Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007343**

ID профиля: **892521**

Вариант 10

Чистовик

(2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$(x+3)(7-x)=7x-x^2+21-3x=-x^2+21+4x$

$\exists\ \sqrt{x+3}=u,\ \sqrt{7-x}=v$, тогда:

$u^2+v^2=x+3+7-x=10$

$\begin{cases} u-v+4=2uv \\ u^2+v^2=10 \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2-2uv=10-(u-v)-4$

$(u-v)^2=6-(u-v)$

$\exists\ u-v=t$, тогда:

$t^2+t-6=0$

по Т Виета: $\begin{matrix} t_1\cdot t_2=-6 \\ t_1+t_2=-1 \end{matrix}\Bigg| \begin{matrix} t_1=2 \\ t_2=-3 \end{matrix}$

1

I случай:

$\begin{cases} u-v=2 \\ u-v+4=2v\cdot u \end{cases} \Rightarrow 2+4=2uv;\ \begin{cases} 2uv=6 \\ u-v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2uv=6 \\ u=2+v \end{cases}$

Подставим:

$2(2+v)v=6$

$(4+2v)v=6$

$4v+2v^2=6 \quad |:2$

$v^2+2v-3=0$

по Т Виета:

$\begin{matrix} v_1\cdot v_2=-3 \\ v_1+v_2=-2 \end{matrix}\Bigg| \Rightarrow \begin{matrix} v_1=1 \\ v_2=-3 \end{matrix}$

Если $v=1$, то $u=2+v=2+1=3$

Если $v=-3$, то $u=2+v=2-3=-1$

$\Rightarrow (3;1);(-1;-3)$

• Т.к $u\geq 0$, то вторая пара $(-1;-3)$ нам не подходит

II случай: $\begin{cases} u-v=-3 \\ u-v+4=2vu \end{cases} \Rightarrow 4-3=2vu;\ \begin{cases} 2uv=1 \\ u-v=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2uv=1 \\ u=v-3 \end{cases}$

Подставим: $2(v-3)v=1$

$(2v-6)v=1$

$2v^2-6v=1$

$2v^2-6v-1=0$

$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=36+8=44=(2\sqrt{11})^2$

$v_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{6\pm 2\sqrt{11}}{4}=\frac{3\pm\cancel{2}\sqrt{11}}{2}$

Т.к $v\geq 0$, то $v=\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ нам не подходит, т.к. он меньше 0.

211007343 (U892521 M1274018)

$$\begin{cases} u - v = -3 \\ v = \frac{3+\sqrt{11}}{2} \end{cases};$$ сложим: $u - v + v = -3 + \frac{3+\sqrt{11}}{2}$

$u = \frac{3+\sqrt{11}}{2} - \frac{6}{2} = \frac{\sqrt{11}-3}{2}$, ~~очевидно, что это меньше нуля, значит корни не по~~

Вторая пара чисел: $\left(\frac{\sqrt{11}-3}{2}; \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)$

Обратная замена:

I) $\begin{cases} \sqrt{x+3} = u = 3 \\ \sqrt{7-x} = v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 6 \end{cases}$; $x=6$ удовлетворяет нашему уравнению

2) $\begin{cases} \sqrt{x+3} = u = \frac{\sqrt{11}-3}{2} \\ \sqrt{7-x} = v = \frac{\sqrt{11}+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{11}-3}{2} \\ \sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} \end{cases}$

1) $\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{11}-3}{2}$

$x+3 = \frac{(\sqrt{11}-3)^2}{4}$

$4x + 12 = 11 + 9 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{11}$

$4x = 20 - 12 - 6\sqrt{11}$

$4x = 8 - 6\sqrt{11}$

$x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

2) $\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}$

$7 - x = \frac{(\sqrt{11}+3)^2}{4}$

$28 - 4x = 11 + 9 + 6\sqrt{11}$

$4x = 28 - 20 - 6\sqrt{11}$

$4x = 8 - 6\sqrt{11}$

$x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 7]$

$x=6$ попадает в этот интервал, проверим второй корень: очевидно, что он не больше 7,

$2 - \frac{3}{2}\sqrt{11} > -3$

$5 > \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$25 > \frac{9}{4}\cdot 11$

