Часть 1

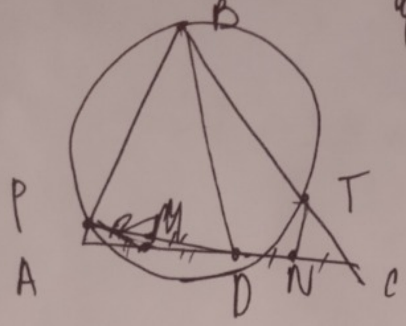
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007185**

ID профиля: **341313**

Вариант 10

Черновик



$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$x^2-4x-21=0$$

84
16
100

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot21}}{2}=\frac{4\pm10}{2}=-3;7$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\left(\sqrt{-(x+3)(x-7)}-2\right)$$

$$\cancel{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}-2\sqrt{-(x+3)(x-7)}=-4}$$

$$\cancel{x}+3+7\cancel{-x}-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=4\left(-(x+3)(x-7)+4-4\sqrt{-(x+3)(x-7)}\right)$$

$$\cancel{10}-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=\cancel{4}-16\sqrt{-(x+3)(x-7)}+4\left(-(x+3)(x-7)\cancel{+4}\right)+16$$

$$\cancel{\sqrt{(x+3)(7-x)}}$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{(7-x)(x+3)}-4$$

$$\cancel{x+3}+\cancel{7}-\cancel{x}-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=4(7-x)(x+3)+16-16\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)}=4(7-x)(x+3)-6$$

$$7\sqrt{(x+3)(7-x)}=2(7-x)(x+3)-3$$

$$\sqrt{2}\sqrt{(7-x)(x+3)}+\frac{\cancel{37}}{2\sqrt{2}}$$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\ \cancel{+1}= 2\sqrt{(x+3)(7-x)}-4$ Черновик

$\sqrt{x+3}\left(\cancel{\sqrt{7-x}}\ 1-2\sqrt{7-x}\right)-2\sqrt{7-x}+1+\sqrt{7-x}+3$

$\cancel{\left(1-2\sqrt{7-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}+$

$10 = 16+2\sqrt{(x+3)(7-x)}+4(x+3)(7-x)-16\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\cancel{67}\quad 6-14\sqrt{(x+3)(7-x)}+4(x+3)(7-x)=0$

$14\sqrt{(x+3)(7-x)}-4(x+3)(7-x)-6=0$

$7\sqrt{(x+3)(7-x)}=2(x+3)(7-x)+3\ \cancel{=0}$

$\cancel{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-y}\right)^2+9\sqrt{(x+3)(7-x)}-2(x+3)(7-x)-13}$

$-x^2$

$\cancel{10-2\sqrt{(x+3)(7-x)}}$

$49(x+3)(7-x)=4(x+3)^2(7-x)^2+9+12(x+3)(7-x)$

$4(x+3)^2(7-x)^2-37(x+3)(7-x)+9=0$

$(x+3)(7-x)\left(4(x+3)(7-x)-37\right)+9=0$

$(x+3)(7-x)\left(-4x^2+16x+84-37\right)+9=0$

$\qquad 11 \qquad 47$

$4x^2-16x-47=0$

$16\pm\sqrt{256+4\cdot 47}$

$47 \cdot 4 = 188$

256

244

211007185 (U341313 M1274070)

$36 + 16a^2(10-a)^2$ ~~= 196~~ Черновик

$+ 48a(10-a) = 196a(10-a)$

$16a^2(10-a^2) - 148a(10-a) + 36 = 0$

$4a^2(10-a^2) - 37a(10-a) + 9 = 0$

$40a^2 - 4a^4 - 370a + 37a^2 + 9 = 0$

$-4a^4 + 77a^2 - 370a + 9 = 0$

$4a^4 - 37a^2 + 370a + 9 = 0$

$\cancel{a^2(4-37a) + 10(37a+1) - 1 = 0}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 - 2\sqrt{(7-x)(x+3}$

$\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} - 2\sqrt{7-x} - 2\sqrt{(7-x)(x+3)} + 4 = 0$

$(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x}) - 2\sqrt{7-x}(1 + \sqrt{x+3}) + 4$

