Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

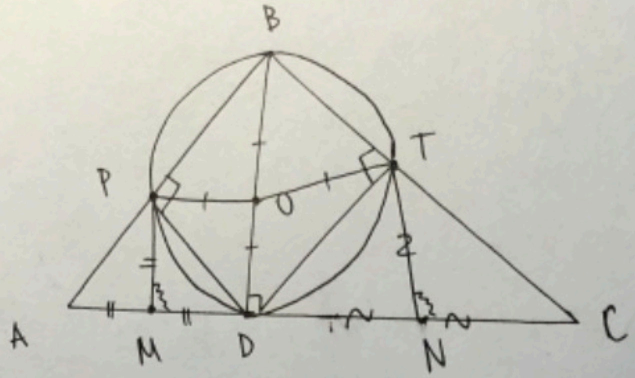
Шифр: **211007251**

ID профиля: **885524**

Вариант 10

Чистовик

№1 1)



$\angle BTD = 90^\circ$ (опирается на диаметр) $\Rightarrow \angle DTC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle DTC$ – п/у

$\angle BPD = 90^\circ$ (опир. на диаметр) $\Rightarrow \angle APD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle APD$ – п/у

PM, TN – медианы в п/у $\triangle \overset{\text{св-во}}{\Rightarrow}$ $PM = \frac{1}{2}AD = MD = AM = x$

$TN = \frac{1}{2}DC = DN = NC = y$

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ (как соотв. углы при $PM \parallel TN$ и сек. AC)

$\triangle PMD \sim \triangle TNC$ (по двум сторонам и углу между ними: $\frac{PM}{TN} = \frac{MD}{NC} = \frac{x}{y}$; $\angle PMD = \angle TNC$)

$\Rightarrow \angle C = \angle PDA$

$\angle PDA = \frac{1}{2} \smile PD$ (угол между кас. и секущей) ; но $\angle ABD = \frac{1}{2} PD \Rightarrow \angle PDA = \angle ABD = \angle C$

Аналогично: $\triangle APM \sim \triangle DTN \Rightarrow \angle A = \angle TDN = \angle CBD$

т.о. $\angle B = \angle A + \angle C$

но $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A + 2\angle C = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A + \angle C = 90^\circ = \angle B$

т.о. $\angle ABC = 90^\circ$

2) $MP = 1$; $NT = \frac{3}{2}$; $BD = \sqrt{5}$ Найти: S_{ABC} – ?

AC касается окр. в (·)$D \overset{\text{св-во кас.}}{\Rightarrow}$ ~~AC ⊥ ка~~ $OD \perp AC \Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow BD$ – высота $\triangle ABC$

Из ранее доказ.: $AM = MD = PM = 1 \Rightarrow AD = 2 \cdot 1 = 2$

$DN = NC = TN = \frac{3}{2} \Rightarrow DC = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ | $\Rightarrow AC = AD + DC = 2 + 3 = 5$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{высота}}{BD} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$; Ответ: 1) $\angle ABC = 90^\circ$; 2) $S_{ABC} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

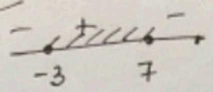
Чистовик

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} \Leftrightarrow$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 21+4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ x \in [-3; 7] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 7]$

$(3+x)(7-x)$



$$\Leftrightarrow \cancel{x}+3+7-\cancel{x} - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(21+4x-x^2) + 16 - 16\underbrace{\sqrt{21+4x-x^2}}_{=\sqrt{(x+3)(7-x)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + 6 \Leftrightarrow$$

введем замену: $(x+3)(7-x) = t$, $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{t} = 4t+6 \Leftrightarrow 7\sqrt{t} = \underbrace{2t+3}_{\geq 0} \Leftrightarrow 49t = 4t^2+12t+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 37t + 9 = 0 \Leftrightarrow D = 37^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1369 - 144 = 1225 = 35^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{37+35}{8} \\ t = \frac{37-35}{8} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

обратная замена: $\left[\begin{array}{l} (x+3)(7-x) = 9 \\ (x+3)(7-x) = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21+4x-x^2 = 9 \\ 84+16x-4x^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\frac{D}{4} = 4+12 = 16$

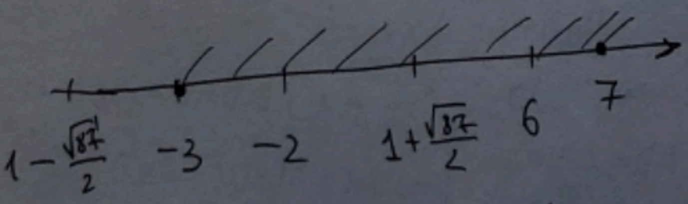
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-12 = 0 \\ 4x^2-16x-83 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+4 \\ x = 2-4 \\ x = \frac{4+2\sqrt{87}}{4} \\ x = \frac{4-2\sqrt{87}}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \\ x = 1+\frac{\sqrt{87}}{2} \\ x = 1-\frac{\sqrt{87}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$\frac{D}{4} = 16 + 4 \cdot 83 = 348 = 4 \cdot 87$

о<) $1+\frac{\sqrt{87}}{2} < 7 \Leftrightarrow \sqrt{87} < 12 \Leftrightarrow 87 < 144$ - верно

