<2a-5 \\ a<-a-5. \end{cases}$

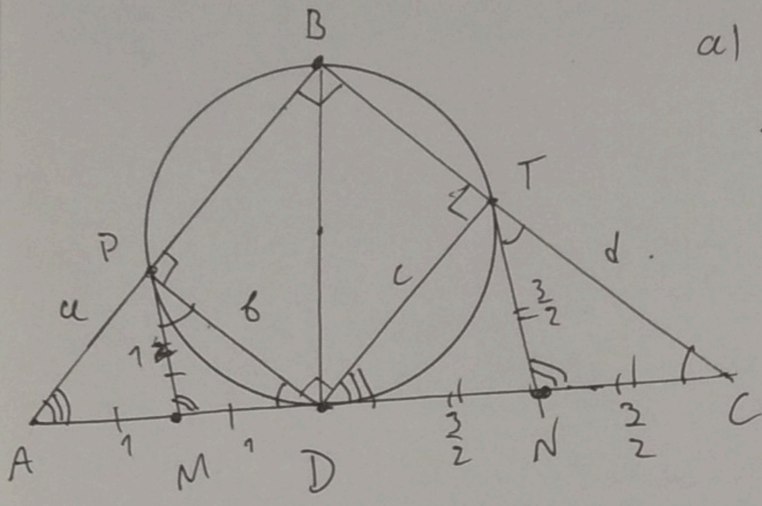
$\begin{cases} \frac{2a^2-5a-3}{a}>0 \\ a<-\frac{5}{2} \end{cases}$

$-\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{2}$ 0 3

Решений нет.

Ответ: $a\in(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})\cup(0;3)$

211007496 (U321421 M1277692)



а) $\angle BPD = 90°$, т.к. опирается на диаметр

$\angle BTD = 90°$

PM и TN – медианы в прямоугольных треугольниках

$\Rightarrow PM = AM = MD$

$NT = CN = ND$.

$PM \parallel NT \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$

$\Rightarrow \angle MDP = \angle MPD = \angle NCT = \angle NTC$

$\Rightarrow \angle CDT = \angle DAP$.

$\triangle CTD \sim \triangle CAB$ (по 2 углам) $\Rightarrow \angle ABC = 90°$

б) $MP = 1$

$NT = \frac{3}{2}$.

$BD = \sqrt{5} = PT$.

Пусть: $AP = a$

$PD = b$.

$DT = c$

$TC = d$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ c^2 + d^2 = 9 \\ b^2 + c^2 = 5 \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \end{cases} \Rightarrow b = \frac{ad}{c}$$

$$b^2 = \frac{a^2 d^2}{c^2}.$$

$\cancel{\frac{a^2d^2}{c^2} + c^2 = 5}$.

$$S = \frac{(a+c)(b+d)}{d}.$$

211007496 (U321421 M1277692)

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$.

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$.

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$y = (x-a)^2 + \frac{3}{a}$.

$x_b = a$.

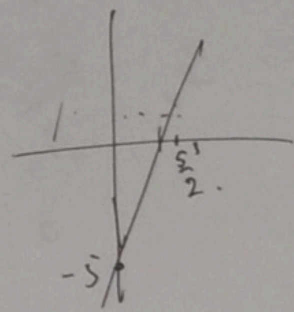
$y_b = \frac{3}{a}$.

$(a; \frac{3}{a})$

211007496 (U321421 M1277692)

$2x - y = 5$.

$y = 2x - 5$.



$25 + 24 = 49$. 3

$\frac{5 \pm 7}{4} = -\frac{1}{2}$.

1) $y > 2x - 5$.

$\frac{3}{a} > 2a - 5$.

$2a - \frac{3}{a} - 5 < 0$.

$\frac{2a^2 - 5a - 3}{a} < 0$

$\frac{(2a+1)(a-3)}{a} < 0$

$- \quad -\frac{1}{2} \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$

$(a+b+c)^2 = \underline{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$.

$(a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$.

$(x_2 \ldots - y + 2a)^2$

$4x^2 + y^2 - 4xy - 4ay + 4a^2 + 8ax =$

$= (2x - y + 2a)^2$

$(2x - y + 2a)^2 + 4x^2 + a^2 + 4ax = 0$.

$(2x - y + 2a)^2 + (a + 2x)^2 = 0$.

Черновик.

Черновик. ОДЗ: $x \geq -3$

$x \leq 7$.

$[-3; 7]$.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$-x^2 + 4x + 21 \geq 0$.