$\sqrt{x+3} - (\sqrt{7-x} + 2\sqrt{(7-x)(x+3)}) + 4 = 0$

$\cancel{-(\sqrt{7-x})(1 + 2\sqrt{(x+3)}) + 2\sqrt{x+3} + 1 + 3 - \sqrt{x+3}}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + (\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})^2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} - 2\sqrt{(7-x)(x+3)} + 4 = 0$

$-2(\sqrt{(7-x)(x+3)} - 2)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + (\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})^2 - ((x+3) + (7-x)) + 4 = 0$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 1) = 6$

$-(x^2 - 4x - 21) = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 21}}{2}$

$= \frac{4 \pm 10}{2} = -3; 7$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 0$

Черновик

$10 - 2\sqrt{-x^2+4x+21} = 9$

$\sqrt{-x^2+4x+21} = \frac{1}{2}$

$-4x^2+16x+84=1$

$4x^2-16x-83=0$

$x_{1,2} = 16 \pm \sqrt{256+4\cdot4\cdot83}$

$\frac{16 \pm 12\sqrt{11}}{8}$

$2 \pm \sqrt{\;}$

$2 \pm 1{,}5\sqrt{11}$

$1{,}5\sqrt{11} - 2$

$3{,}324 - 2 - 1{,}5\sqrt{11}$

$12\sqrt{11}$

$\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

$\frac{\sqrt{33}}{2} + 3 =$

1584	2
792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

528	2
264	2
132	2
66	2
33	3
11	11
1	

83
16
498
831
83 1328
16 25 6
498 1584

144
144

3,5
35
175
1050
1225

34
34
136
102
1156

33
33
99
99
1089

16,5
33
49,5

$y=$

$y^2 - 4y(a+x) + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$

$y = 4(a+x) \pm \sqrt{16(a+x)^2 - 4(8x^2 + 12ax + 5a^2)}$

$16a^2 + 16x^2 + 32ax - 32x^2 - 48ax - 20a^2$

$-16x^2 - 4a^2 - 16ax$

Черновик

$-4(4x^2 + a^2 + 4ax)$

$\geq 0 \quad \geq 0$

$-4(2x+a)^2$

$A\left(-\frac{a}{2}; a\right)$