(1>) $1-\frac{\sqrt{87}}{2} < -3 \Leftrightarrow \sqrt{87} > 8 \Leftrightarrow 87 > 64$ - верно

на ОДЗ: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \\ x = 1+\frac{\sqrt{87}}{2} \end{array} \right.$



Ответ: $\left\{ 6; -2; 1+\frac{\sqrt{87}}{2} \right\}$

Чистовик

№3

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$ — A

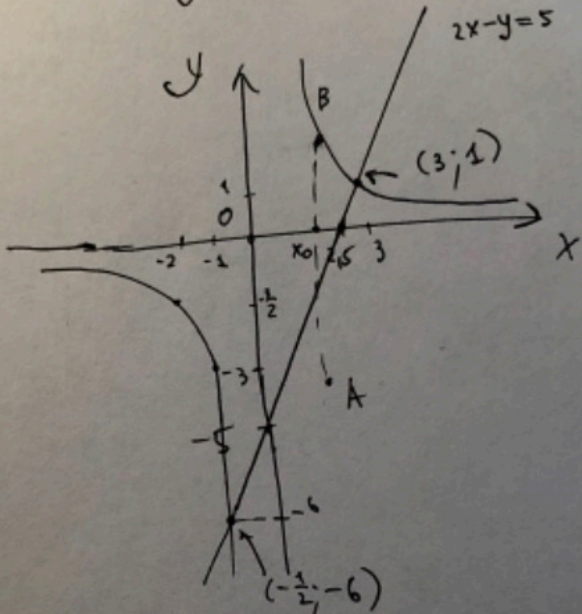
$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow$ — парабола с вершиной в (.) B

~~при $a \neq 0$~~

$a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

вершина: $x_0 = \frac{2a}{2} = a$; $y_0 = a^2 - 2a\cdot a + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

$\boxed{B\left(a; \frac{3}{a}\right)}$ — $y = \frac{3}{x}$



$\cancel{x_0 = a}$

$\cancel{y_B = \frac{3}{a}}$

A: $\cancel{5a^2 - 4ay + 8a^2 - 4ay + y^2 + 12a^2 = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{y^2 - 8ay + 25a^2 = 0} \Leftrightarrow y \in \varnothing$

$\cancel{\frac{D}{4} = 16a^2 - 25a^2 < 0}$

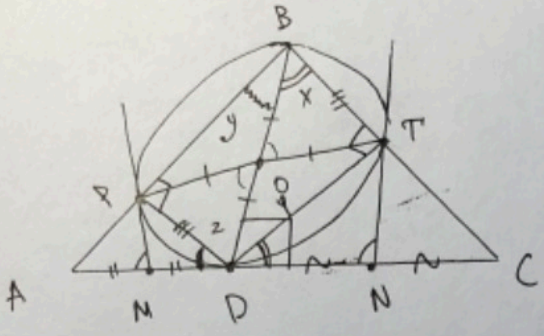
$\cancel{y_0 = \frac{3}{a}}$

$\cancel{x_B = a}$

A: $\cancel{5a^2 - \frac{4a\cdot 3}{a} + 8x^2 - \frac{4x\cdot 3}{a} + \frac{9}{a^2} + 12ax = 0} \Leftrightarrow \cancel{8x^2 + 12ax + \frac{12}{a}x + 5a^2 + \frac{9}{a^2} - 12 = 0}$

③ Черновик

$\frac{PT}{\sin\angle B} = 2R$



PM || TN

Найти: 1) ∠ABC-?

$z+y=90^\circ$

~~$\varphi+x=90^\circ$~~

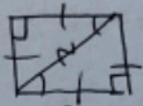
~~$\varphi+x$~~

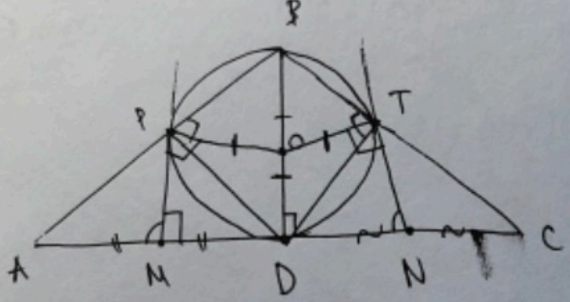
△POD = △BOT (по 2 сл. изм.) ⇒

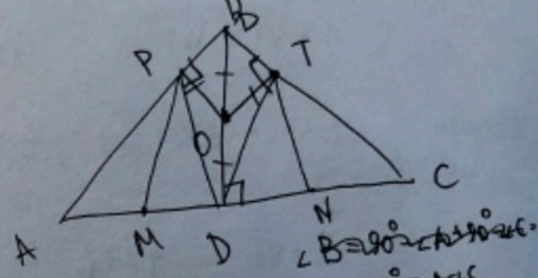
⇒ PD = BT

анал. PB = DT | ⇒

⇒ PBTD - прямоуг.







