Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

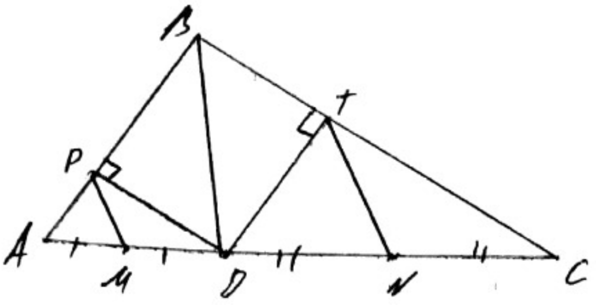
Шифр: **211007334**

ID профиля: **129140**

Вариант 10

Чистовик

№1



а) Заметим, что т.к. BD – диаметр построенной окружности и точки P и T лежат на ней, то $\angle BTD = \angle BPD = 90°$. Рассмотрим тогда прямоугольные треугольники APD и CTD. В них отрезки PM и TN являются медианами к гипотенузе, ~~т.е.~~ $\Rightarrow PM = AM = MD$ и $TN = DN = CN$. Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle TNC = \angle PMA \Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \frac{180° - \angle PMA}{2}$ и $\angle NCT = \angle NTC = \frac{180° - \angle TNC}{2} \Rightarrow \angle PDA = \angle TCD \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ по острому углу. ~~…~~ $\angle PDA = \angle TCD$ и прямому углу $\angle P$ и $\angle T$. Тогда $\angle BAC = \angle PAD = \angle TDC \Rightarrow AB \parallel TD \Rightarrow \angle ABC = \angle DTC = 90°$.

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

б) Пусть $AB = a$, $BC = b$, $\angle BDC = \alpha$. ~~…~~ Заметим, что т.к. $TN = \frac{1}{2} CD$ и $PM = \frac{1}{2} AD$, как медианы к гипотенузе в прямоугольных треугольниках $\triangle APD$ и $\triangle DTC \Rightarrow AD = 2$, $CD = 3 \Rightarrow AC = 5$. Тогда, т.к. из п. а прямая a, $\triangle ABC$ прямоугольный, то $a^2 + b^2 = AC^2 = 25$. Выразим квадраты BC и AC по теореме косинусов для $\triangle BDC$ и $\triangle ABD$.

$a^2 = BD^2 + AD^2 - 2\cos(180° - \alpha) BD \cdot AD = 5 + 4 + 2\cos\alpha \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}\cos\alpha$

$b^2 = BD^2 + CD^2 - 2\cos(\alpha) BD \cdot CD = 5 + 9 - 2\cos\alpha \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 14 - 6\sqrt{5} \cdot \cos\alpha$

Тогда:

$a^2 + b^2 = 25$

$9 + 4\sqrt{5} \cdot \cos\alpha + 14 - 6\sqrt{5} \cdot \cos\alpha = 25$

$-2\sqrt{5} \cdot \cos\alpha = 2$

$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Тогда $a = \sqrt{9 + 4\sqrt{5} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}})} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{14 - 6\sqrt{5} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}})} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Тогда

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$, т.к. $\angle A = 90°$.

Ответ: 5

Чистовик

№2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + \frac{7}{2} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - \frac{1}{2}$

$x+3+7-x+\frac{49}{4} + 7\sqrt{x+3} - 7\sqrt{7-x} - 2\sqrt{21+4x-x^2} = (2\sqrt{21+4x-x^2})^2 + \frac{1}{4} - 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$10 + \frac{48}{4} + 7(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) = (2\sqrt{21+4x-x^2})^2$

то $22 + 7(2\sqrt{21+4x-x^2} - 4) = (2\sqrt{21+4x-x^2})^2$

Пусть $2\sqrt{21+4x-x^2} = t,\ t \geq 0$

$22 + 7(t-4) = t^2$

$t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-6)(t-1) = 0$

$t = 6$ или $t = 1$

$2\sqrt{21+4x-x^2} = 6$ | $2\sqrt{21+4x-x^2} = 1$

$21 + 4x - x^2 = 9$ | $84 - 16x - 4x^2 = 1$

$x^2 - 4 - 12 = 0$ | $4x^2 + 16x - 83 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$ | $x = \frac{8 \pm \sqrt{64+332}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{16+83}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{99}}{2} = 2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$x = 6;\ -2.$

Если Проверим корни подстановкой.

1). При $x = 6$ $\sqrt{x+3} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{7-x} = \sqrt{1} = 1$, $\sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{(x+3)(7-x)} = \sqrt{9 \cdot 1} = 3$.

Тогда: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 3 - 1 + 4 = 6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot \sqrt{21+4x-x^2}$. Корень подходит

2) $x = -2$. Тогда $\sqrt{x+3} = \sqrt{1} = 1$, $\sqrt{7-x} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{(x+3)(7-x)} = \sqrt{1 \cdot 9} = 3$.

Тогда: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$, но $2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{1 \cdot 9} = 6 \neq 4$. Корень не подходит.