$B\left(a; \frac{3}{a}\right)$

$16a^2 + 16x^2 + 32ax -$

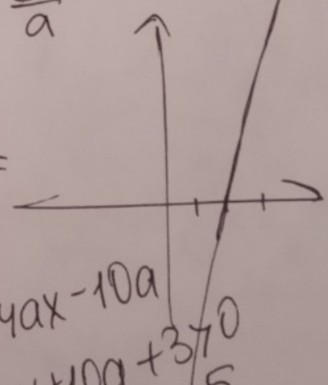
$- 32x^2 - 48ax - 20a^2$

$-4a^2 - 16x^2 - 16ax$

$-4(a^2 + 4x^2 + 4ax) =$

$= -4(2x+a)^2$

$\frac{3}{a} + a > 4x - 10$

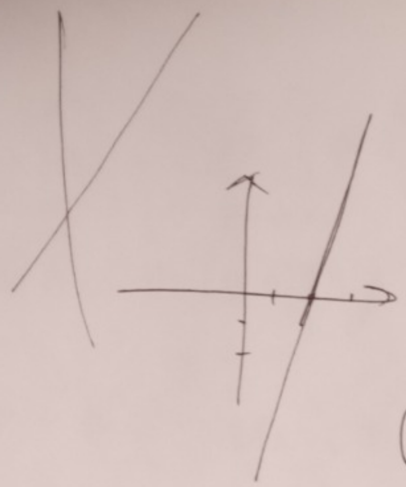


$a^2 + 3 > 4ax - 10a$

$a^2 - 4ax + 10a + 3 > 0$

$x < \frac{\frac{3}{a} + 5}{2}$

3

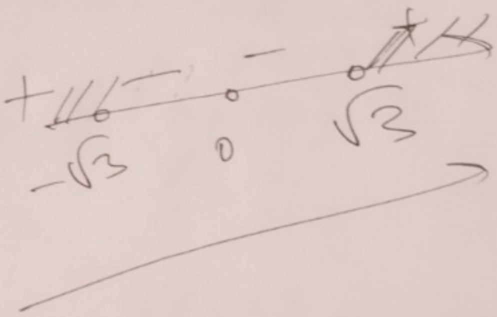


Черновик

$\frac{3}{a} - a > 0$

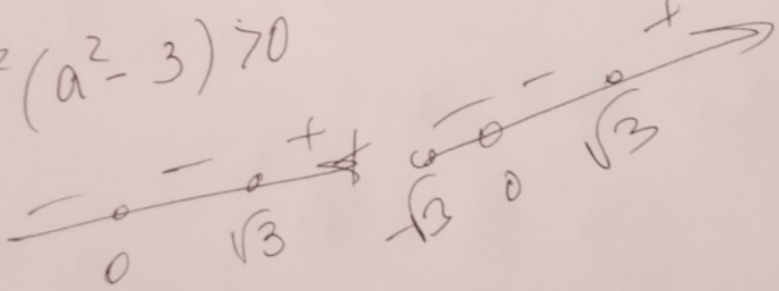
$a < \frac{3}{a}$

$a^2 < 3$



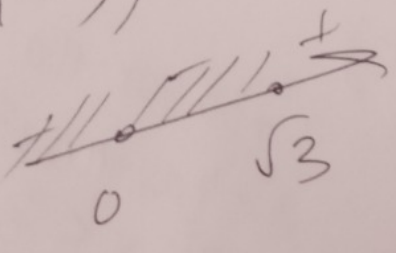
$\frac{a^2-3}{a} > 0$

$a^2(a^2-3) > 0$

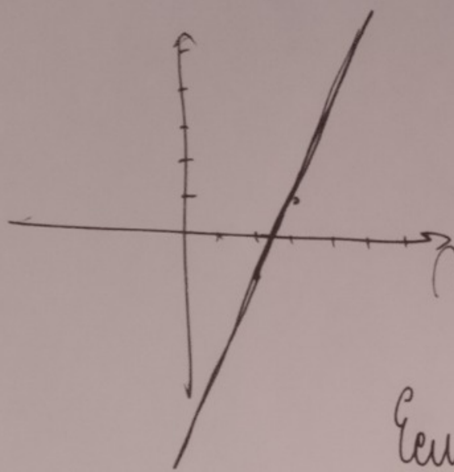


$\frac{a^2-3}{a} < 0$

$(a^2-3)a^2 < 0$



$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$



$y=2x-5$

x	~~6~~	2	3
y	-5	-1	1

Черновик

Если ~~т.~~ лежат по одн

т. А:

$y^2-4ay+8x^2+12ax-\cancel{4xy}+5a^2=0$

$-4xy$

$\frac{-12a\pm\sqrt{144a^2+4\cdot8\cdot5a^2}}{16}$

$y^2-4y(a+x)+$

$-12a\pm$

$8x^2+12ax+5a^2$

$-12a\pm\sqrt{\cancel{144a^2}-4\cdot8\cdot5a^2}$ 20

$8x^2+12ax-4xy=0$

$y^2-4y(a+x)$

$y^2-\cancel{4ay+5a^2}$

$\cancel{4a\pm\sqrt{16a^2}}-4\cdot5a$

Черновик

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$B_{ox}=\cancel{2a^2}\ \frac{4a^4}{2a}=2a^3$

$B_{oy}=2a^4-2a^5-ay$

$\cancel{y}=$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a}=$

$7-x=a$ $\quad \frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4(a^2+\frac{3}{a})}}{2}$

$x+3$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$-a=x-7$ $\quad \frac{2a\pm\sqrt{-12a}}{2}$ $\quad x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$

$-a+10$

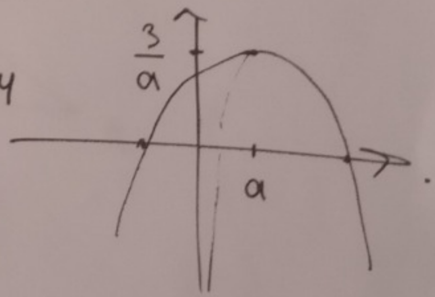
$y=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