3 7

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}\right)^2 = \left(2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4\right)^2$.

$\cancel{x}+3 + 7 - \cancel{x} - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + 16 - 16\sqrt{(x+3)(7-x)}$.

$10 + 14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + 16$.

$21 \cdot 4 = 84$

$7\sqrt{(x+3)(7-x)} = 2(x+3)(7-x) + \cancel{8} + 3$

$a = \sqrt{(x+3)(7-x)}$

$2a^2 - 7a + 3 = 0$.

$\left[\begin{array}{l}(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}\\ (x+3)(7-x) = 9\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x - 21 + 9 = 0\\ x^2 - 4x - 21 + \frac{1}{4} = 0\end{array}\right.$

$49 - \cancel{48}\ 24 = 25$

$a = \cancel{\frac{7 \pm 1}{4}}$ $a = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ 3\end{array}$.

$\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x - 12 = 0\\ 4x^2 - 16x - 83 = 0\end{array}\right.$ 6 −2.

$\frac{D}{4} = 8^2 + 4 \cdot 83 = 4(16 + 83) = 4 \cdot 99 = 4 \cdot 9 \cdot 11$

$x = \frac{8 \pm 6\sqrt{11}}{4} = 2 \pm \frac{3\sqrt{11}}{2}$

$\sqrt{11} \in (3; 4)$

$\frac{3}{2}\sqrt{11} \in (4,5; 6)$

Ответ: $2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$; -2; 6; $2 + \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

$\frac{3\sqrt{11}}{2} \vee 5$

$\sqrt{\frac{99}{4}} \vee \sqrt{25}$.

211007496 (U321421 M1277692)

Черновик.

$$b^2 + \frac{a^2d^2}{b^2} = 5.$$

$$\frac{a^2d^2}{b^2} + d^2 = 9.$$

$\leftarrow$

$$b^2 = \frac{a^2d^2}{9-d^2}$$

$$\frac{a^2d^2}{9-d^2} + 9 - d^2 = 5.$$

$$a^2 + \frac{a^2d^2}{9-d^2} = 4.$$

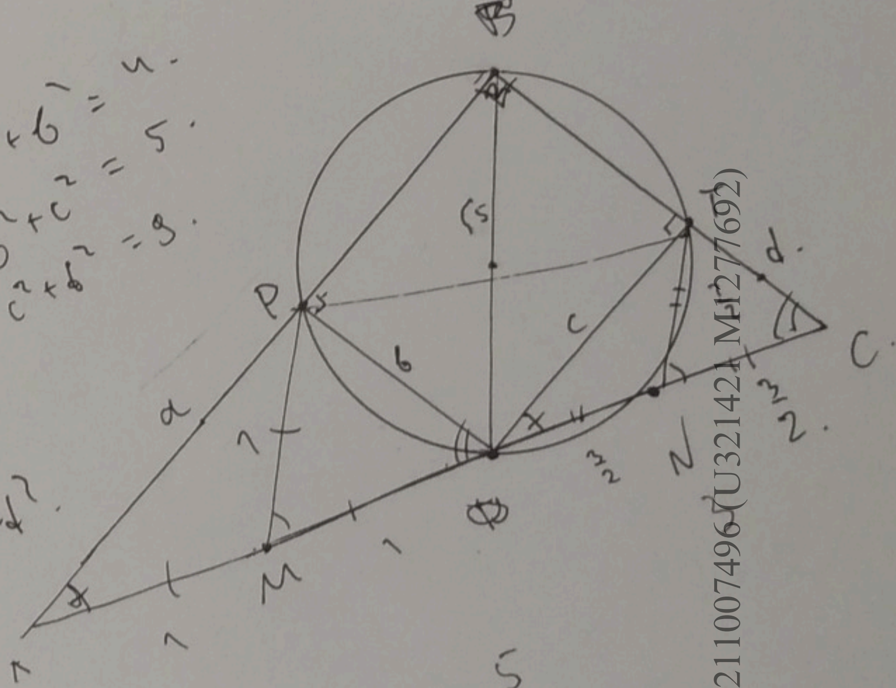
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

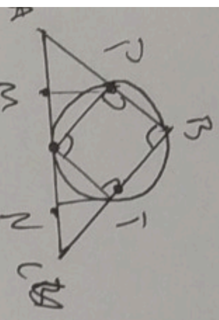
$$a^2 + b^2 = 4.$$
$$b^2 + c^2 = 5.$$
$$c^2 + d^2 = 9.$$

