Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

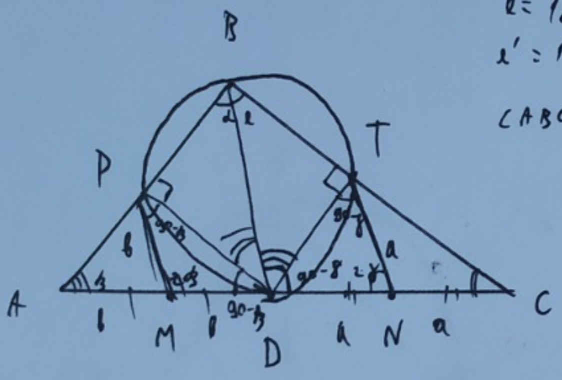
Шифр: **211007303**

ID профиля: **350687**

Вариант 10

Черновик.

№1.



$\ell = 180 - 2\gamma$

$\ell' = 180 - 2\alpha$

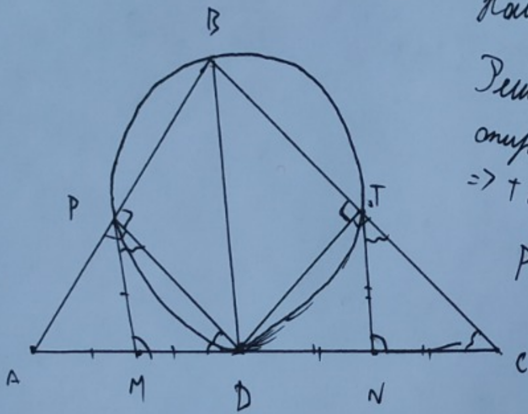
$\angle ABC = 360 - 2\alpha - 2\gamma = 180 - \alpha - \gamma$

Чистовик.

№1. Вариант 10.

Дано: ΔABC; BD - диаметр; $AM = MD$; $DN = NC$;
$PM \parallel TN$

Найти: $\angle ABC$.



Решение: BD - ~~д~~ диаметр $\Rightarrow \angle BTD = \angle BPD = 90°$, т.к. опираются на диаметр и T и P ~~т~~ $\in$ окр. $\Rightarrow \angle DTC = \angle APD = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow TN = NC$ (TN медиана прям. Δ); $PM = AM$ (аналогично TN).

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC = \alpha$ - соответственные.

ΔPMD и TNC - равнобед с основаниями PD и TC и с противолежащим углом к основанию ~~α~~ $\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ углы при основаниях равны $\frac{\alpha}{2}$.

ΔTND - равнобед. с осн TD; $\angle TND = 180 - \alpha \Rightarrow \angle NDT = \angle DTN = 90 - \frac{\alpha}{2}$

~~$\angle PDT =$~~ $\angle MDP + \angle PDT + \angle TDN = 180°$

$\angle PDT = 180° - \angle PDM - \angle TDN = 180° - \frac{\alpha}{2} - (90 - \frac{\alpha}{2}) = 90°$.

Рассмотрим $PBTD$ - вписанный $\Rightarrow$ сумма противолежащих углов $180° \Rightarrow$
$\angle PBT + \angle PDT = 180°$

$\underset{\angle ABC}{\angle PBT} = 180° - \angle PDT = 180° - 90° = 90°$.

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

Черновик.

№2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$x^2-4x-21=0$

$D_1 = 4+21=25$

$x_{1,2} = 2\pm5 = -3; 7.$

$(x+3)\cdot(7-x) = 7x - x^2 + 21 - 3x.$

$\cancel{(x+7)\cdot(x-3)} =$

$x+3+16+8\sqrt{x+3} = 4\cdot(21+4x-x^2)+7-x + 4\sqrt{(21+4x-x^2)\cdot(7-x)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}.$

$6 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = x+3+7-x - 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} = 10$

$9 = 21+4x-x^2$

$x^2-4x-12=0$

$4 = \sqrt{7-x}^2 - \sqrt{\cancel{x+3}}^2 = 7-x-x-3 = 4-2x$

$x=-2;\ \boxed{x=6}$

$3-x$

$1-?$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$\cancel{x}+3 - 2\sqrt{\ } + 7\cancel{-x} = 4$