$\sqrt{-a+10}-\sqrt{a}+4=2\sqrt{a(-a+10)}$

$\frac{2a\pm2\sqrt{-3a}}{2}$ $\quad \frac{a\pm\sqrt{-3a}}{6}$

$\cancel{10+16=}$

$\cancel{\sqrt{a}\,4}$ $\sqrt{a}-\sqrt{\cancel{-}(a+10)}+2\sqrt{-a(10-a)}=4$



$\cancel{a3}$ $\cancel{10-2\sqrt{a(a-10)}}$

$\sqrt{a}-\sqrt{10-a}+2\sqrt{(10-a)a}=4$

$10-2\sqrt{a(10-a)}\cancel{+4a^2(10-a)}+4(\sqrt{a}-\sqrt{10-a})(\sqrt{10-a})a=16$

$\sqrt{a}-\sqrt{10-a}+\cancel{2\sqrt{a(10-a)}}=4-2\sqrt{a(10-a)}$

$10-2\sqrt{a(10-a)}=16+4a(10-a)-16\sqrt{a(10-a)}$

$6+\cancel{4(a}\ 4a(10-a)=14\sqrt{a(10-a)}$

Черновик

$a(a+1)=6$

$a^2+a-6=0$

$a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot6}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=-3;2.$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2$

$10-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=4$

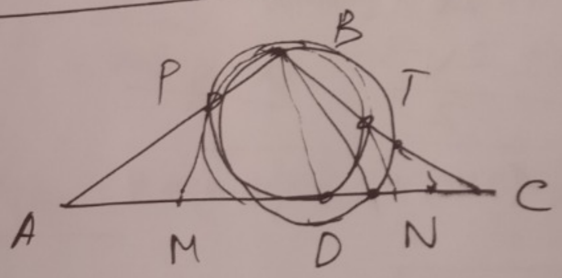
$2\sqrt{(x+3)(7-x)}=3$

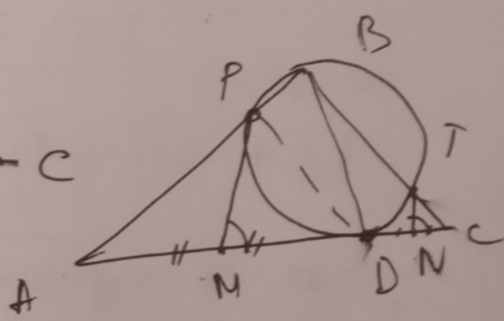
$-x^2+4x+21=3$

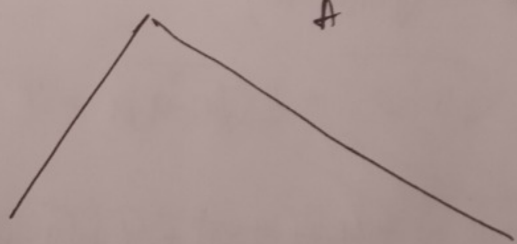
72
16
88

$x^2-4x-18=0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot18}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{88}}{2}$







Чистовик

1 стр.

(2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$-x^2+4x+21=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 21}}{-2}=\dfrac{-4\pm 10}{-2}=7;-3$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}-2\sqrt{(7-x)(x+3)}+4=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2-(\cancel{x}+3+7-\cancel{x})+4=0$

ОДЗ:

$\begin{cases} 1)\ x+3\geqslant 0 \\ \quad x\geqslant -3 \\ 2)\ 7-x\geqslant 0 \\ \quad x\leq 7 \\ 3)\ (7-x)(x+3)\geqslant 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

-3 7

$\Rightarrow x\in[-3;7]$

$(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+1)=6$

Пусть $a=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}$:

$a(a+1)=6$

$a^2+a-6=0$

$a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=-3;2.$

Чистовик

2 стр.

(2) I. если $a = -3$:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$$

Каждую часть возведём в квадрат:

$$x + 3 + 7 - x - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 9$$

$$2\sqrt{-x^2+4x+21} = 1$$

$$\sqrt{-x^2+4x+21} = \frac{1}{2} \quad \Big| \text{ возведём в квадрат}$$

$$-x^2+4x+21 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 4x - 20\frac{3}{4} = 0$$

$$4x^2 - 16x - 83 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 4 \cdot 83 \cdot 4}}{8} = \cancel{\frac{16 \pm 4\sqrt{33}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{33}}{2}} \quad x_{1,2} = 2 \pm 1{,}5\sqrt{11}$$

(корни не подходят при подстановке в исход. уравнение)

II. если $a = 2$:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$$

$$10 - 2\sqrt{-x^2+4x+21} = 4$$

$$\sqrt{-x^2+4x+21} = 3$$

$$-x^2+4x+21 = 9$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = -2;\ 6.$$

(корень $x = -2$ не подх., если подставить его в урав-е; корень $x = 6$ подходит)

Ответ: $x = 6$

Чистовик

3 стр.

