

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

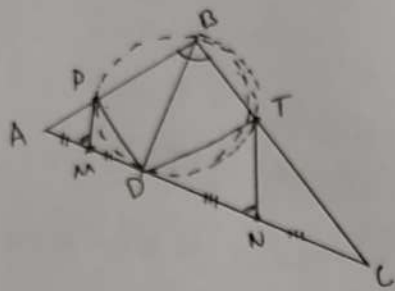
Шифр: **211007268**

ID профиля: **283077**

Вариант 10

10 класс. В 10, часть 1

Зусловие



$$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$$

$$\Downarrow \\ \Delta APM \sim \Delta DTM$$

$$\Downarrow \\ AP \parallel DT \Rightarrow DT \parallel AB$$

$$\Delta PMD \sim \Delta TNC$$

$$\Downarrow \\ TC \parallel PD \Rightarrow PD \parallel BC$$

$$\Delta APD \sim \Delta DTC \sim \Delta ABC$$

$$\left. \begin{array}{l} PD \parallel BT \\ DT \parallel PB \end{array} \right\} \Rightarrow PBTD - \text{парал.}$$

$$\left. \begin{array}{l} DBTD - \text{парал} \\ PBTD - \text{прямо} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

1) Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

2. Задача

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

004: $x+3 \geq 0$ $7-x \geq 0$ $21+4x-x^2 \geq 0$
 $x \geq -3$ $x \leq 7$ $(x+3)(7-x) \geq 0$

$$x \in [-3; 7]$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4$$

$$x+3+7-x - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(21+4x-x^2) + 16 - 16\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6 + 4(x+3)(7-x)$$

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = t \quad t \geq 0$$

$$14t = 6 + 4t^2$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$t = \frac{7+5}{4} = 3 \quad t = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(x+3)(7-x) = 9$$

$$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$-x^2 + 4x + 21 = \frac{1}{4}$$

$$D = 16 + 48 = 64$$

$$4x^2 - 16x - 84 + 1 = 0$$

$$x = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$4x^2 - 16x - 83 = 0$$

$$x = \frac{4-8}{2} = -2$$

$$D = 16^2 + 16 \cdot 83 = 16(16 + 83) = 99 \cdot 16$$

$$x = \frac{16 + 4\sqrt{99}}{8} = 2 + \frac{\sqrt{99}}{2}$$

$$x = 2 + \frac{\sqrt{99}}{2}$$

Проверка

$$x = 6 \quad 5 - 1 + 4 = 2 \cdot 3$$

Проверка

$$x = 2 + \frac{\sqrt{99}}{2} \text{ не подходит}$$

$$x = -2 \quad 1 - 3 + 4 = 3 \cdot 2$$

$$x = 2 - \frac{\sqrt{99}}{2} \text{ подходит}$$

$$x = -2$$

$$x = -2$$

Ответ: $x = 6$, $x = 2 - \frac{\sqrt{99}}{2}$

исполним

ax^2

$$3. ax^2 - 2ax - ay + a^2 + 3 = 0$$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$$

$$x_B = \frac{2a}{2a} = a$$

$$B(a; \frac{7}{a})$$

$$y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$$

$$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$$

$$y^2 - 4y(x+a) + (8x^2 + 12ax + 5a^2) = 0$$

$$D = 16(x+a)^2 - 4(8x^2 + 12ax + 5a^2) = 4(4x^2 + 4a^2 + 8ax - 8x^2 - 12ax - 5a^2) = 4(-4x^2 - a^2 - 4ax) = -4(2x+a)^2$$

бслага $D \leq 0$

$$D = 0$$

$$2x = -a$$

$$x_A = -\frac{a}{2}$$

$$y_A = \frac{4(x+a)}{2} = 2(x+a) = -a + 2a = a \quad A(-\frac{a}{2}; a)$$

исполним

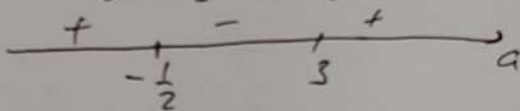
$$2x - y = 5$$

для B:

$$2a - \frac{7}{a} > 5$$

$$2a^2 - 3 - 5a > 0 \quad D = 49$$

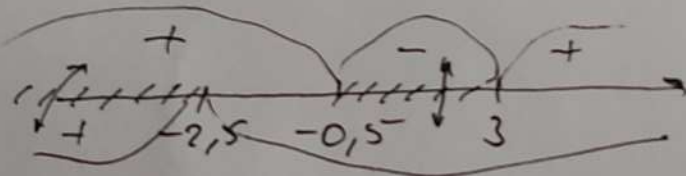
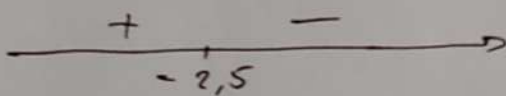
$$a = 3 \quad a = -\frac{1}{2}$$



