Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007211**

ID профиля: **890431**

Вариант 10

(2) Чистовик МАТЕМАТИКА 10кл

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

ОДЗ: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$

$\sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{-(x-7)(x+3)} = \sqrt{(7-x)(x+3)}$

$D = 16+84 = 100$

$x = \frac{-4 \pm 10}{-2}$; $x_1 = 7$, $x_2 = -3$

$-$ $\quad -3 \quad$ $+$ $\quad 7 \quad$ $-$ $\qquad x \in [-3;7]$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} - 4$$

$$(x+3) - 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} + (7-x) = 4(7-x)(x+3) - 16\sqrt{(7-x)(x+3)} + 16$$

$$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(7-x)(x+3) - 16\sqrt{(7-x)(x+3)} + 16$$

$$5 - \sqrt{(x+3)(7-x)} = 2(7-x)(x+3) - 8\sqrt{(7-x)(x+3)} + 8$$

$$5 + 7\sqrt{(7-x)(x+3)} = (14-2x)(x+3) + 8$$

$$7\sqrt{(7-x)(x+3)} = 3 + 14x - 2x^2 - 6x + 42$$

$$7\sqrt{(7-x)(x+3)} = -2x^2 + 8x + 45$$

лист 1

$D = 8^2 + 4\cdot 45 = 64 + 360 = 424$

$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{106}}{4}$ $\qquad x_1 = \frac{4+\sqrt{106}}{2}$

$x_2 = \frac{4-\sqrt{106}}{2}$

$$49(7-x)(x+3) = 4x^4 - 32x^3 - 116x^2 + 720x + 2025$$

$$(343-49x)(x+3) = 4x^4 - 32x^3 - 116x^2 + 720x + 2025.$$

$$343x - 49x^2 - 147x + 1029 = 4x^4 - 32x^3 - 116x^2 + 720x + 2025$$

$$196x - 49x^2 + 1029 = 4x^2 - 32x^3 + 116x^2 - 720x + 2025$$

$$-4x^4 + 32x^3 = 0$$

$$-524x + 67x^2 - 996 - 4x^4 + 32x^3 = 0$$

$$-4x^2 + 32x^3 + 67x^2 - 524x - 996 = 0$$

211007211 (U890431 M1275202)

$-4x^3\cdot(x+2)+40x^2\cdot(x+2)-13x(x+2)-498(x+2)=0$

Чистовик МАТЕМАТИКА 11кл

$-(x+2)\cdot(4x^3-40x^2+13x+498)=0$

$-(x+2)\cdot \cancel{\ldots}\cdot(x-6)\cdot(4x^2-16x-83)=0$

$x+2=0 \Rightarrow x_1=-2$ неуд ОДЗ $\quad x\in[-3;7]$

$x-6=0 \Rightarrow x_2=6$

$4x^2-16x-83=0 \Rightarrow D=16^2+2\cdot4\cdot83=256+1328=1584$

$x=\frac{16\pm\sqrt{16^2+2\cdot4\cdot83}}{2\cdot4}$ $\quad 1584=12\sqrt{11}$

$x_3=\frac{4+3\sqrt{11}}{2}$ - неуд ОДЗ $\quad x=\frac{4\pm3\sqrt{11}}{2}$ $\quad x=\frac{16\pm12\sqrt{11}}{8}$

2

$x_4=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

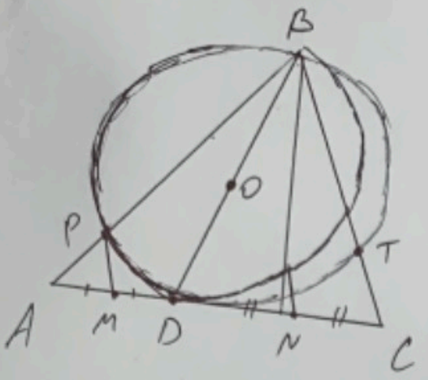
Ответ: $x_1=6$, $x_2=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

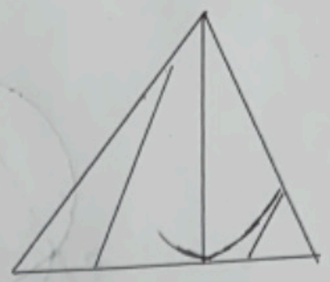
лист 2

211007211 (U890431 M1275202)