~~∠B=90°-∠A+90°-∠C~~

$= 180^\circ - \angle A - \angle C$

△APM = △TNC ⇒

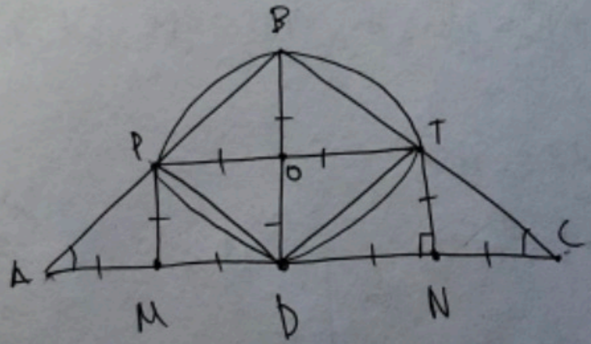
⇒ ∠A = ∠C ⇒ △ABC - р/б

~~BD~~

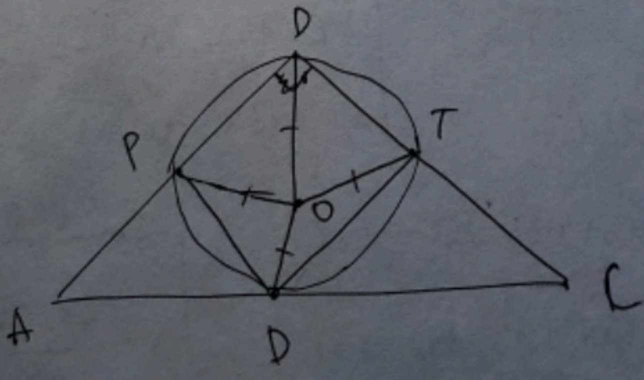
$PT = \frac{1}{2} AC$

△BDC - р/б ⇒ ∠DBC = ∠C = x

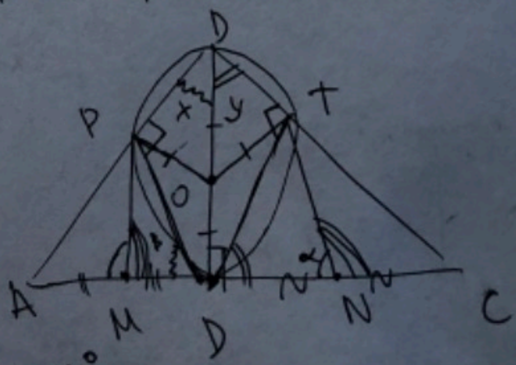
ан. ∠ABD = ∠A = x



$4x = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ$



OP = OD = OT = OD = R



$\alpha+\beta=180^\circ$

$\angle APD = 90^\circ = \angle APM + \angle MPD = 180^\circ - \alpha - \angle A + 180^\circ - \beta - x = 360^\circ \underbrace{- \alpha - \beta}_{-180^\circ} - \angle A - x =$

$= 180^\circ - \angle A - \angle x = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A + \angle x = 90^\circ$

Черновик

(2)

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2} \Leftrightarrow$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ 21+4x-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \\ x\in[-3;7] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;7]$

$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=7 \end{array}\right.$

$-3 \quad 7$

$$\Leftrightarrow \cancel{x}+3+7-\cancel{x}-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=4(x+3)(7-x)+16-16\sqrt{(x+3)(7-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{(x+3)(7-x)}=4(x+3)(7-x)+6 \Leftrightarrow$$

Введем замену: $t=(x+3)(7-x)$, $t\geq 0$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{t}=4t+6 \Leftrightarrow 7\sqrt{t}=2t+3 \Leftrightarrow 49t=4t^2+12t+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2-37t+9=0 \Leftrightarrow$$

$$D=37^2-4\cdot4\cdot9=1369-144=1225=35^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{37+35}{8} \\ t=\frac{37-35}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{72}{8} \\ t=\frac{2}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

обр. замена: $\left[\begin{array}{l} \cancel{(x+3)(7-x)=\frac{21}{4}} \\ (x+3)(7-x)=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{84+16x-4x^2=21} \\ 84+16x-4x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{4x^2-16x-63=0} \quad \cancel{\frac{D}{4}=16+4\cdot63=268=4\cdot67} \\ 4x^2-16x-83=0 \quad \frac{D}{4}=16+4\cdot83=348=4\cdot87 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{x=\frac{4\pm2\sqrt{67}}{4}} \\ x=\frac{4\pm2\sqrt{87}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{x=1\pm\frac{\sqrt{67}}{2}} \\ x=1\pm\frac{\sqrt{87}}{2} \end{array}\right.$$

$1-\frac{\sqrt{87}}{2} \quad 1-\frac{\sqrt{67}}{2} \quad -3 \quad 0 \quad 1+\frac{\sqrt{67}}{2} \quad 1+\frac{\sqrt{87}}{2} \quad 7$

Ответ: $\left\{1-\frac{\sqrt{87}}{2};\ 1+\frac{\sqrt{87}}{2}\right\}$

$1-\frac{\sqrt{67}}{2} < -3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{67}}{2} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{67} > 8 \Leftrightarrow 67 > 64$ $\quad 1+\frac{\sqrt{87}}{2} < 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{87}}{2} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{87} < 12 \Leftrightarrow 87 < 144$