$3 = \sqrt{\ }$

$-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + 4 = 0.$

$(\sqrt{x+3})^2 - 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} + (\sqrt{7-x})^2 \pm 4 \cdot - (\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{7-x}^2)$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + (\dots) + 4 - x - 3 - 7 + x = 0$

$t^2+t-6=0$

$21+4x-x^2=9$

$t=2$

$x^2-4x-12=0$

$t=-3$

$x=-2$

$x=6$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$x=6 \Rightarrow \sqrt{9} - \sqrt{1}+4 = 2\cdot\sqrt{9}$

$x=-2$

$3-1+4=6$

$1-3=-2$

$\sqrt{1} - \sqrt{9}+4=6$

$1-3+4=2$

$4\cdot83: 320+12=332$

$21+4x-x^2=4$

$2\neq6$

$396 = 4\cdot99 = 4\cdot3\sqrt{11}$

$x^2-4x-17=0.$

$8\cdot8=64$

$D_1 = 4+17=21$

$\frac{x}{2} = 1=2$

$108-25=$

$2-\sqrt{21}$

$=81-5=83$

$x_{1,2} = -2\pm\sqrt{21}$

$1 = 84+16x+4x^2$

$\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$

$4x^2-16x-83=0.$

$8-2\cdot3\cdot\sqrt{11}.$

$(5-\sqrt{21}) - \sqrt{5+\sqrt{21}}$

$D = 64+4\cdot83 = 396. \Rightarrow x_{1,2} = 8\pm\sqrt{4^2\cdot3^2\cdot11}$

$36\cdot3 = 90+18$

$\sqrt{(8+3-6\sqrt{11})} - \sqrt{(7-8+6\sqrt{11})}$

$21+4(2+\sqrt{21}) - (4+21+4\sqrt{21})$

108

$2\cdot\sqrt{21+4(2-\sqrt{21})-(4-}$

$\cancel{21}+8+\cancel{4\sqrt{21}} - 4 - \cancel{21} - \cancel{4\sqrt{21}} = 4 \quad 2\sqrt{4}=4.$

$12 \quad \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$8-6\sqrt{11} > -12$

$36\cdot11 \quad 400$

$-6\sqrt{11} \quad -20$

$396 < 400$

$6\sqrt{11} \quad 20$

211007303 (U350687 M1275600)

Чистовик.

№2. Вариант 10.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\cdot\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$

$(\sqrt{x+3})^2 - 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} + (\sqrt{7-x})^2 + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + 4 - (\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{7-x})^2 = 0$

$\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 7-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \le 7 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;7]$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + 4 - x - 3 - 7 + x = 0$

Пусть $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = t$, тогда

$t^2 + t - 6 = 0$

$(t-2)\cdot(t+3) = 0 \Rightarrow t = 2;\ t = -3.$

① $t = 2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$\overset{\ge 0}{\sqrt{x+3}} = 2 + \overset{>0}{\sqrt{7-x}}$

$x+3 = 4 + 7 - x + 4\sqrt{7-x}$

$2x - 8 = 4\sqrt{7-x}$

$x - 4 = 2\sqrt{7-x}$; $\sqrt{7-x} \ge 0 \Rightarrow x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4.$

$x^2 - 8x + 16 = 28 - 4x$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)\cdot(x+2) = 0 \Rightarrow \underline{x=6};\ x = -2$ - нет.

② $t = -3$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$

$\overset{>0}{\sqrt{x+3}} + 3 = \overset{\ge 0}{\sqrt{7-x}}$

$x + 3 + 9 + 6\sqrt{x+3} = 7 - x$

$6\sqrt{x+3} = -5 - 2x$; $\sqrt{x+3} \ge 0 \Rightarrow -2x - 5 \ge 0 \Rightarrow x \le \frac{-5}{2}$

$36x + 108 = 4x^2 + 25 + 20x$

$4x^2 - 16x - 83 = 0.$

$D_1 = 8^2 + 4\cdot 83 = 396 = 2^2\cdot 3^2\cdot 11.$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6\sqrt{11}}{4}$; $\frac{8+6\sqrt{11}}{4}$ - нет ; $\frac{8-6\sqrt{11}}{4} < \frac{-5}{2}$;

$\frac{8-6\sqrt{11}}{4} \ ?\ -3$

$8 - 6\sqrt{11} \ ?\ -12$

$6\sqrt{11} \ ?\ 20$

$396 \underset{<}{?} 400 \Rightarrow \frac{8-6\sqrt{11}}{4} > -3.$

Ответ: $x = 6;\ \frac{8-6\sqrt{11}}{4}.$

211007303 (U350687 M1275600)

Черновик.