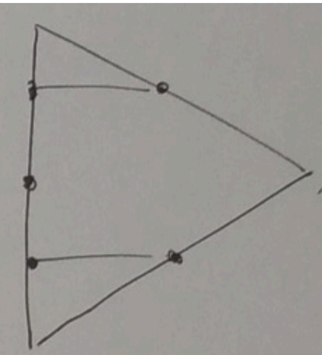
$$ad = bc.$$

$$c = \frac{ad}{b}.$$

$$c^2 = \cancel{\frac{a^2d^2}{b^2}} = 9 - d^2.$$







211007496 (U321421 M1277692)

Черновик

2·3·2.

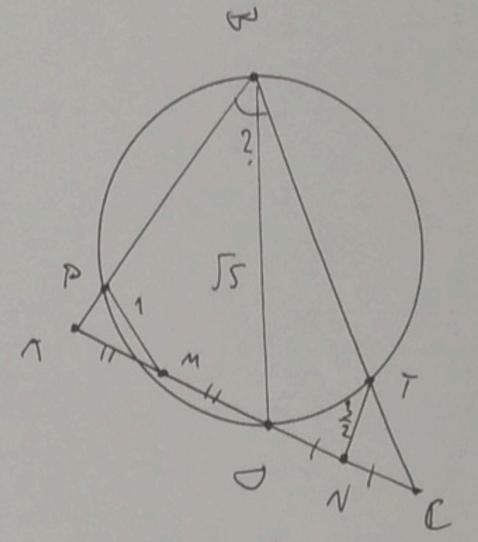
$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$4a^2+a^2+8x^2+y^2-4ay-4xy+12ax=0$.

$4a^2+12ax+9x^2=(3x+2a)^2$

$a^2+4y^2-4ay=(a-2y)^2$.

$(3x+2a)^2-x^2$



$8x^2+y^2-4xy+12ax-4ay+5a^2=0$.

$4x^2+y^2-4xy=(2x-y)^2$.

$(2x-y)^2+4x^2+12ax+5a^2-4ay=0$.

$4x^2+12ax+9a^2=(2x+3a)^2$.

$(2x-y)^2+(2x+3a)^2-4a^2-4ay=0$.

$-4a^2-4ay-y^2=-(y+2a)^2$.

$(2x-y)^2+(2x+3a)^2-4a(a+y)=0$.

$(2x-y)^2+(2x+3a)^2-(y+2a)^2+y^2=0$

$(2x-2y-2a)(2x+2a)+(2x+3a)^2+y^2$

$4(x-y-a)(x+a)$

211007496 (U321421 M1277692)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

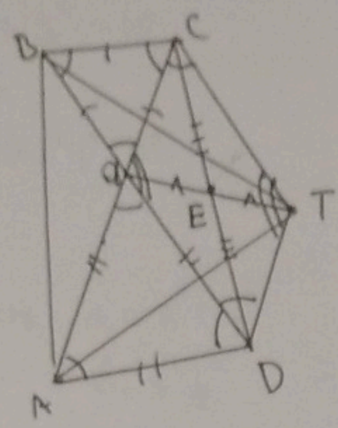
Шифр: **211007496**

ID профиля: **321421**

Вариант 10

Чистовик Лист 1.

N6



а) $\angle BCA = \angle DAC \Rightarrow BC \parallel AD$

$\left.\begin{array}{l} CO = BO \\ DO = AO \\ \angle AOB = \angle DOC = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC \Rightarrow AB = CD$

$ABCD$ - равнобокая трапеция,

значит вокруг $ABCD$ можно описать ~~окруж.~~ окружность.

$\left.\begin{array}{l} CE = ED \\ OE = ET \end{array}\right. \Rightarrow CODT$ - параллелограмм $\Rightarrow \angle CTD = COD = 120^\circ$

$\angle CTD + \angle CBD = 180^\circ$, значит ~~вок~~ вокруг $BCTD$ можно описать окружность.

$\Rightarrow$ точки A, B, C, D, T лежат на одной окружности.

$\angle ABT = \angle ACT = 60^\circ$

$\angle BAT = \angle BDT = 60^\circ$ (~~опи~~ опираются на одну дугу)

$\angle ATB = \angle ACB = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - ~~рав~~ правильный.