③ Парабола: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

~~Тогда её вершина:~~

$\cancel{x_0=\frac{-b}{2a}=}$

$$y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a}=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}, \quad a\neq 0$$

Координаты т. B:

$$B_x=-\frac{b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$$

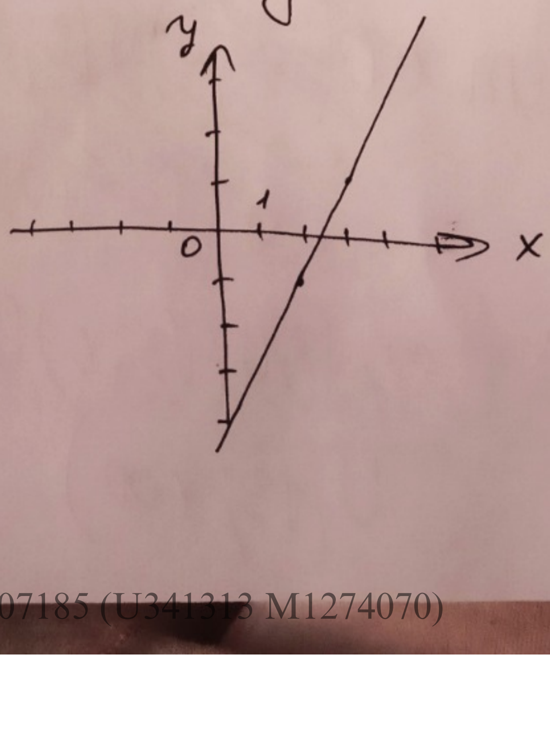
$$B_y=\cancel{a^2}-2\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$$

$$B\left(a;\frac{3}{a}\right)$$

Прямая $2x-y=5$

$y=2x-5$:

x	2	3
y	-1	1



Точка A:

$$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$$

$$y^2-4y(a+x)+8x^2+12ax+5a^2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{4(a+x)\pm\sqrt{16(a+x)^2-4(8x^2+12ax+5a^2)}}{2}=$$

$$=\frac{4(a+x)\pm\sqrt{-4(2x+a)^2}}{2}.$$

Если A_y сущ., то тогда $-4(2x+a)^2\geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4(2x+a)=0$

$2x+a=0$

$a=-2x$.

Тогда $A_y=\frac{4(a+x)}{2}=$

$=2(a+x)$

$$A_x=-\frac{a}{2}$$

$$A_y=2\left(a-\frac{a}{2}\right)=a.$$

$$A\left(-\frac{a}{2};a\right)$$

Чистовик

4стр

3) Возможны два варианта:

1) Точки A и B лежат над прямой $y = 2x - 5$, т.е:

$$\begin{cases} B_y > 2x-5 \\ A_y > 2x-5 \end{cases}$$

или под прямой $y=2x-5$, т.е.

$$\begin{cases} B_y < 2x-5 \\ A_y < 2x-5 \end{cases}$$

Итого:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} B_y > 2x-5 \\ A_y > 2x-5 \end{cases} \\ \begin{cases} B_y < 2x-5 \\ A_y < 2x-5 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{3}{a} > 2x-5 \\ a > 2x-5 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a - \frac{3}{a} > 0 \quad a^2(a^2-3) > 0 \Rightarrow a \in (\sqrt{3}; +\infty)} \\ \begin{cases} \frac{3}{a} < 2x-5 \\ a < 2x-5 \end{cases} \Rightarrow a - \frac{3}{a} < 0 \Rightarrow a \in (-\infty; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \\ a \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \end{array}\right.$$

Ответ: ~~$a \in (-\infty; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$~~

$a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007185**

ID профиля: **341313**

Вариант 10

Чистовик 10в

1 стр.