3) $x = 2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$. Тогда $\sqrt{x+3} = \sqrt{5 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}}$, $\sqrt{7-x} = \sqrt{5 \mp \frac{3}{2}\sqrt{11}}$, $\sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{(5 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11})(5 \mp \frac{3}{2}\sqrt{11})}$

$= \sqrt{25 - \frac{9}{4} \cdot 11} = \sqrt{\frac{100-99}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Тогда:

$\sqrt{5 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5 \mp \frac{3}{2}\sqrt{11}} + 4 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

Чистовик

$\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3.$

Тогда если $x = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{11}$ то $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}} > 0$, т.к.

$5+\frac{3}{2}\sqrt{11} > 5-\frac{3}{2}\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} > \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}$. Значит этот корень не подходит. Тогда проверим корень $x = 2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$.

$$\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$$

$$\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} = 3$$

Т.к. левая часть больше 0 по вышеприведённым соотношениям:

$$5+\frac{3}{2}\sqrt{11} + 5 - \frac{3}{2}\sqrt{11} - 2\sqrt{(5-\frac{3}{2}\sqrt{11})(5+\frac{3}{2}\sqrt{11})} = 9$$

$$10 - 2\sqrt{25-\frac{99}{4}} = 9$$

$$1 = 2\sqrt{\frac{100-99}{4}}$$

$$1 = 2\cdot\frac{1}{2}$$

~~корень $x = 2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$ подходит. Значит~~

Сделаем проверку оставшихся корней на ОДЗ

~~$x+3\geq 0$~~ Если $x+3>0$ и $7-x>0$, то и $21+4x-x^2 = (x+3)(7-x) > 0$, поэтому нужно проверить только 2 неравенства.

1. $x = 6$

$x+3 = 9 > 0$

$7-x = 6 > 0$

2. $x = 2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$x+3 = 5-\frac{3}{2}\sqrt{11} > 0$

$5 > \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$25 > \frac{9}{4}\cdot 11$

$100 > 99$

$7-x = 5+\frac{3}{2}\sqrt{11} > 5-\frac{3}{2}\sqrt{11} > 0$

Значит полученные корни подходят.

Ответ: $x = 6$; $x = 2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

№3

Найдём координаты точки А.

$$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$$

$$y^2 - 4y(x+a) + 4a^2 + 4x^2 + 8ax + a^2 + 4ax + 4x^2 = 0$$

$$(y - 2(x+a))^2 + (a+2x)^2 = 0$$

Т.к. квадраты действительных чисел не меньше 0:

$$\begin{cases} y - 2(x+a) = 0 \\ 2x + a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - a = 0 \\ x + \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a \\ x = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

Найдём координаты точки В.

$$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$$

$$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$$

$$\cancel{y = (x-a)^2 + \frac{3}{a}}$$

Тогда вершина этой параболы лежит в точке $-\frac{(-2a)}{2} = a$ и координаты точки В $x_B = a$ $y_B = (x_B - a)^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$.

Найдём разности между y-координатами точек А и В с одной стороны, и y-координатами точек прямой $y = 2x - 5$, при соответствующих точкам А и В значениях x. Тогда, если эти разности будут иметь один знак, то точки А и В лежат по одну сторону от этой прямой. Тогда произведение этих разностей больше 0.

$$(y_A - y(x_A))(y_B - y(x_B)) > 0$$

$$\left(a - \left(2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) - 5\right)\right)\left(\frac{3}{a} - (2\cdot a - 5)\right) > 0$$

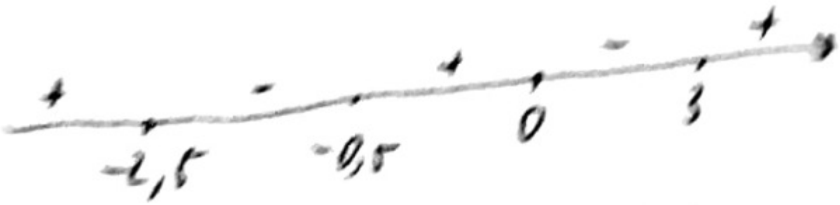
$$(a + a + 5)\left(\frac{3}{a} - 2a + 5\right) > 0$$

$$\frac{(a+2,5)(3 - 2a^2 + 5a)}{a} > 0$$

Условие

$$a = \frac{(a+2,5)(2a^2-5a-3)}{a} < 0$$

$$\frac{(a+2,5)2\left(a+\frac{1}{2}\right)(a-3)}{a} < 0$$



Ответ: $a \in (-2,5; -0,5) \cup (0; 3)$

[illegible]

211007334 (U129140 M1278152)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007334**

ID профиля: **129140**

Вариант 10

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \frac{30}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31$$