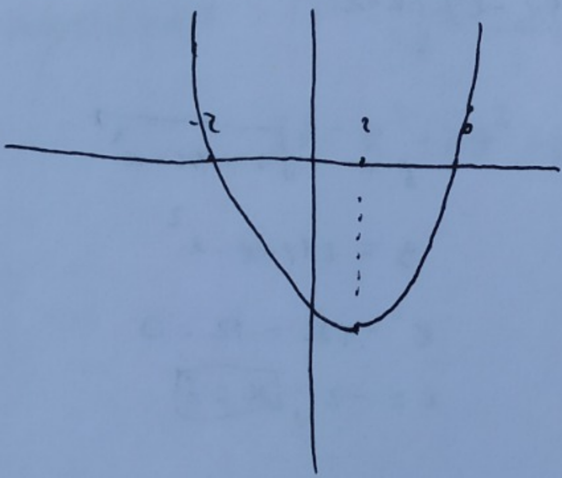
№3.

$A: 5a^2 - 9ay + 8x^2 - 4y + y^2 + 12ax = 0.$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 6; -2$

$x = \frac{-b}{2a}$



$x = 2$

$4 - 8 - 12 = 0$

$-16.$

211007303 (U350687 M1275600)

Чистовик

№3. Вариант 10.

координата A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$.

парабола: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 \Leftrightarrow ay=ax^2-2a^2x+a^3+3 \Rightarrow y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a}=$

$=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

B - вершина параболы: $x_B=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2a)}{2}=a$.

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

$B:\left(a;\frac{3}{a}\right)$

211007303 (U350687 M1275600)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007303**

ID профиля: **350687**

Вариант 10

Черновик

№ 1. (~~вар~~ 1)

$$\begin{cases} \frac{b}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{t} + \frac{x^2y^2}{b} = 10 \quad \cdot t \\ t^2+5b = 81 \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} 6 + bt = 10t \\ t^2+5b = 81 \end{cases} \qquad b = 10 - \frac{6}{t}$$

$$t^2 + 50 - \frac{30}{t} = 81 \quad \cdot t.$$

$t = \frac{6}{10-b}$

$t^3 - 31t - 30 = 0.$

$t(t^2-1) - 30(t-1)$

$t \cdot (t+1) \cdot (t-1) - 30(t-1)$

$(t-1) \cdot (t^2+t-30) = 0$

$(t-1) \cdot (t+6) \cdot (t-5) = 0$

$t = 1 \Rightarrow b = 4$ - нев

$t = 5 \Rightarrow b = \frac{44}{5}$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2y^2 = \frac{44}{5} \end{cases} \qquad x^2 = (5-y^2) \qquad x \to y \text{ - неизмен.} \Rightarrow \text{если } \exists(x;y) \to \exists(y;x)$$

$5a - a^2 = \frac{44}{5} \quad \cdot 5$ 200 220

$\boxed{b = 9.}$

$5a^2 - 25a + 44 = 0$

$D = 625 -$

3 3 $1 + 9 = 10$

$9 + 9 + 9 \cdot 7 = 81$

$9 \cdot 9 = 81.$

Черновик

№1 (стр. 2)

$\frac{6}{t} + b = 10 \Rightarrow b = 10 - \frac{6}{t}$ $\qquad 36 \cdot 6 = 180 + 36 = 216 \qquad 186$

$t^2 + 5b = 81 \qquad t^2 + 50 - \frac{30}{t} = 81 \quad t$

$t^3 - 31t - 30 = 0 \qquad -1 + 31 - 30 = 0.$

$\begin{array}{l|l} t^3 - 31t - 30 & t - 6 \\ \hline -\,\underline{t^3 - 6t^2} & t^2 + 6t + 5 \\ \quad 6t^2 - 31t & \\ -\,\underline{6t^2 - 36t} & \\ \qquad 5t - 30 & \\ -\,5t - 30 & \end{array}$

$t^2 + 6t + 5$

$\boxed{-1; -5}$

Чистовик.