б) $BC = 2$, $AD = 7$

по т. косинусов: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB = 49 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \left(-\frac{1}{2}\right) = 67$

$AB = BT = AT = \sqrt{67}$; $S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot BT \sin\angle ABT = \frac{1}{2} \cdot 67 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

Высота трапеции $ABCD$ равна $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABCD} = \left(\frac{AD+BC}{2}\right) \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

211007496 (U321421 M1277693)

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$

Чистовик Лист 2.

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

~~Пусть~~ Пусть $a = x^2+y^2$ $\quad a>0$

$b = x^2y^2$ $\quad b \geqslant 0$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \Rightarrow b = 10 - \dfrac{6}{a} \\ a^2+5b=81 \end{cases}$$

$$a^2+50-\frac{30}{a}=81$$

$$a^3-31a-30=0$$

$$(a+1)(a^2-a-30)=0$$

$$(a+1)(a+5)(a-6)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-5 \\ a=6 \end{array}\right.$$

$a>0 \Rightarrow a=6.$

$$b=10-\frac{6}{6}=9$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9. \end{cases}$$

$$x^2(6-x^2)=9.$$

$$x^4-6x+9=0$$

$$(x^2-3)^2=0$$

$x^2=3$

$y^2=3$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$

211007496 (U321421 M1277693)

Чистовик Лист 3.

Внутри квадрата 68^2 узлов

Из них $68\cdot 2$ лежат на диагоналях.

1) Первый узел лежит на диагонали, а второй не лежит

Первый узел - любой из $68\cdot 2$ узлов на диагоналях.

Второй узел ~~можно~~ можно выбрать $68^2-68\cdot 2-66-66$ способами, т.к.

он не лежит на диагоналях и ~~на~~ на прямых ~~,~~ параллельных осям, проходящих через первый узел.

~~68~~ Всего $68\cdot 2(68^2-68\cdot 2-66-66)$ ~~~~ вариантов выбрать 2 узла.

$68\cdot 2(68^2-68\cdot 2-66\cdot 2)=68\cdot 2(68\cdot 66-2\cdot 66)=68\cdot 2\cdot 66^2$

2) Оба узла на диагоналях.

Первый узел - $68\cdot 2$ вариантов.

Второй узел - $68\cdot 2-3$ варианта.

Каждый вариант считается 2 раза, поэтому всего $\frac{68\cdot 2(68\cdot 2-3)}{2}$ вариантов

$\frac{68\cdot 2(68\cdot 2-3)}{2}=68(68\cdot 2-3)$

В сумме получается $68\cdot 2\cdot 66^2+68(68\cdot 2-3)=68(66^2\cdot 2+68\cdot 2-3)=$

$=68(4356\cdot 2+133)=$ ~~68~~ $68(8712+133)=68(8845)=601460$

Ответ: 601460

211007496 (U321421 M1277693)

Черновик.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$\cancel{(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4}$

$\cancel{(x^2+y^2)^2 - x^4 - y^4}$

$x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 = a$

$x^2y^2 = b$

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$

$(x^2+y^2)^2 + 50 - \frac{30}{x^2+y^2} = 81$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 31a - 30 & a+1 \\ \hline -\; a^3 + a^2 & a^2 - a - 30 \\ \hline -a^2 - 31a & \\ -\; -a^2 - a & \\ \hline -30a - 30 & \end{array}$$

$\frac{6}{a} + b = 10 \Rightarrow b = 10 - \frac{6}{a}$

$a^2 + 5b = 81$

$a^2 + 50 - \frac{30}{a} = 81$

$a^2 - \frac{30}{a} - 31 = 0 \qquad a \neq 0$

$a^3 - 30 - 31a = 0 \qquad a = -1$

$6 \quad -5$

$(a+1)(a^2-a-30) = 0$

$(a+1)(a+5)(a-6) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -5 \\ a = 6 \end{array}\right.$$

$a = 6$

$b = 9$

$x^2+y^2 = 6$

$x^2y^2 = 9$

$y^2 = \frac{9}{x^2}$

$x^2 + \frac{9}{x^2} = 6$

$y^2 = \frac{9}{3} = 3$

$x^4 + 9 = 6x^2$

$y = \pm\sqrt{3}$

211007496 (U321421 M1277693)

$x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \qquad x^2 = 3$

$(x^2 - 3)^2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

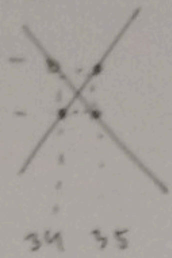
Черновик.