Черновик

Математика 10 класс





$+\frac{21}{21}$ $+\frac{42}{42}$ 84

$21-16-16$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$x+3\geqslant 0$

$7-x\geqslant 0$

$21+4x-x^2\geqslant 0$

$D=16+4\cdot 21=100$

$21+4\cdot 8-64$

$\cdot 10$

84

-19

65

$x\geqslant -3$

$x\leqslant 7$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm 10}{-2}$

$x_1=-3$

$x_2=7$

-3 7 x

$x\in[-3;7]$

$$(\sqrt{x+3}-(\sqrt{7-x}+4))^2=4(21+4x-x^2)$$

$$(x+3)-2(\sqrt{x+3})(\sqrt{7-x}+4)+(\sqrt{7-x}+4)^2=4\cdot(21+4x-x^2)$$

$$(x+3)-2(\sqrt{x+3})(\sqrt{7-x}+4)+(7-x)+8(\sqrt{7-x})+16=4\cdot(21+4x-x^2)$$

$$(x+3)-2(\sqrt{x+3})(\sqrt{7-x}+4)+(7-x)+8(\sqrt{7-x})+16=84+16x-4x^2$$

$$\cancel{x}+3-2(\sqrt{x+3})(\sqrt{7-x}+4)+7-\cancel{x}+8(\sqrt{7-x})+16=84+16x-4x^2$$

$$3-2(\sqrt{x+3})(\sqrt{7-x}+4)+8(\sqrt{7-x})+16=$$

$(7-x)(x+3)$

$\cancel{(x-7}$ $\cancel{7x-x^2+3x}$ $-1(x-7)(x+3)$

$(x$ $21-x^2-3x+7x$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} - 2\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3} = -4$

$x - y - 2xy = -4$

$2xy + y - x = 4$

$2xy + y = 4 + x$

$163 \mid 3$, 15, 13, 5

$489 \mid 3$, 3, 18, 18, 163

$16 + 14 = 28$, $28 + 14 = 42$

$55 \cdot 8 = 440$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$489 \mid 3$, 163

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} - 4$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 2(7-x)(x+3) - 16\sqrt{(7-x)(x+3)} + 16$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = (14-2x)(x+3) - 16\sqrt{(7-x)(x+3)} + 16$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 14x - 2x^2 - 6x + 42 + 16 - 16\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 8x - 2x^2 + 58 - 16\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 7x - 2x^2 + 55 - 14\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$0 =$

$-2x^2 + 7x + 55 = 0$

$2x^2 - 7x - 55 =$

$D = 49 + 8\cdot 55 = 489$

$8\cdot 55$

211007211 (U890431 M1275202)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007211**

ID профиля: **890431**

Вариант 10

Чистовик МАТЕМАТИКА 10кл

Задача 4

$$\begin{cases} \dfrac{b}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10, \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81; \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

Пусть $x^2y^2 = b$

$x^2+y^2 = a$

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 =$

$= a^2 - 2b$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} + b = 10, \\ a^2 - 2b + 7b = 81; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} + b = 10, \\ a^2 + 5b = 81; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - \dfrac{b}{a}, \\ a^2 + 50 - \dfrac{30}{a} = 81; \end{cases}$$

$a^2 - 31 - \dfrac{30}{a} = 0 \quad | \cdot a$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

	1	0	-31	-30
-1	1	-1	30	0

$\Rightarrow a = -1$

$a^2 - 1a - 30 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 30 = 121$

$a = \dfrac{1 \pm 11}{2} \quad a_2 = 6$

$a_3 = -5$

$a_1 = -1 \Rightarrow b_1 = 10 + 6 = 16$

$a_2 = -5 \Rightarrow b_2 = 10 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{56}{5}$

$a_3 = 6 \Rightarrow b_3 = 10 - 1 = 9$

ЧАСТЬ 2

лист 1

[redacted]

211007211 (U890431 M1275203)

$a=-5 \Rightarrow x^2+y^2=-5$
нет решений

$a=-1 \Rightarrow x^2+y^2=-1$
нет решений

$a=6 \Rightarrow x^2+y^2=6$

$b=9 \Rightarrow x^2\cdot y^2=9$

$$\begin{cases} x^2\cdot y^2=9, \\ x^2+y^2=6; \end{cases}$$

$y^2=6-x^2$

$(6-x^2)x^2=9$

$6x^2-x^4-9=0$

$-(x^4-6x^2+9)=0$

$-(x^2-3)^2=0$

$(x^2-3)^2=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y^2=6-x^2$

$y^2=6-3$

$y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$
$(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