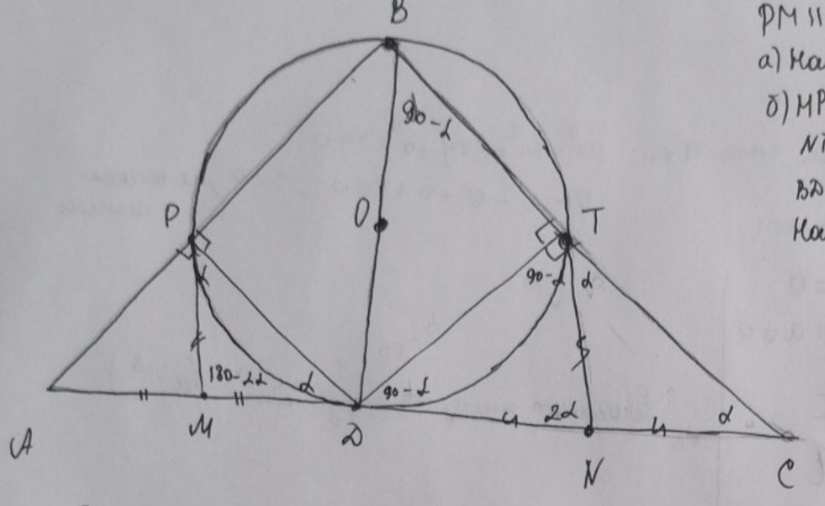
$100 > 99$

$\Rightarrow$ а значит и $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$ тоже подходит

Ответ: $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$; $x = 6$.

Чистовик

1



PM || TN

а) Найти: ∠ABC

б) MP = 1

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

Найти: $S_{\triangle ABC}$ - ?

Решение: а) очевидно, что D - точка касания. Т.к BD - диаметр, то ∠BPD = ∠BTD = 90° (как вписанные, опирающиеся на диаметр). ∠APD = 90° (смежный с ∠BPD), ∠CTD = 90° (смежный с ∠BTD).] ∠C = α, тогда ∠TDC = 90 - α. ~~Есть~~ по Т о медиане, проведённой из прямого угла: она равна отрезкам, на которые медиана делит сторону/ => AM = MD = PM; DN = NC = TN. ∠CBD = 90 - α (△BDC - прямоуг). △DNT - равноб. /=> ∠DTN = 90 - α = ∠TDN /=> ∠NTC = α. Отсюда следует, что ∠TND = 2α (по Т о сумме углов треугольника). Т.к. PM || TN, то ∠PMD = 180 - 2α (как односторонние), а ∠MPD = ∠MDP = α. ∠PDT = 180° - ∠PDM - ∠TDN = = 180° - α + α - 90 = 90°, а значит ∠ABC = 90° (сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°) ч.т.д.

б) $S_{\triangle}ABC = \frac{AC \cdot BD}{2}$

$AC = 2AM + 2DN = 2(AM + DN)$. Т.к $AM = PM$, $DN = TN$ (доказывалось ранее), то $AC = 2(PM + TN) = 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2}$

2

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

211007343 (U892521 M1274018)

③ $\begin{cases} 5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 & \text{(координаты A)} \\ ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 & \text{(парабола с вершиной в B)} \\ y=2x-5 \end{cases}$

Решение: Заметим, что $a\neq0$: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$0-0-0+0+3=0$; $3\neq0$, не имеет смысла

Найдем x_B для параболы:

$$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$$
$$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3 \quad |:a\neq0$$
$$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$$
$$x_B=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-2a)}{2\cdot1}=a$$
$$y(a)=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$$

$\Rightarrow$ вершина имеет координаты $(a;\frac{3}{a})$

Чтобы B лежала правее $y=2x-5$, требуется:

$\begin{cases} y=2a-5 \\ y=\frac{3}{a} \end{cases}$; $\begin{aligned} 2a-5>\frac{3}{a} \\ \frac{2a^2-5a-3}{a}>0 \end{aligned}$; $\frac{2(a-3)(a+\frac{1}{2})}{a}>0$

$-\quad+\quad-\quad+$

$\frac{1}{2}\quad 0\quad 3$

$a\in(\frac{1}{2};0)\cup(3;+\infty)$

Чтобы B лежала левее $y=2x-5$ требуется:

$\begin{cases} y=2a-5 \\ y=\frac{3}{a} \end{cases}$; $\begin{aligned} 2a-5<\frac{3}{a} \\ \frac{2a^2-5a-3}{a}<0 \end{aligned}$; $\frac{2(a-3)(a+\frac{1}{2})}{a}<0$

$-\quad+\quad-\quad+$

$-\frac{1}{2}\quad 0\quad 3$

$a\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;3)$

Рассмотрим уравнение точки:

$$y^2+12ax-\underline{4xy}+8x^2-\underline{4ay}+5a^2=0$$
$$y^2+y(-4x-4a)+5a^2+8x^2+12ax=0$$
$$D=(-(4x+4a))^2-4\cdot(5a^2+8x^2+12ax)=\underline{16x^2}+16a^2+32ax-\underline{20a^2}-\underline{32x^2}-48ax=$$
$$=-16x^2-4a^2-12ax=-4(8x^2+a^2+3ax)\ \# \ \cancel{-4(2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{\cdot}}$$