для A:

$$-a - a > 5$$

$$a < -2,5$$



Ответ: лемат по одну сторону при

$$a \in (-\infty; -2,5) \cup (-0,5; 3)$$

$$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$$

Числовые

$$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$$

$$ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 = ay$$

$$y = x^2 - 2ax + (a^2 + \frac{3}{a})$$

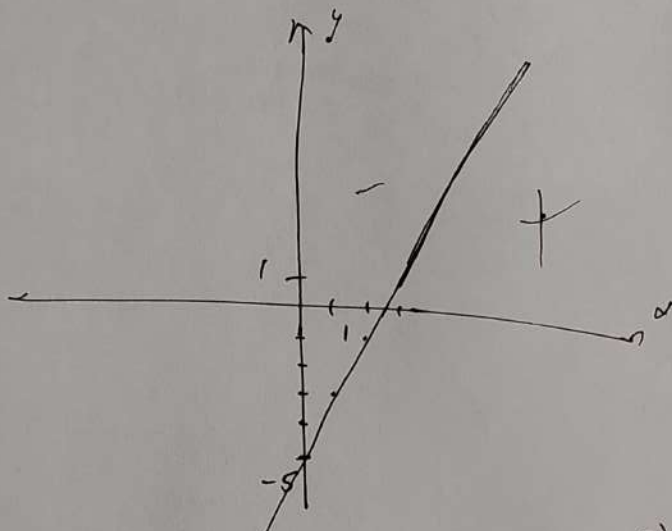
$$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{2a}{2} = a$$

$$y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$$

$$B(a; \frac{3}{a})$$

$$2x - y = 5$$

$$y = 2x - 5$$



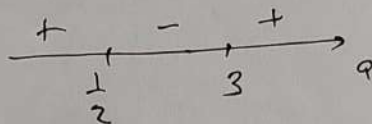
$$2a - \frac{3}{a} > 5$$

$$2a^2 - 3 - 5a > 0$$

$$D = 25 + 124 = 149$$

$$a = \frac{5 + \sqrt{149}}{4} = 3$$

$$a = \frac{5 - \sqrt{149}}{4} = -\frac{1}{2}$$



$$-a - a > 5$$

$$-2a > 5$$

$$a < -2,5$$

$$y^2 - 4xy - 4ay + (8x^2 + 12ax + 5a^2) = 0$$

$$y^2 - 4y(x+a) +$$

D =

$$D = 16(x+a)^2 - 4(8x^2 + 12ax + 5a^2) = 4(4x^2 + 4a^2 + 8ax - 8x^2 - 12ax - 5a^2)$$

$$4x(3a - y)$$

$$= 4(-4x^2 - a^2 - 4ax)$$

$$8x^2 + 12ax - 4xy + (y^2 - 4ay + 5a^2)$$

$$= -4(2x+a)^2$$

$$y = \frac{4(x+a)}{2} = 2(x+a)$$

$$x = -\frac{a}{2}$$

$$D = 16(3a - y)^2 - 4(y^2 - 4ay + 5a^2) = 4(9a^2 + y^2 - 24ay - y^2 + 4ay + 5a^2) = 4(3a^2 - 20ay)$$

$$y = -a + 2a = a$$

$$A(-\frac{a}{2}, a)$$

$$x = \frac{\quad}{16}$$

3/3

$$3a^2 > 20ay$$

$$y < \frac{3}{20}a$$

10

Equation

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$$

$$(x+3)(7-x) = 7x + 21 - 2x - x^2 = 21 + 4x - x^2$$

ODD: $x+3 \geq 0 \quad 7-x \geq 0$
 $x \geq -3 \quad x \leq 7$

$x \in [-3; 7]$

$$3-1+4 = 2 \cdot 3 \cdot 1$$

$$2 \cdot 4 = 6 \quad 1-3+4 = 2 \cdot 1 \cdot 3$$

$$6-6 = 0 \quad -2+4 = 2$$

$0 = 17 + 0 - 0$
 $0 = 50 + 4 - 2 \cdot 0$

$$\sqrt{x+3} = a \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{7-x} = b \quad b \geq 0$$