$1-\frac{\sqrt{87}}{2} < 1-\frac{\sqrt{67}}{2} < -3$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \\ \times 4 \\ \hline 252 \\ +16 \\ \hline 268 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83 \\ \times 4 \\ \hline 332 \\ +16 \\ \hline 348 \end{array}$$

$268 : 2 = 134$, $134 : 2 = 67$; $348 : 2 = 174$, $174 : 2 = 87$; $87 : 3 = 29$

$$\begin{array}{r} 37 \\ +35 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83 \\ \times 4 \\ \hline 332 \\ +16 \\ \hline 348 \end{array} \quad 348 : 4 = 87$$

(1)

211007251 (U885524 M1275406)

~~черновик~~
$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 \Leftrightarrow$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$A(x;y)$ черновик

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

– парабола с верш. в (.) B

$\Leftrightarrow$ $8x^2 - \cancel{4xy}\,y^2$

$8x^2+12ax = (2\sqrt{2}x)^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\cdot 3}{2}\cdot a\,x + \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 a^2 =$

$= 8x^2+12ax+\dfrac{9}{2}a^2 = \left(2\sqrt{2}x+\dfrac{3}{\sqrt{2}}a\right)^2$ $\quad \dfrac{9}{2}=4\frac{1}{2}$

$y^2-4ay = y^2 - 2\cdot y\cdot 2a + 4a^2 = (y-2a)^2$

$(y-2a)^2+\left(2\sqrt{2}x+\dfrac{3}{\sqrt{2}}a\right)^2 - 3\frac{1}{2}a^2 - 4xy = 0$

~~$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$~~ $\quad ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 \Leftrightarrow$

~~$x_0=\dfrac{2a^2}{2a}=a$~~ $\quad \Leftrightarrow y = x^2-2ax+a^2+\dfrac{3}{a}$

~~$y_0=a^3-2a^3-\ldots$~~ $\quad x_0=\dfrac{2a}{2}=a$

~~$x=-a$~~

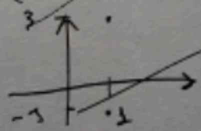
~~$5a^2-4ay+8a^2+4ay+y^2+12a^2=0$~~ $\Leftrightarrow$ $\quad y_0 = a^2-2a^2+a^2+\dfrac{3}{a} = \dfrac{3}{a}$

~~$\Leftrightarrow y^2+a^2=0 \Leftrightarrow y=0=a$~~ $\quad \boxed{B\left(a;\dfrac{3}{a}\right)}$

$8x^2-4xy+y^2 = (2\sqrt{2}x)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot y+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}y^2 = \left(2\sqrt{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2+\dfrac{1}{2}y^2$

~~$(x-y)^2=4$ $\quad x=1$ $\quad \left[\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-y=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow y=2-x$~~

~~$\left[\begin{array}{l} 1-y=2 \\ 1-y=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow y=-1$, $y=3$~~



~~по другому~~

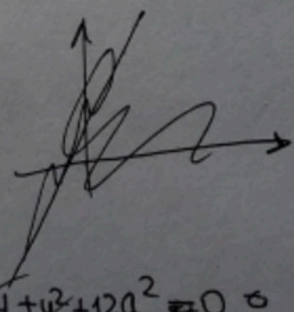
$y=\dfrac{3}{a}$ $\quad y=2x-5$ $\quad y=2x-5$

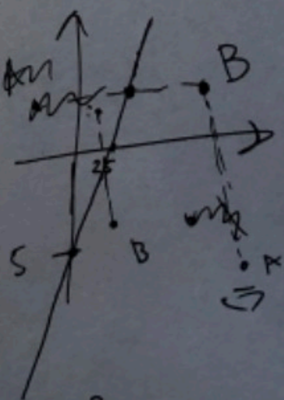
$2x-5=\dfrac{3}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow$

$D=25+24=49=7^2$

$x=\dfrac{5+7}{4}=3$





$y<2x-5 \Leftrightarrow$ $\quad x=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2}$

$5a^2-4ay+8a^2-4ay+y^2+12a^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{a}<2a-5$