№1. Вариант 10.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+2x^2y^2+5x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a$; $x^2y^2 = b$, тогда ; $x^2+y^2>0$; $x^2 \cdot y^2 \geq 0$.

$$\begin{cases} b = 10 - \frac{6}{a} \\ a^2+5b = 81 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 5\cdot\left(10-\frac{6}{a}\right) = 81 \quad |\cdot a$$

$a^3+50a-30 = 81a$

$a^3-31a-30=0$

$(a-6)\cdot(a^2+6a+5)=0$

$(a-6)\cdot(a+1)\cdot(a+5)=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-31a-30 & a-6 \\ \cline{2-2} -\ a^3-6a^2 & a^2+6a+5 \\ \hline -6a^2-31a & \\ -\ 6a^2-36a & \\ \hline -5a-30 & \\ -\ 5a-30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-1 \text{ - нев} \\ a=-5 \text{ - нев} \end{array}\right. \Rightarrow a=6.$$

$b = 10 - \frac{6}{a} = 9$

$$\begin{cases} x^2y^2=9 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2=9 \\ x^2=6-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y^2\cdot(6-y^2)=9$

$y^4-6y^2+9=0$

$(y^2-3)^2=0$

$y^2-3=0$

$y=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $x^2=6-3=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$x^2 \to y^2$ - неизмен $\Rightarrow$

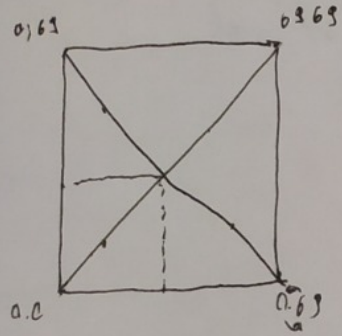
$\Rightarrow$ если $\exists(x;y) \Rightarrow \exists(y;x)$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3}), (\sqrt{3};-\sqrt{3}), (-\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

211007303 (U350687 M1275601)

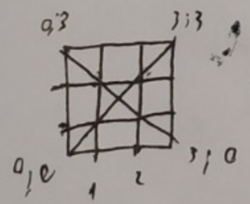
Черновик.

№2.



$(n;n)$ $(n;69-n)$ и $(69-n;n)$

$(68+68-1) = \dfrac{135\cdot(68+68-1-3)}{2} = \dfrac{135\cdot132}{2} = 135\cdot66$



0·1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 10 11

$4-2=2$

$6800+204 = 7004 + 2040$

9044

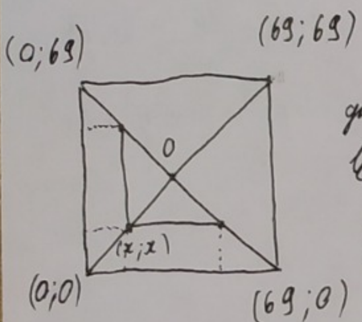
$68\cdot133 = 6800 + 2040+204 = 9044$

$68\cdot3 = 180+24 = 204$

$7\cdot7 = 4900\cdot4 = 20000$ 10000

Чистовик.

№2. Вариант 10.



Прямые $y=x$ и $y=69-x$ – диагонали квадрата. Каждая диагональ содержит 68 узлов (от 0 до 69 → 70 − 2 = 68 (−2 т.к. вершины кв. не считаются)). Если мы выберем узел с координатами $(x;x)$ и из него опустим 2 прямые ∥ осям, то при пересечении с другой диагональю получим узлы с координатами $(x;69-x)$ и $(69-x;x)$. Исходя из этого любой взятый узел ~~(кроме "O")~~ будет "закрывать" ещё 2 узла, т.к. нельзя чтобы были прямые ∥ осям.

Точка пересечения диагоналей "O" имеет координаты $\left(\frac{69}{2};\frac{69}{2}\right)$ => не является узлом.