Пусть $x^2+y^2 = t$, $t > 0$

$$t^2 - \frac{30}{t} = 31$$

$$t^3 - 31t - 30 = 0$$

	1	0	-31	-30
-1	1	-1	-30	0
-5	1	-6	0	

$$(t+1)(t+5)(t-6) = 0$$

Т. к. $t > 0$, $t = 6$

$$x^2+y^2 = 6$$

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$$

$\cancel{x^2+y^2=9}$ $x^2 \cdot y^2 = \cancel{10}\ 9$

$$x^2(6-x^2) = 9$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2-3)^2 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$y^2 = 3$$

$x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $x = \pm\sqrt{3}$, $\cancel{y}$ $y = \pm\sqrt{3}$

Чистовик

№ 5

На каждой из этих прямых лежат по 68 узлов сетки, из лежащих внутри квадрата, т.к. эти прямые - его диагонали. Число способов выбрать узел на одной из этих прямых равно $(68+68)$, т.к. они не пересекаются в некотором узле. Если выбрать ~~[illegible]~~ этот 1 узел из сетки, то не можем выбрать ни один из 67 лежащих в одной с ним вертикали и из 67 лежащих с ней же горизонтали. Тогда число способов выбрать второй узел $(68^2-67-67-1)$. При этом, случаи когда оба узла лежат на этих прямых были подсчитаны 2 раза. Их число способов выбрать второй элемент из числа лежащих на ~~[illegible]~~ $y=x$ и $y=69-x$ равно, ~~[illegible]~~ $(68+68-1-1-1)$, т.к. с каждым вертикальным и горизонтальным рядом диагональ пересекается лишь в 1 узле. Тогда таких случаев $\frac{(68+68)(68+68-3)}{2}$, т.к. порядок не важен.

Тогда всего способов:

$$(68+68)(68^2-67-67-1)-\frac{(68+68)(68+68-3)}{2}=136\cdot(68^2-134)-\frac{136\cdot133}{2}=$$

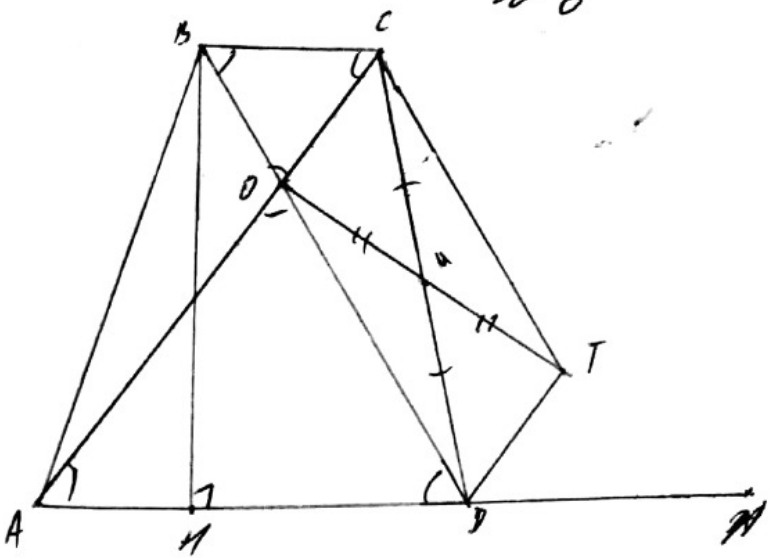
$$136\cdot(4624-134)-68\cdot133=136\cdot4490-9044=610640-9044=$$

$$=601596$$

Ответ: 601596 способов

Чистовик

№ 6



а) Заметим, что т.к. $OM = MT$ и $CM = MD$, то $CODT$ – параллелограмм. Тогда $DT \parallel CO$, $CT \parallel DO$, $CO = TD$, $DO = CT$. ~~∠ODT~~

Тогда $\angle ADT = 180° - \angle CAD = 120°$, $\angle BCT = 180° - \angle DBC = 120°$, $\angle AOB = 180° - \angle AOD = 120°$, $BO = DT = BC$, $AO = AD = CT$.

Тогда $\triangle ABO = \triangle ADT = \triangle BCT$ по углу и смежным сторонам $\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

б) Заметим, что $BC \parallel AD$, т.к. $\angle BCO = \cancel{\angle ODB}\ \angle OAD$. $AB = CD$, т.к. $\triangle ABO = \triangle CDO$. Тогда $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

Её высота ~~BH~~ BH равна сумме высот треугольников BOC и AOD, соответственно равных $BO \cdot \sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ и $AO \cdot \sin 60° = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $BH = (7+2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Тогда $S_{ABCD} =$

$$= \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{7+2}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}.$$

Заметим, что $AH = \frac{AD - BC}{2}$, т.к. трапеция равнобедренная, т.е. $AH = \frac{7-2}{2} = \frac{5}{2}$. Тогда $AB^2 = AH^2 + BH^2 = \frac{25}{4} + \frac{243}{4} = \frac{268}{4} = 67$. Тогда:

$$S_{\triangle ABT} = \frac{AB \cdot AT \cdot \sin\angle A}{2} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{67 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$ Тогда:

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{81 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{67}{81}$