$\Leftrightarrow y^2-8ay+25a^2=0 \Leftrightarrow y=\ldots$

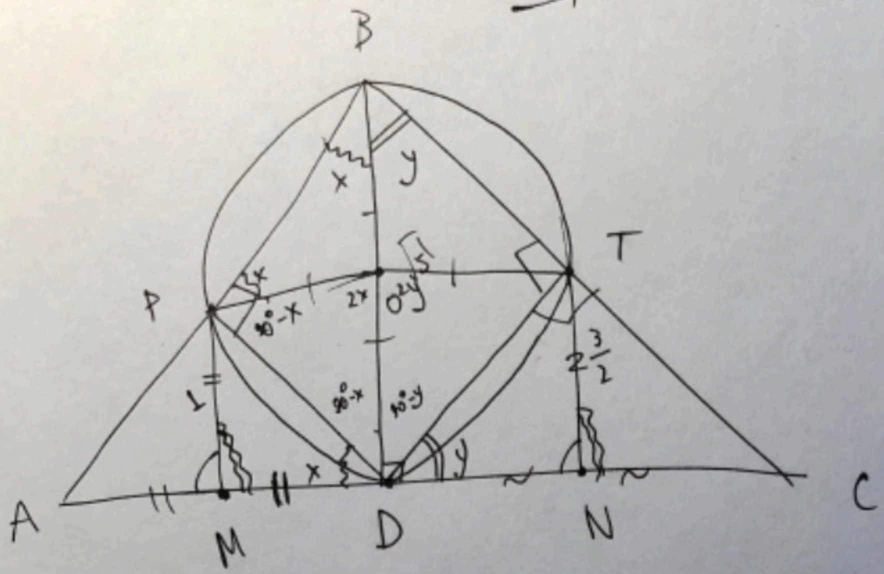
$y=\ldots$

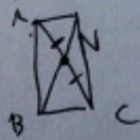
$y=\dfrac{3}{x}$

$3\,\dfrac{a}{3}$ $\quad \dfrac{3}{y}$

Черновик

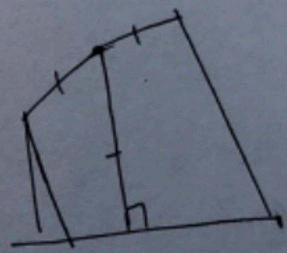
$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$





$180^\circ - \angle A - \angle APM = 180^\circ - \angle A - (90^\circ - \angle MPD)$

$\triangle PMD \sim \triangle NTC \Rightarrow \angle C = \angle X$



$\angle B = \angle A + \angle C$

$2\angle A + 2\angle C = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A + \angle C$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AD$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007251**

ID профиля: **885524**

Вариант 10

Чистовик

№ 4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

введем замену: $t = x^2 \cdot y^2$; $z = x^2+y^2$, $t \geq 0$, $z > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{z} + t = 10 \\ z^2+5t=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 - \dfrac{6}{z} \\ z^2 + 50 - \dfrac{30}{z} = 81 \quad (1) \end{cases}$$

$D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$

$(1) \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^3 - 31z - 30 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-z-30)=0 \Leftrightarrow$

по схеме Горнера:

	1	0	−31	−30
−1	1	−1	−30	0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z = \dfrac{1+11}{2} \\ z = \dfrac{1-11}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 < 0 \\ z = 6 \\ z = -5 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$\overset{z>0}{\Leftrightarrow} z = 6$

~~Введем обратную замену:~~

т.е. система $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 - \dfrac{6}{z} \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ z = 6 \end{cases}$

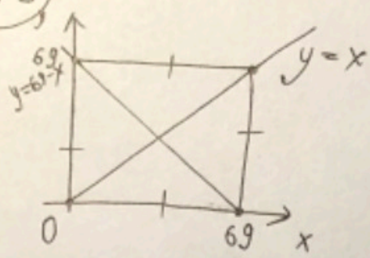
введем обр. замену: $\begin{cases} x^2 \cdot y^2 = 9 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6-y^2 \\ y^2(6-y^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 6y^2+9=0 \\ x^2 = 6-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2-3)=0 \\ x^2 = 6-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ x^2 = 6-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

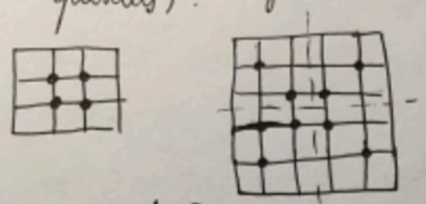
Чистовик

№5



1) Всего узлов на прямых $y=x$ или $y=69-x$ в области квадрата (без границ): для нечетных n: $4\cdot\frac{n-1}{2}=2n-2$

$n=69$: $2\cdot69-2=138-2=136$



Т.е. первый узел можно выбрать 136 способами

2) Второй узел выбираем из всех узлов внутр. части квадрата, исключая узлы, лежащие на прямых, параллельных осям (в т.ч. первый узел)

Всего узлов во внутр. области квадрата (без границ):

$(n-1)^2=(69-1)^2=68^2=4624$

Узлы, лежащие на 2 линиях: 1-ая $\parallel OX$; 2-ая $\parallel OY$:

$2(n-1)-1=2(69-1)-1=2\cdot68-1=135$

т.к. один узел будет принадл. 2 прямым

Т.о. на второй узел можно выбрать: $4624-135=4489$

3) Пара узлов неупорядоченная =>

всего вариантов: $\frac{\cancel{136}^{68}\cdot4489}{\cancel{2}}=305252$

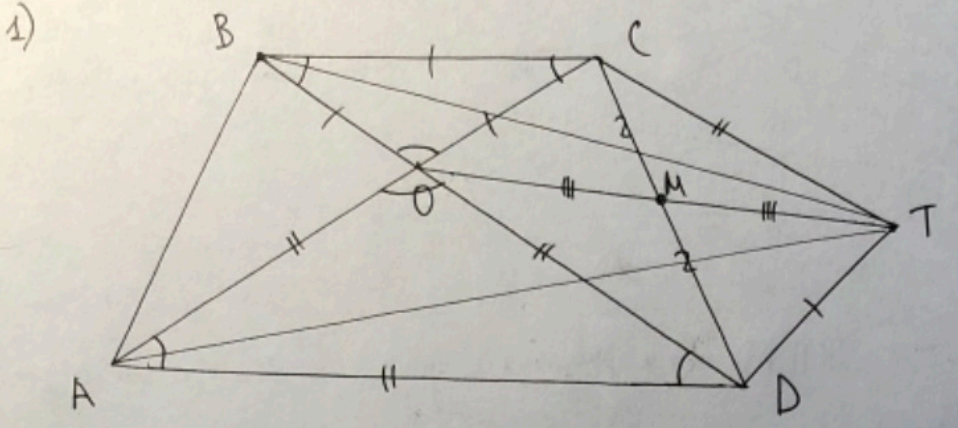
Ответ: 305252

Чистовик

№6

Дано:
ABCD – вып. 4-х уг.
$AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – прав.
$\exists$ M – сер CD
T симметр. O от-но M $\Rightarrow$
$\Rightarrow OM = MT$
Док-ть:
$\triangle ABT$ – правил.