$$a - b + 4 = 2ab$$

$$a - b - 2ab + 4 = 0$$

$$a(1-2b) + 4 - b = 0$$

$$a(1-2b) = b - 4$$

$$a = \frac{b-4}{1-2b}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} - 4$$

$$x+3 + 7-x - 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} = 16 + 4(x+3)(7-x)$$

$$16 - 16\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$$

$$10 - 2\sqrt{\dots} = 16 + 4(21 + 4x - x^2)$$

$$-16\sqrt{\dots}$$

$$14\sqrt{\dots} = 86 + 84 + 16x - 4x^2$$

$$-7\sqrt{\dots} = 3 + 42 + 8x - 2x^2$$

$$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 4x - 21 + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 16x - 84 + 1 = 0$$

$$4x^2 - 16x - 83 = 0$$

$$-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6 + 4(x+3)(7-x)$$

$$-16(x+3)(7-x)$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6 + 4(x+3)(7-x)$$

$$D = 16^2 + 4 \cdot 834 = 256 + \sqrt{(x+3)(7-x)} = t \quad t \geq 0$$

$$\begin{matrix} 4 \times 2 = 8 \\ 4 \times 6 = 24 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 96 \\ 16 \\ 256 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 83 \\ 498 \\ 88 \\ 1928 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83 \\ 6 \\ 18 \\ 48 \\ 498 \end{array}$$

$$+ 256$$

$$\frac{658}{914}$$

$$\frac{31}{31}$$

$$\frac{93}{961}$$

$$16 + \sqrt{914}$$

$$\frac{8 \sqrt{914}}{8}$$

$$= 2 \pm \frac{\sqrt{914}}{8}$$

$$7t = 3 + 2t^2$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \quad D = 49 - 24 = 25$$

$$t = \frac{7+5}{4} = \frac{6}{2} = 3$$

$$t = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2 + \frac{30}{8} > 5$$

$$2 - \frac{30}{8} < 5$$

$$(x+3)(7-x) = 9$$

$$-x^2 + 4x + 21 = 9 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\frac{914}{2} = 457$$

$$\frac{16}{2} = 8$$

$$D = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$x = \frac{4-8}{2} = -2 \text{ n.y.}$$

①/3

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{7-x} - 4$$

$$x+3 \geq 7-x$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

$$+4 = 2\sqrt{7-x}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} \geq 0 \quad \sqrt{4} - \sqrt{8} + 4$$

$$x+3 + 7-x - 2\sqrt{21+4x-x^2} \geq 16$$

$$-2\sqrt{21+4x-x^2} \geq 16$$

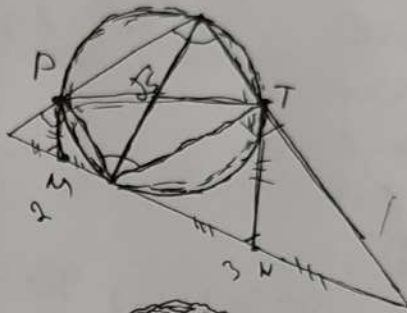
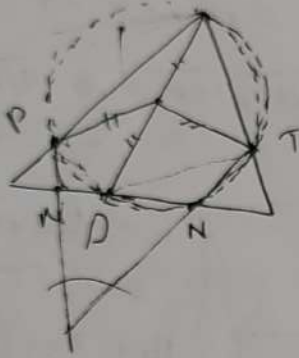
$$\sqrt{21+4x-x^2} \leq -8$$

1.