Значит первым узлом мы можем взять любой на диагоналях (1 из 136 (68+68)), а вторым 1 из оставшихся убирая 3 узла (уже взятый и для ∥). Учитываем повторы вида ((x;x) и (y;y)) и ((y;y) и (x;x))

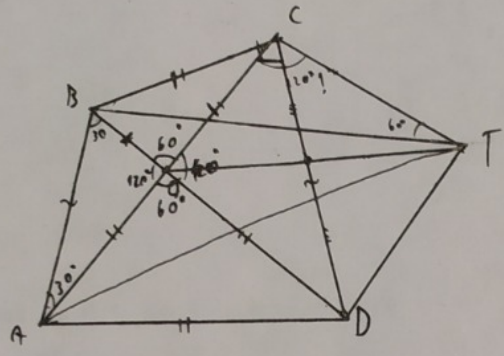
$$\frac{(68+68)\cdot(68+66-3)}{2} = \frac{136\cdot 133}{2} = 68\cdot 133 = 9044$$

Ответ: 9044.

Черновик.

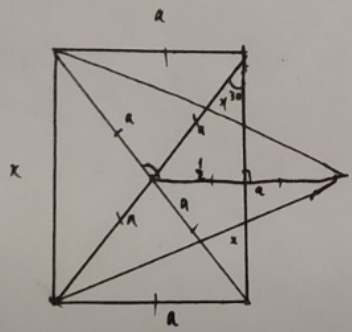
№3.

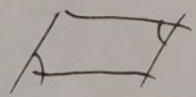
$CD^2 = a^2+b^2-2ab\cos(120^\circ) = a^2+b^2+ab.$



$(a+b)^2+b^2-2(a+b)\cdot b\cdot \cancel{\cos 60^\circ}$

$a^2+b^2+2ab+\cancel{b^2}-\cancel{b^2}-\cancel{ab}$





Чистовик.

№3. Вариант 10.

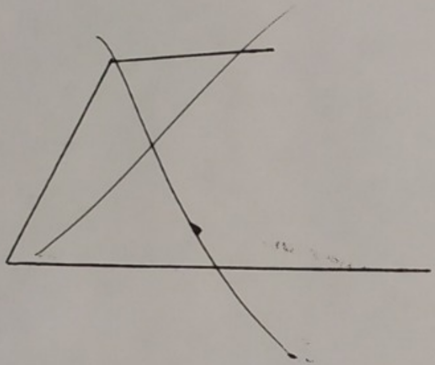
Дано: $ABCD$; $BD \cap AC = O$; BOC и AOD - прав. Δ-ки.

$CK = KD$; $OK = KT$

б) $BC = 2$; $AD = 7$.

Найти: а) Док-ть ABT - прав. Δ.

б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$.



Решение: ΔBOC - прав. $\Rightarrow BO = OC = BC$; $\angle$ по $60^\circ \Rightarrow$

$= \angle COD = 180^\circ - 60 = 120^\circ$;

$CK = KD$

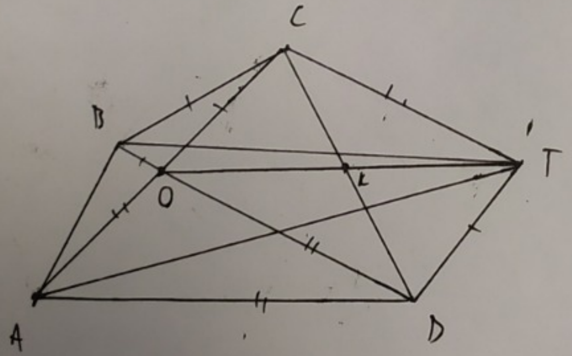
$OK = KT$

CO и OT - диагонали$(OCTD)$

$\Rightarrow OCTD$ - параллелограмм $\Rightarrow$

$CT = OD$; $OC = DT$

$\angle OCT = \angle ODT$



ΔACT: $AC = CO + OA$

$CT = OD = OA$

$AT^2 = (CO + CT)^2 + CT^2 - 2(CO + CT) \cdot CT \cdot \cos 60^\circ =$

$= CO^2 + CT^2 + CO \cdot CT$

ΔBDT: $BD = BO + OD = CO + CT$.

$DT = BO = CO$.

$BT^2 = (BO + OD)^2 + (DT)^2 - 2(BO \cdot OD) \cdot DT \cdot \cos 60^\circ =$

$= CO^2 + 2\,CO \cdot CT + CT^2 + CO^2 - CO^2 - CO \cdot CT =$

$= CO^2 + CT^2 + CO \cdot CT$.

ΔABO:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120 = CO^2 + CT^2 + BO \cdot CT. = BT^2 = AT^2 \Rightarrow \Delta ABO$ - прав. $\blacksquare$