1)



$\triangle BOC$ – р/с (прав.) $\Rightarrow \angle BOC = \angle OCB = \angle CBO = 60^\circ$ и $BO = OC = BC = x$

$\triangle AOD$ – р/с (прав.) $\Rightarrow \angle AOD = \angle ODA = \angle DAO = 60^\circ$ и $AO = OD = AD = y$

$\triangle COM = \triangle TMD$ (по двум. стор. и углу между ними: $OM = MT$; $CM = MD$; $\angle CMO = \angle TMD$ (вертик.)

$\Rightarrow CO = TD = x$

аналогично: $\triangle OMD = \triangle CMT \Rightarrow CT = OD = y$

Т.О. $CO = TD$; $OD = CT \Rightarrow$ CODT – параллелограмм (по призн.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle COD = \angle CTD$ (по св-ву); $\angle OCT = \angle ODT$ (по св-ву)

Но $\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ $\Rightarrow \angle COT = \angle CTD = 120^\circ$

$\underbrace{\angle COT}_{120^\circ} + \angle ODT + \underbrace{\angle DTC}_{120^\circ} + \angle OCT = 360^\circ$ (сумма углов 4-х угольника) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODT + \angle OCT = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$

$\triangle ADT = \triangle BCT = \triangle ABO$ (по двум сторонам и углу между ними):

$TD = BC = BO = x$

$AD = CT = AO = y$

и $\angle ADT = \angle ADO + \angle BDT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ =$

$= \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ =$

$= \angle BOA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

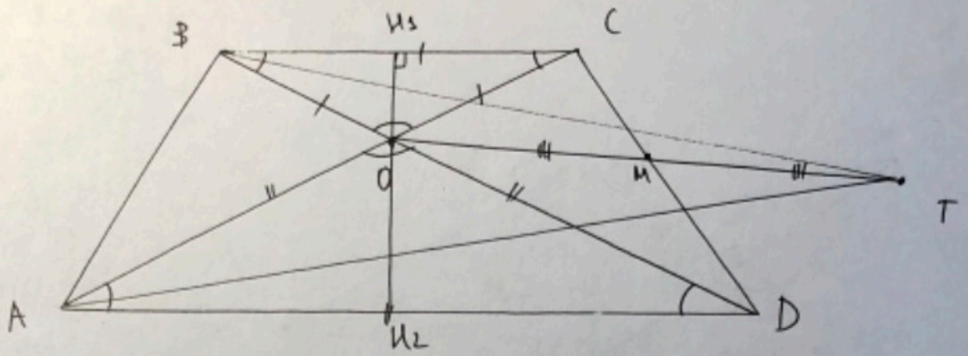
$\Rightarrow AB = BT = AT$ (как соотв. стороны в равных $\triangle$) $\Rightarrow$

$\overset{def}{\Rightarrow}$ $\triangle ABT$ – р/с ч.т.д.

№6 Чистовик

2)

Дано:
$BC=2$
$AD=7$
Найти:
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?



$\angle BCA=\angle CAD=60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$ (т.к. равны н/л углы при BC и AD и сек. AC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ – трапеция

(при этом $\triangle BAO = \triangle COD$ (по двум сторонам и углу между ними: $BO=OC=x$; $AO=OD=y$; $\angle BOA=\angle COD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD$ – р/б трапеция)

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot h$ – высота трапеции

Построим H_1H_2: $O\in H_1H_2$ & $H_1\in BC$ & $H_2\in AD$ & $H_1H_2 \perp BC$

т.к. $BC \parallel AD$, $BC \perp H_1H_2$ $\Rightarrow H_1H_2 \perp AD$ и H_1H_2 – и есть высота трапеции

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам: $\angle BCO=\angle OAD=\angle OBC=\angle ODA=60^\circ$)

OH_1 – высота $\triangle BOC$; OH_2 – высота $\triangle AOD$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OH_1}{OH_2}=\frac{BC}{AD}=\frac{2}{7}$

$\triangle BOC$ – р/с $\Rightarrow OH_1$ – высота, медиана $\Rightarrow OH_1 = OC\cdot \sin\underset{60^\circ}{\angle BCO} = BC\cdot\sin 60^\circ =$

$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \Rightarrow \quad OH_2=\frac{OH_1\cdot 7}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_1H_2=OH_1+OH_2=\sqrt{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}=$

$=\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot H_1H_2=\frac{1}{2}(2+7)\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}=\frac{81}{4}\sqrt{3}$