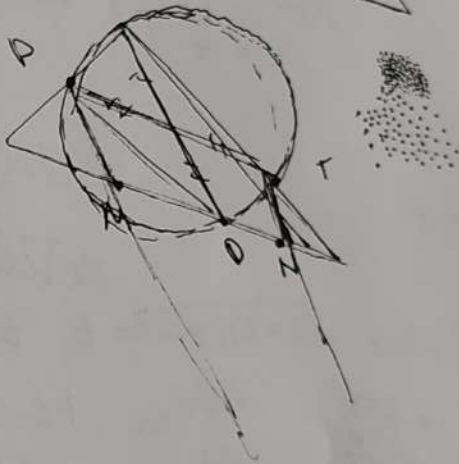
задача 1

Зусробику

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$
Зусробику



✓
✓



2/3

Часть 2

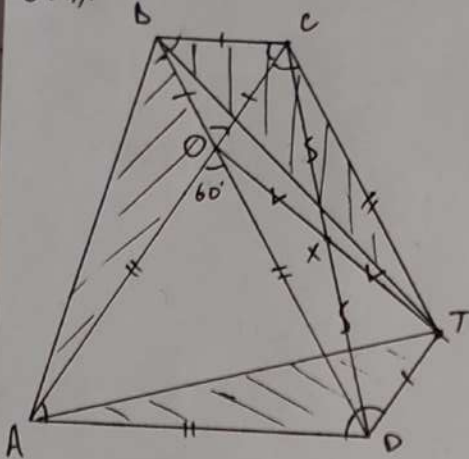
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007268**

ID профиля: **283077**

Вариант 10

6.4.



a) Т симметрична O относительно X - середины CD

$$\begin{matrix} CX = XO \\ OX = XT \end{matrix} \Rightarrow OETD \text{ - паралл.}$$

(диагонали пересеклись в своей середине)

$$OETD \text{ - паралл.} \Rightarrow \begin{cases} CT \parallel OD & (CT \parallel BD) \\ OC \parallel DT & (CA \parallel DT) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} CT \parallel OD \\ CO \text{ - секущ.} \end{matrix} \Rightarrow \angle TCO = \angle POA = 60^\circ$$

$$OETD \text{ - паралл.} \Rightarrow \begin{cases} \angle ODT = \angle OET = 60^\circ \\ \angle COD = 180^\circ - \angle OET = 120^\circ \end{cases}$$

$$\angle AOB = \angle DOC = 120^\circ \text{ или вертикальные}$$

$$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

$$OCTD \text{ - паралл.} \Rightarrow \begin{cases} DT = OC = OB = BC \\ CT = OD = OA = AD \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta BCT = \Delta TDA = \Delta BOA$
по двум сторонам
и углу между ними

$$\Delta BCT = \Delta TDA = \Delta BOA \Rightarrow AB = BT = AT$$

ΔABT - равнобедренный

2ТГ

б) $\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трапеция

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h$$

$$h = h_{BCO} + h_{AOD} = BC \sin 60^\circ + AD \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (BC+AD)$$

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (BC+AD)^2$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$$

по т. косинусов

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 + 2BO \cdot AO \cdot \cos 120^\circ$$

$$AB^2 = BC^2 + AD^2 + 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$$

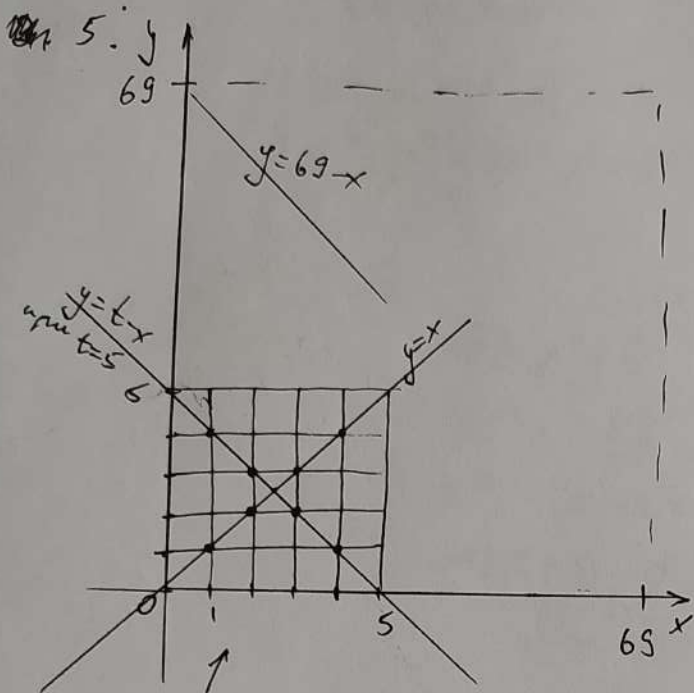
$$AB^2 = BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD)}{\frac{\sqrt{3}}{4} (BC+AD)^2} =$$

$$= \frac{BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD}{(BC+AD)^2} = \frac{2^2 + 7^2 + 2 \cdot 7}{(2+7)^2} = \frac{4+49+14}{9^2} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Исходник