211007343 (U892521 M1274018)

Чистовик

№17 Т.к это точка, то она имеет единственное значение

y, т.е $D=0$: $-4(8x^2+a^2+3ax)=0$

$8x^2+a^2+3ax=0$

$D=9a^2-4\cdot 8\cdot a^2=9a^2-32a^2=-23a^2$, 3

Имеет смысл лишь при $a\neq 0$, но это ложь, значит

точка не задается единственным образом

Ответ: $a\in\varnothing$

211007343 (U892521 M1274018)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007343**

ID профиля: **892521**

Вариант 10

Чистовик

④ $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

Решение: $x^2+y^2 \neq 0 \,|\Rightarrow x ; y \neq 0$

$\exists\ x^2+y^2 = u,\ x^2y^2 = v$, тогда: $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$

Заменим: $\begin{cases} \frac{30}{u} + 5v = 50 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$; $u^2 - \frac{30}{u} = 31$; $u^2 - \frac{30}{u} - 31 = 0 \,|\cdot u$

$u^3 - 31u - 30 = 0$, видим, что $u = -1$ – корень, тогда:

$$\begin{array}{l|l} u^3 - 0u^2 - 31u - 30 & u+1 \\ \hline -\ u^3 + u^2 & u^2 - u - 30 \\ \quad -u^2 - 31u & \\ \quad -u^2 - u & \\ \qquad -30u - 30 & \\ \qquad -30u - 30 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow u^3 - 31u - 30 = (u+1)(u^2 - u - 30)$

Т.к. $u = x^2+y^2 \geq 0$, то $u=-1$, $u=-5$ – пост. корни.

$u^2 - u - 30 = 0$

$\begin{array}{l|l} u_1 \cdot u_2 = -30 & u_1 = 6 \\ u_1 + u_2 = 1 & u_2 = -5 \end{array}$

Если $u = 6$, то: $6^2 + 5v = 81$

$v = \frac{81-36}{5} = 9$

Обратная замена: $\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$; $\exists\ x^2 = t,\ y^2 = d \,|\Rightarrow \begin{cases} t+d = 6 \\ td = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6-t \\ td = 9 \end{cases}$

Подставим: $t(6-t) = 9$

$6t - t^2 = 9$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

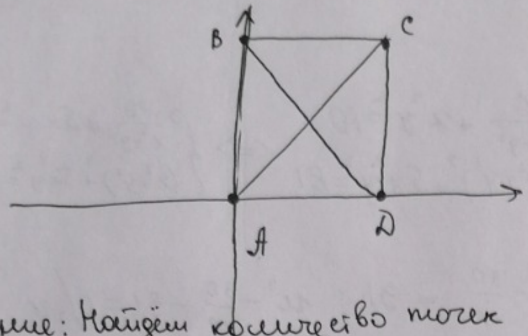
$(t-3)^2 = 0$; $t = 3$

$\Rightarrow d = 6 - t = 3$

Обратная замена: $\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3});(-\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

(5)



$A(0;0)$; $B(0;69)$; $C(69;69)$; $D(69;0)$

$y=x$

$y=69-x$

$$\begin{array}{r} \times\ 8713 \\ 68 \\ \hline +\ 69704 \\ 52278 \\ \hline 592484 \end{array}$$

Решение: Найдём количество точек внутри квадрата:

$N=68\cdot68=68^2$. Изображу прямые $y=x$ и $y=69-x$: это окажутся диагонали квадрата: $y=69-x$

x	0	69
y	69	0

$y=x$

x	0	69
y	0	69

Пересекутся эти прямые в точке $L(34{,}5;34{,}5)$:

$$69-x=x$$
$$x=\frac{69}{2};\ y=\frac{69}{2}$$

~~Посмотрим n вариантов, с участием $N(x;x)$, но не будем учитывать точки, прина которые обе принадлежат $y=x$: $n=68^2-68$. Посчитаем прямые, удовлетворяющие условию~~, но пересекающие ~~несколько 3 цело-численных точки: $n=$~~ Посчитаем для произвольной точки $N(x;x)$ количество таких пар, но не будем считать точки, которые принадлежат самой $y=x$: $n=68^2-67\cdot3$, таких точек 68, значит пар: $n'=(68^2-67\cdot3)68$, такое же количество и на $y=69-x$, то есть $n''=2n'=68\cdot2(68^2-67\cdot3)$, но мы посчитали точки, принадлежащие 2 разным прямым одновременно 2 раза, нужно их вычесть: $l=\cancel{2}\cdot68\cdot66$