S_{ABT} – р/с (п.1) $\Rightarrow \angle ATB=60^\circ$

$\triangle ABO$: по т. косинусов: $AB^2=\sqrt{\underset{BC^2}{OB^2}+\underset{AD^2}{AO^2}-2\cdot\underset{BC}{OB}\cdot\underset{AD}{AO}\cdot\cos\underset{120^\circ}{\angle BOA}}=$

$=\sqrt{4+49-\cancel{2}\cdot 2\cdot 7\cdot(-\frac{1}{\cancel{2}})}=\sqrt{53+49}=\sqrt{102}$

4

Чистовик

продолжение № 6.2

$$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot \underset{=AT\cdot TB}{AB^2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{102}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \cancel{\frac{\sqrt{306}}{4}} = \cancel{\frac{\sqrt{9\cdot 34}}{4}} = \cancel{\frac{3\sqrt{34}}{4}} \quad \frac{51\sqrt{3}}{2}$$

$$\cancel{\text{Т.о.}\ \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{3\sqrt{34}\cdot 4}{4\cdot 81\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{34}}{27\sqrt{3}}}$$

$$\cancel{\text{Ответ: } \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{34}}{27\sqrt{3}}}$$

Т.о. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{51\sqrt{3}\cdot 4^2}{2\cdot 81\cdot\sqrt{3}} = \frac{102}{81} = \frac{34}{27}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{34}{27}$

Черновик

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$t = x^2y^2$; $z = x^2+y^2$, $t \geq 0$; $z > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{z} + t = 10 \\ z^2 + 5t = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 - \dfrac{6}{z} \\ z^2 + 50 - \dfrac{30}{z} = 81 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^3 - 31z - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

По схеме Горнера:

	1	0	−31	−30
−1	1	−1	−30	0

$D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^2 - z - 30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z = \dfrac{1+11}{2} \\ z = \dfrac{1-11}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 < 0 \\ z = 6 \\ z = -5 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Проверка: $z^3 - z^2 - 30z + z^2 - z - 30 = z^3 - 31z - 30$

$$\overset{z>0}{\Leftrightarrow} z = 6$$

т.о. система $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 - \dfrac{6}{z} \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ z = 6 \end{cases}$

Введем обр. замену:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 9 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{x^2 = 6 - y^2} \quad \alpha = x^2,\ \beta = y^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta = 9 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 - \beta \\ (6-\beta)\beta = 9 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow 6\beta - \beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 9 = 0 \Leftrightarrow (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 3 > 0$$

Черновик

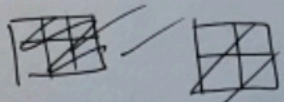
система $\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 6-\beta \\ \beta = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 3 \\ \beta = 3\end{cases}$

введем обр замену: $\begin{cases}x^2 = 3 \\ y^2 = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3}\end{cases}$

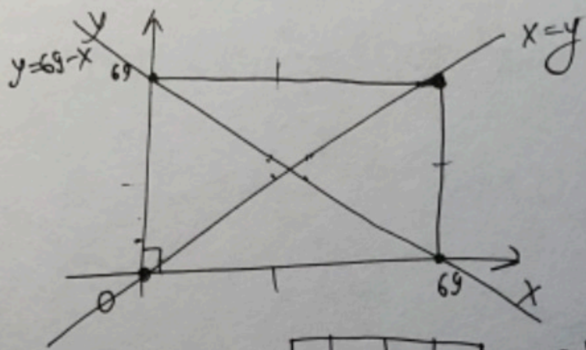
Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

проверка: $\frac{6}{3+3} + 3\cdot3 = 1+9 = 10$

$9+9+7\cdot3\cdot3 = 9\cdot9 = 81$ - верно



№5



1 2

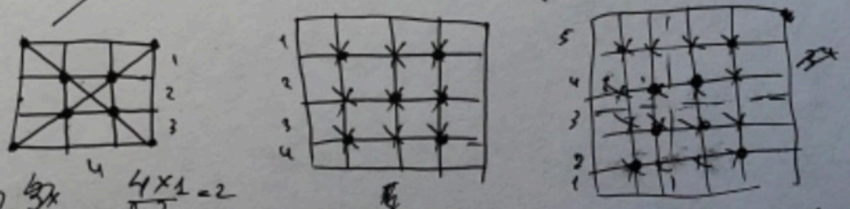
2 узла бу границ

хотя бы 1 лежал на $y=x$ или $y=69-x$

Но $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$

$69-1=68:2=34$

$69 \times 2 = 138$



для нечетных: $\frac{(n-1)}{2}\cdot 4 = 2n-2 =$
$= 10-2=8$
$6-2=4$

$\frac{4\times1}{2} = 2$

Всего узлов на прямых $y=x$ или $y=69-x$ 4

в области квадрата (без границ): $($~~$34\cdot4$~~$) =$

$34 \times 4 = 136$

$2\cdot69-2 = 138-2 = \boxed{136}$

Т.е. первый узел можно выбрать 136 способами

$68 \times 68 = 4624$ (544, 408)

Второй узел выбираем из всех узлов внут. части квадрата, (в т.ч. и 1 узел) исключая узлы, лежащие на прямых, паралл. осям