Например для $t=5$
8 узлов

$t=69$
рассмотрим для любого t
квадрат $(0;0), (0;t), (t;t), (t;0)$

выбори квадрата стороной t
 $(t-1)^2$ узлов (без грани квадрата)
границы $y=x$ и $y=t-x$
пересекают по $t-1$ узлов
на границе
если t -четное, то 1 узел совпадает
т.к. в угол $t=69$ -имеющее
будем рассматривать t -нечетное
тогда $y=x$ и $y=t-x$ пересекаются
не в узле сетки

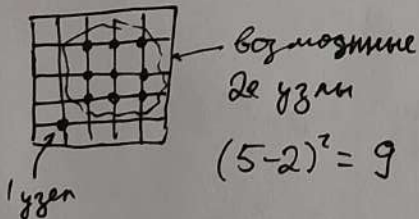
Всего $2(t-1)$ вариантов выбора
первого узла для t -нечетного

Выбираем второй узел: нельзя выбрать его из той же
"стороны" или "сообща" сетки, т.к. получится противоречие
условию (сообща и стороны всегда параллельны осям координат)

из $(t-1)^2$ мы не можем выбрать 1 сторону - $(t-1)$ узлов
и 1 сообщу без одного угла - $(t-2)$ узлов
(вместо него выкинутую "сторону")

Вариантов выбора: $(t-1)^2 - (t-1) - (t-2) = t^2 + 1 - 2t - t + 1 - t + 2 =$
 $= t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

Например для $t=5$



Всего вариантов выбора $2 \times$ узлов:

$$2(t-1)(t-2)^2$$

для $t=69$:

$$2 \cdot 68 \cdot 67^2 = 305252 \cdot 2 = 610504$$

67	4489
67	68
469	35912
402	26934
489	305252

Ответ: 610504

2 / 3

Задача

$$4. \quad \begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 & | \cdot 5 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{30}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \\ x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31$$

$$x^2+y^2 = t \quad t \geq 0$$

$$t^2 - \frac{30}{t} = 31$$

$$t^3 - 30 - 31t = 0$$

$$-1 + 30 + 31 = 0$$

$$31 - 31 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 30 - 31t & t+1 \\ \hline -t^3 + t^2 & \\ \hline -t^2 - 31t & \\ \hline -t^2 - t & \\ \hline -30t - 30 & \\ \hline -30t - 30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^2 - t - 30 = 0$$

$$t = -1 \text{ - н.у.}$$

$$t = 6 \quad t = -5 \text{ - н.у.}$$

↓

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\frac{6}{6} + x^2y^2 = 10$$

$$x^2y^2 = 9$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

$$x^2 = a \quad y^2 = b$$

$$a \geq 0 \quad b \geq 0$$

$$\begin{cases} ab = 9 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = b = 3$$

$$x^2 = y^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad y = \pm\sqrt{3}$$

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

3/3

Задание

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} \frac{42}{x^2+y^2} + 7x^2y^2 = 70 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$~~

$$\begin{array}{r} t^3 - 31t - 30 \quad | \quad t+1 \\ t^3 + t^2 \\ \hline -t^2 - 31t \\ -t^2 - t \\ \hline -30t - 30 \\ -30t - 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{42}{x^2+y^2} + 7x^2y^2 &= 70 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 &= 81 \\ x^4+y^4 - \frac{42}{x^2+y^2} &= 11 \\ (x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} &= 31 \\ t^2 - \frac{30}{t} &= 31 \quad t = x^2+y^2 \quad t \geq 0 \\ t^3 - 30 &= 31t \\ t^3 - 31t - 30 &= 0 \\ -1 + 31 - 30 &= 0 \quad \text{27000-} \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2 - t - 30 &= 0 \\ D &= 1 + 120 = 121 \\ t &= \frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ t &= \frac{1-11}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= -1 \\ x^2+y^2 &= -5 \end{aligned}$$

$$x^2+y^2 = 6$$

$$x^2 = a \quad y^2 = b$$

$$\begin{cases} a+b=6 \\ ab=9 \end{cases}$$

$$a=b=3$$

$$x^2=y^2=3$$

$$x=y = \pm\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}; \sqrt{3}) \quad \text{и} \quad (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$$