$(60+8)^2=3600+64+2\cdot60\cdot8=$
$=3600+960+64=3600+1024=$
$=4624$

$$\begin{array}{r} -\ 4624 \\ 201 \\ \hline 4423 \end{array}$$

Ещё мы не посчитали точки, принадлежащие одной из этих прямых одновременно: $Z=2C_{68}^2=2\frac{68\cdot67}{2}=34\cdot67\cdot2=68\cdot67$.

$$\begin{array}{r} -\ 8846 \\ 133 \\ \hline 8713 \end{array}$$

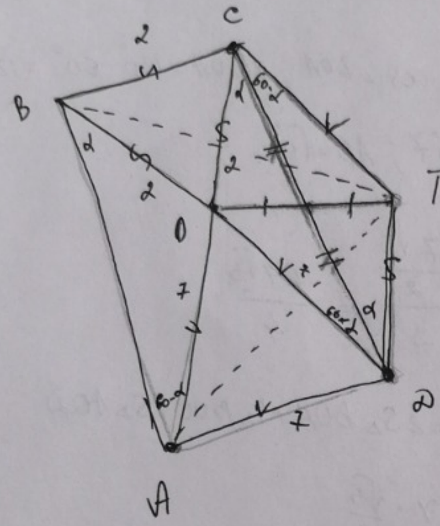
4423

$N=n''+Z-l=68\cdot2(68^2-67\cdot3)-68\cdot67-68\cdot66=68(2(68^2-67\cdot3)-67\cdot66)=$

Ответ: $N=592484$

Чистовик

6



Д-ть:
а) $\triangle ABT$ - правильный
б) $BC = 2$
$AD = 7$
$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:

а) Заметим, что OCTD - параллелограмм (по признаку), т.к CD и OT при пересечении делятся пополам, а значит OD = CT; CO = DT, также заметим, что, раз $\angle BCO = \angle OAD = 60°$, они накрестлежащие, то BC∥AD. $\triangle BAO = \triangle CDO$:

1) BO = CO
2) OA = OD
3) $\angle BOA = \angle COD$

$\Rightarrow$ $\triangle BAO = \triangle CDO$ по 2 ст и ∠. $\Rightarrow$ ABCD - равнобокая трапеция.

Раз ABCD - равнобокая трапеция, то её можно вписать в окружность, а значит $\angle ABD = \angle ACD$; $\angle BAC = \angle BDC$ (опираются на одну и ту же дугу, вписанные). $\rceil$ $\angle ABD = \alpha = \angle ACD$, $\angle BAO = \angle CDO = 60° - \alpha$, т.к CT = OD (по опр. пар-мма), то $\angle TCD = 60 - \alpha$, аналогично $\angle TDC = \alpha$. Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle TDA$

1) BC = TD
2) CT = DA
3) $\angle BCT = \angle ADT$ $(60 + 60 - \alpha + \alpha = 120)$

$\Rightarrow$ $\triangle BCT = \triangle TDA$ по 2 ст и ∠, а значит BT = AT как соотв. элементы.

Р/м $\triangle CTD$ и $\triangle CBT$

1) CB = DT
2) CT - общая
3) $\angle CTD = \angle BCT = 120°$

$\Rightarrow$ $\triangle CTD = \triangle CBT$ по 2 ст и ∠, а значит CD = BT.

$$\begin{cases} CD = BA \\ CD = BT \end{cases} \Rightarrow BA = BT$$

Р/м $\triangle BTA$: $BA = BT = AT$, т.е он правильный ч.т.д.

б) $CB = BO = CO = 2$, $AO = OD = AD = 7$

по Т cos: $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos\angle BOA$, $\angle BOA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$AB^2 = 2^2 + 7^2 + 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 49 + 14 = 67;\ AB = \sqrt{67}.$$

$$S_{\triangle ABT} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{AB^2 \cdot \frac{\sqrt3}{2}}{2} = \frac{\frac{67\sqrt3}{2}}{2} = \frac{67\sqrt3}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} = 2S_{\triangle BOA} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt3}{2}}{2}\right) + \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt3}{2}}{2} + \frac{7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt3}{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = 7\sqrt3 + \sqrt3 + \frac{49\sqrt3}{4} = \sqrt3\left(8 + \frac{49}{4}\right) = \sqrt3\left(\frac{32+49}{4}\right) = \sqrt3\left(\frac{81}{4}\right)$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt3}{4} : \frac{\sqrt3 \cdot 81}{4} = \frac{67\sqrt3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt3 \cdot 81} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$