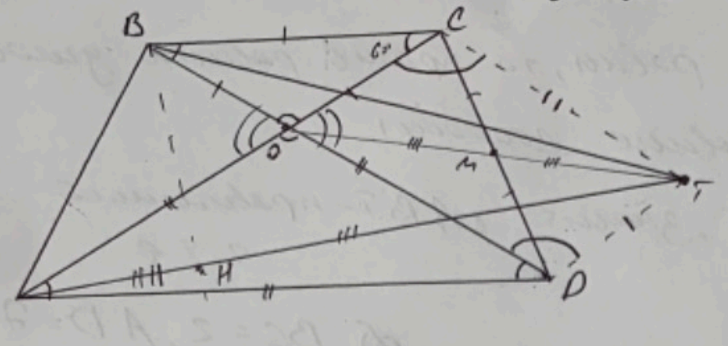
Чистовик

МАТЕМАТИКА 10кл

Задача 4, вторая часть

лист 2

211007211 (U890431 M1275203)



Дано: ABCD-выпукл

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$-правильн

$BD \cap AC = O$

T симметрична O относ. середины CD

Доказать: $\triangle ABT$-правильн

Решение:

1) Назовем середину CD - (·)M

T симметрична т. O относительно M => $T \in OM$, $TM = OM$ и $CM = MD$ (по условию)

$OM = MT$ => OCTD - параллелограмм (диагонали в т. пересечения делятся пополам)

=> $CT = OD$, $CO = TD$ (~~[illegible]~~ стороны в параллелограмме)

2) т.к $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$-правильн => $\angle BOC = \angle OCB = \angle CBO = 60° = \angle AOD = \angle DOA = \angle ODA$

3) $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальн)

$\angle AOB = \angle COD = \frac{360 - 60 \cdot 2}{2} = 120°$

Задача 6

лист 3

4) Обозначим $\angle COT = \alpha$ и $\angle TOD = \beta$

$\alpha + \beta = \angle COD = 120°$

5) $\angle CTO = \angle TOD = \beta$ (т.к CODT - параллелограмм) =>

Рассмотрим $\triangle TOD$:

$\angle ODT = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 120° = 60°$

Рассмотрим $\triangle COT$:

~~[illegible]~~ $\angle OCT = 180° - (\alpha + \beta) = 60°$

6) Рассмотрим $\triangle BOA$; $\triangle BCT$; $\triangle ATD$

$\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle ATD$ (по 2ум сторонам и углу между ними)

($BO = BC = TD$; $AO = CT = AD$; ~~[illegible]~~ $\angle BOA = \underset{60+60}{\angle BCT} = \underset{60+60}{\angle TDA} = 120°$)

Задача 6 т.к $\triangle$ равны, то против равных углов лежат равные стороны

$\Rightarrow AB = BT = AT$, значит $\triangle ABT$ - правильный ч.т.д

Решение:

б) $BC = 2$, $AD = 7$

$\frac{S_\triangle ABT}{S_{ABCD}}$

$S_{ABCD} = S_\triangle ABO + S_\triangle BOC + S_\triangle COD + S_\triangle DOA$

по т. cos: $AT = AB = BT = \sqrt{4 + 49 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{53 + 14} = \sqrt{67}$

проведем высоту BH: т.к $\triangle ABT$ - правильн, то BH - медиана, бис-са и высота $\Rightarrow AH = HT = \frac{1}{2} AT = \frac{\sqrt{67}}{2}$

по т. Пифагора $BH = \sqrt{67 - \frac{67}{4}} = \sqrt{67 \cdot \frac{3}{4}}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}\sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(14 + 2 + \frac{49}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{81}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 81}{4}$

$$\frac{S_\triangle ABT}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{67}{81}$

211007211 (U890431 M1275203)