Всего узлов в квадрате (без границ): $(n-1)^2 = (69-1)^2 = 68^2 = 4624$

$4624 - 135 = 4489$

узлы, лежащие на линиях $\parallel$ осям: $2(n-1)-1 =$

$= 2(69-1)-1 = 2\cdot68-1 = 136-1 = \boxed{135}$

$68 \times 68 = 4624$; $68 \times 2 = 136$

Т.о. на второй узел можно выбрать: $4624-135=4489$

2

Таким образом, Черновик

всего вариантов: $\underbrace{136} \cdot \underbrace{4489}$

но пара неупорядоченная →

ответ: $\frac{136 \cdot 4489}{2} = \cancel{35912}$

$$\begin{array}{r} 4489 \\ \times\ 68 \\ \hline 35912 \end{array}$$

Ответ: ~~35912~~ 305252

$$\begin{array}{r} 4489 \\ \times\ 68 \\ \hline 35912 \\ 26934 \\ \hline 305252 \end{array}$$

$\frac{102\sqrt{3}}{4}=$

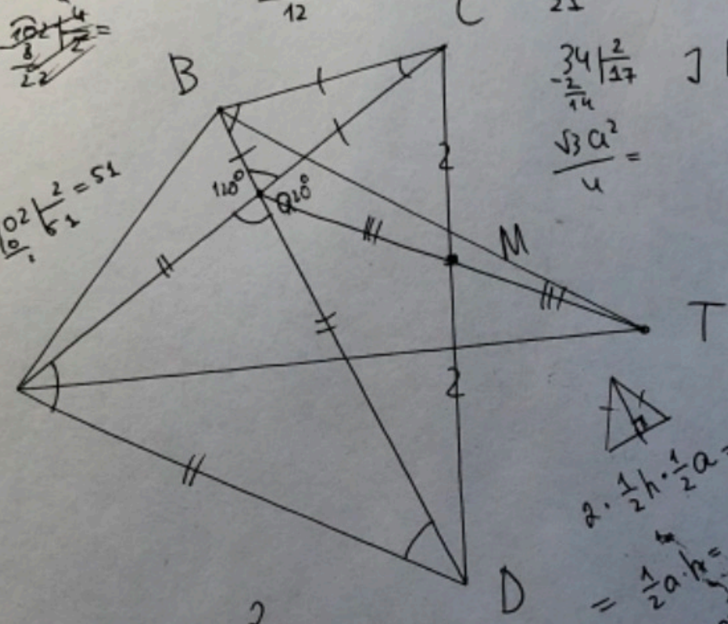
$\frac{102\sqrt{3}\cdot 4}{4\cdot 81\sqrt{3}} = \frac{102}{81} =$

№6

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 102 =$

ΔBOC, ΔAOD - прав.

$\cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$



∃ M - сер. CD

T - симметр. точке O отн-но M

OM = MT

1. (!) ABT - прав.

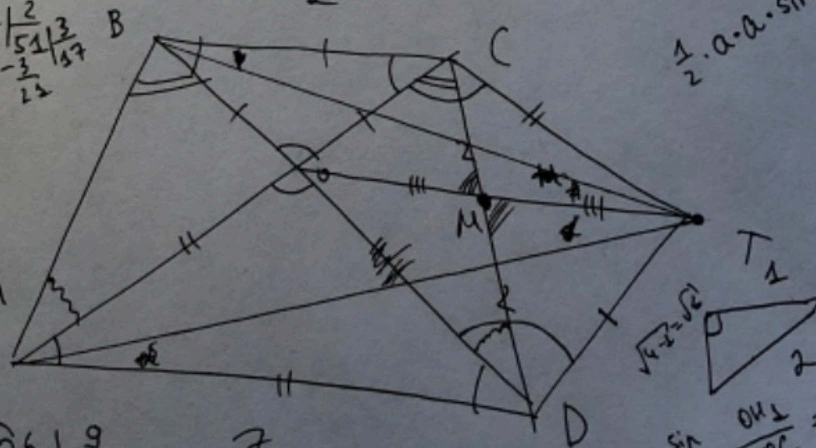
2. BC = 2, AD = 7

$\frac{\sqrt{3}a^2}{4} =$

$2 \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}a =$

$= \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?



BC ∥ AD; т.к. $\angle CAD = \angle ACB = 60^\circ$ (н/л при BC ∥ AD и сек. AC)

→ ABCD - трапеция

~~OT ∥ AD~~

~~OT ∥ BC~~

$\Delta ABO = \Delta COD \Rightarrow$

$\rightarrow AB = CD \Rightarrow$

правил. трапеция

$\sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

$\sin \frac{OH_1}{OC}$

$\Delta BCT = \Delta ADT \Rightarrow AT = BT = AB$

$= \Delta ABO$

$? = \sqrt{49 - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{4\cdot 49 - 49}{4}} =$

$? = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\begin{array}{r} 306 \\ -27 \\ \hline 36 \\ -36 \\ \hline 0 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 9 \\ \hline 34 \end{array}$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 2 \\ \hline 98 \\ +\ 4 \\ \hline 102 \end{array}$

$\begin{array}{r} 53 \\ +49 \\ \hline 102 \end{array}$