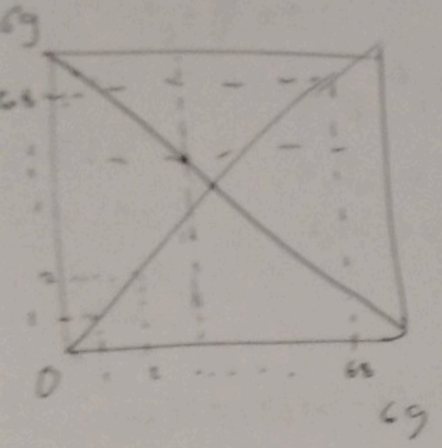
607460 | 68
− 544 | 89
634
− 612
226
− 224
20

$69 - x = x$

$69 = 2x$

$x = \frac{69}{2}$ 35 34





68 × 68 углов.

68 × 2 на диагоналях.

= 136

$68^2 - \cancel{136} \cdot 68 \cdot 2 -$

$- 66 - 66.$

$(68^2 - 68 \cdot 2 - 66 \cdot 2)\, 68 \cdot 2 =$

$= (68 \cdot 66 - 66 \cdot 2)\, 68 \cdot 2 = 66^2 \cdot 68 \cdot 2.$

$$\frac{68 \cdot 2\,(68 \cdot 2 - \cancel{2} \cdot 3)}{2} = 68(68 \cdot 2 - 3)$$

$68 \times 9 = 612$

$68 \times 8 = 544$

$68(68 \cdot 2 - 3) + 68 \cdot 66^2 \cdot 2 =$

$= 68(68 \cdot 2 - 3 + 66^2 \cdot 2) =$

8845×68: 70760 + 53070 = 601460

66×66: 396 + 396 = 4356

$4356 \times 2 = 8712$

601460 | 68
− 544 | 8845
574
− 544
306
− 272
340

$68 \times 4 = 272$

211007496 (U321421 M1277693)

Черновик.

$68\cdot 2\,(68^2 - \cancel{67^2} - 68\cdot 67) = 68\cdot 2\,(68\cdot 67 - 67) =$

$= 68\cdot 2\cdot 67^2$

$68\cdot\cancel{2}\,(68\cdot 2 - 3)$

$68\cdot(2\cdot 67^2 + 3 - 68\cdot 2)$.

$68\cdot 2\,(\cancel{67^2 + 3 - 68\cdot 2})$.

$67\times 67 = 4489$

4489×2

$4488 + 3 = 4491$ … $4492 - 136 = 4356$.

$68\times 2 = 136$

66^2

66×66: 396, 396, 4356; $\times 2$

$4489\times 2 = 8978$

$8978 - 136 = 8842$

$8842 + 3 = 8845$.

$8712 + 136 = 8848$

$8848 - 3 = 8845$.

$\frac{67}{81}$.

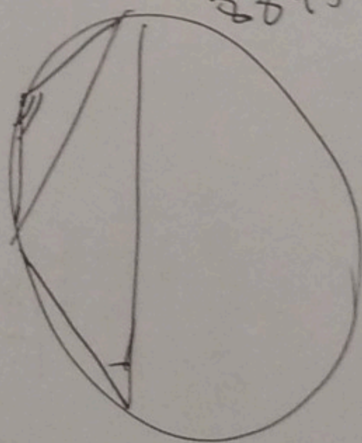
$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{2}\cdot 67 = \frac{67\sqrt{3}}{4}$.

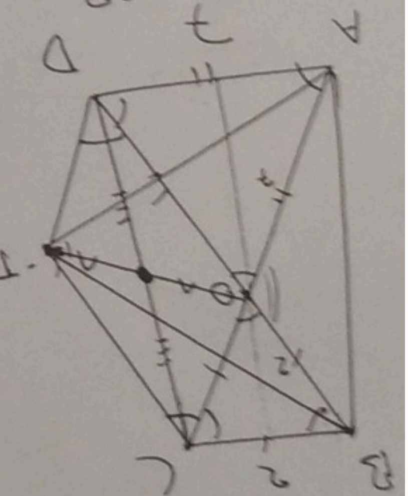
$\sqrt{67}$.

$AB^2 = 67$.

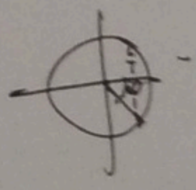
$AB^2 = 4 + 49 + 2\cdot 7$

$(8 + 49 = 6$





$S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$.



$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

211007496 (U321421 M1277693)