Чистовик МАТЕМАТИКА 10кл

ЛИСТ 5

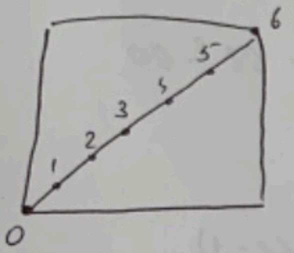
$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 34 \\ \hline 292 \\ +\ 219\ \ \\ \hline 2482 \end{array}$$

Задача 5

$n=69$

$a_1 = S = \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{67\cdot 68}{2} = 67\cdot 34 = 2278$

Получение формулы a_1



$(1;1) - (2;2); (3;3), (4;4); (5;5)$ — 4

$(2;2) - (3;3), (4;4), (5,5)$ — 3

$(3;3) - (4;4); (5;5)$ — 2

$(4;4) - (5;5)$ 1

$(5;5) = 0$

$\sum = 68^2$

$(1;1) = 68^2 - 3$

$(2;2) = 68^2 - 3 - 1 = 68^2 - 4$

$(3;3) = 68^2 - 3 - 2 = 68^2 - 5$

Чтобы 1 лежит на $y=x$ или $y=68-x$

Оба узла не лежат на одной вертик или горизонт.

$(68;68) = 68^2 - 70$

$\sum = 68^2 - 3 + 68^2 - 4 + \dots + 68^2 - 70 = 68^2 - 2482$

I. Оба лежат на $y=x$

$a_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $a_1 = \frac{68\cdot 67}{2} = 2278$

II Оба лежат на $y = 68 - x$

Аналогично I $a_2 = a_1 = \frac{68\cdot 67}{2} = 2278$

III Один лежит на $y=x$, другой вне $y=x$ или $y=68-x$

~~$3+4+\dots+70 = 73\cdot\frac{68}{2} = 2482$~~

~~$68^3 - 2482$~~

~~IV Один лежит на $y=68-x$, другой вне $y=x$ или $y=68-x$~~

~~$68^3 - 2482$~~

211007211 (U890431 M1275203)

Задача 5   Чистовик   МАТЕМАТИКА   10кл

68^2 - общее кол-во узлов

-1 исключаем саму точку

$-(68-n)\cdot 2$ исключаем прямые с такой же координатой

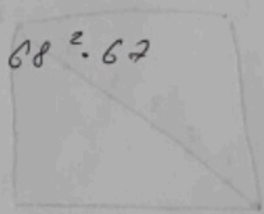
$x(68-n)$ и $y(68-n)$

$n=\{1, 2 .. 68\}$

$S=68^2-1-67\cdot 2+68^2-1-66\cdot 2+\ldots+68^2-1-0=$ $68^3-68\cdot 2\cdot 67\cdot\frac{68}{2}=$

$=68^3-68-2(67+66+\ldots+0)=$

$=68^3-68-68\cdot 67=68(68^2-68)=68^2\cdot(68-1)=68^2\cdot 67$



Ариф. прог с $d=2$

$$S=\frac{(68^2-1-67\cdot 2+68^2-1)}{2}\cdot 68=\frac{68\cdot 2(68-1)}{2}\cdot 68=$$

$$=68^2\cdot 67$$

III Один на $y=x$, другой вне $y=x$ или $y=68-x$

для каждой т. $\frac{68^2-1-67\cdot 2}{[illegible]}$, точки $68\Rightarrow$ б. е. $(68^2-1)-67\cdot 2)\cdot 68$

исключая диагонали из п I $\Sigma=(68^2-1-67\cdot 2)\cdot 68-\frac{68\cdot 67}{2}$

~~$68^3=2982$~~

лист 6

$x^2y^2=9$

$x^2+y^2=6$

$x^2y^2=16$

$x^2+y^2=-1$

нет действит корней

$(a+5)(a-6)$

$a^2+5a-6a-30$

$x^2y^2=\frac{56}{5}$

$x^2+y^2=-5$ — нет действит. корней

$x^2y^2=9$

$x^2+y^2=6$

$x^2=\cancel{9}\,6-y^2$

$(6-y^2)y^2=9$

$6y^2-y^4-9=0$

$-(y^4-6x^2+9)=0$

$-(y^2-3)^2=0$

$(y^2-3)^2=0$

$y^2-3=0$

$y=\pm\sqrt{3}$

$x^2=6-3$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$\frac{6}{6}$

7^3

$+9^4\ 2$

$2^9\ 9$

$2^1\ 2^4\ 8\ 2$