~~$$a+b=6$$~~

$$a(b-a) = 9$$

$$6a - a^2 = 9$$

$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

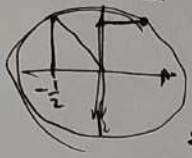
$$D = 36 - 36 = 0 \quad a = \frac{+6}{2} = 3$$

$$x^2y^2 = 9$$

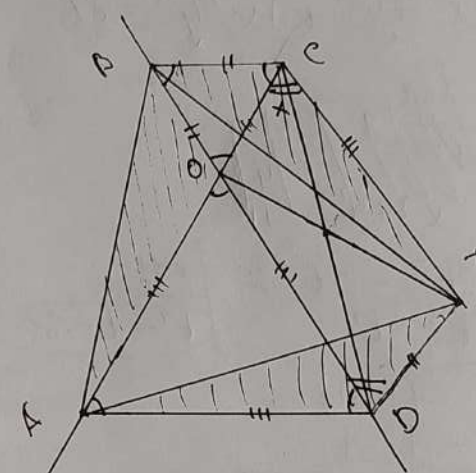
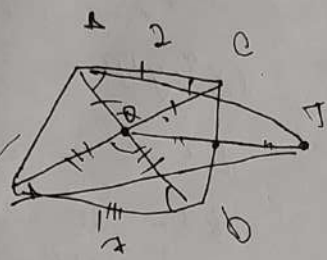
$$2/2$$

$5+6+6=5+12=17$
 $5+6+7=10+7=17$
 $17+17=34$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 60$



$4+25+20$
 $24+25=49$
 $2^2+5^2+2 \cdot 5$
 $29+10=39$



$a \sin \alpha$

$\frac{1}{2} a \sin \alpha$



$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

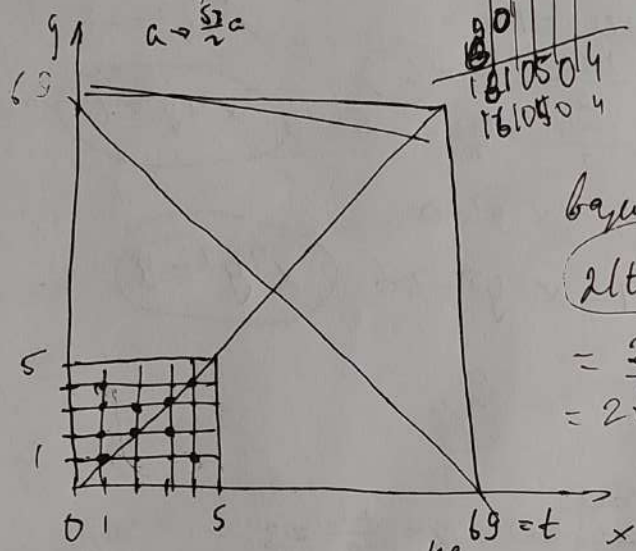
$a = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

305252
 104
 104
 104
 1610404

10504

$60+x = 120-x$

$2x = 120 \quad x = 60$



баъмаиш

$2(t-1)(t-2)^2 = (2t-2)(t^2+4-4t) =$
 $= 2t^3 + 8t - 8t^2 - 2t^2 - 8 + 8t =$
 $= 2t^3 - 10t^2 + 16t - 8 = 2(t^3 - 5t^2 + 8t - 4) =$
 $2(t(t^2 - 5t + 8) - 4) =$
 $2(t(t(t-5) + 8) - 4)$

$2 \cdot (69-1)(69-2)^2 = \frac{49}{18} \cdot \frac{67}{67} \cdot \frac{14}{81}$
 $= 2 \cdot 68 \cdot 67^2$

$2(t-1)$ гае 1 ығна

$ығна (t-1)^2$

небуға на $2(t-2)+1 = 2t-3$

$(t-1)^2 - 2t + 3 = t^2 + 1 - 2t - 2t + 3 =$
 $= t^2 + 4 - 4t =$
 $= (t-2)^2$

$2(t-1)$ бап. гае 1 ығна

$(t-2)^2$ бап. гае 2 ығна

$(\frac{1}{2})^2$

$67 \cdot 67 = 4489$
 $49 \cdot 36 = 1764$
 $42 \cdot 36 = 1512$
 $402 \cdot 36 = 14472$
 $4489 \cdot 36 = 161604$
 $4489 \cdot 68 = 305252$
 $4489 \cdot 72 = 323208$
 $4489 \cdot 54 = 242406$

ығна:

504