4) $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$ Пусть $a = x^2+y^2$ $(a>0)$;
$b = x^2y^2$ $(b \geq 0)$

$\begin{cases} \cancel{\frac{6}{a}+b=10} \; \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \Rightarrow b = \frac{81-a^2}{5} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{6}{a} + \frac{81-a^2}{5} = 10$

$30 + 81a - a^3 = 50a$

$-a^3 + 31a + 30 = 0$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a^3 - 25a - 6a - 30 = 0$

$a(a^2-25) - 6(a+5) = 0$

$a(a-5)(a+5) - 6(a+5) = 0$

$(a+5)(a(a-5)-6) = 0$

$(a+5)(a^2-5a-6) = 0$

$a+5=0$ или $a^2-5a-6=0$

$a = -5$ (не подходит, т.к. $a>0$)

$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+4\cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = -1; 6$ (корень $a=-1$ не подходит, т.к. $a>0$)

Чистовик 10В

2 стр.

4) Есть ~~2 варианта~~:

I) ~~а~~

$a = 6 \Rightarrow b = \frac{81-a^2}{5} = \frac{81-36}{5} = \frac{45}{5} = 9$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \Rightarrow y^2 = 6-x^2 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$x^2(6-x^2)=9$

$6x^2 - x^4 = 9$

$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

$x^2_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$y^2 = 6 - x^2 = 3$

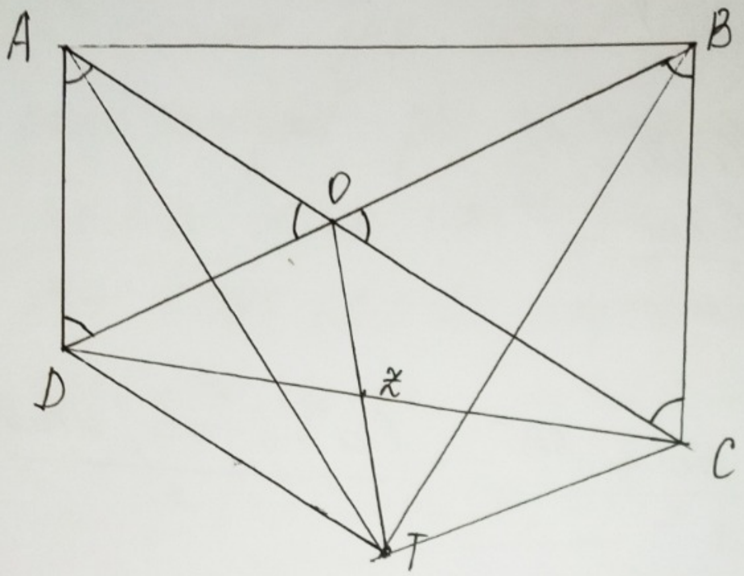
$y = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

Чистовик 10В

3 стр.

6



Дано: ABCD - выпукл. четырёхуг-к, BOC и AOD - правильное.

$DZ = ZC$

$OZ = ZT$.

а) Д-ть: $\triangle ABT$ - правильный

Д-во:

Пусть $AO = OD = DO = a$; $OB = BC = CO = b$.

Т.к. $OZ = ZT$, $DZ = ZC \Rightarrow OCTD$ - парал-м $\Rightarrow TC = OD = a$; $DT = OC = b$.

$\angle OCT = 180^\circ - \angle DOC = 180^\circ - (180^\circ - \angle BOC) = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BT = \sqrt{BC^2 + TC^2 - 2\cos\angle BCT \cdot BC \cdot TC} = \sqrt{b^2 + a^2 + ab}$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = \angle ADO + (180^\circ - \angle DOC) = \angle ADO + (180^\circ - (180 - \angle AOD)) = \angle ADO + \angle AOD = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AT = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2\cos\angle ADT \cdot AD \cdot DT} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB} = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos(180 - \angle AOD)} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

Чистовик 10В

4стр

(6) $\Rightarrow AB=BT=TA=\sqrt{a^2+b^2+ab} \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный.

б) Дано: $BC=2$, $AD=7$.

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:

$$S_{ABT}=\frac{AB\cdot BT\cdot \sin\angle ABT}{2}=\frac{(a^2+b^2+ab)\sin 60^\circ}{2}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD}=S_{ADO}+S_{BOC}+S_{AOB}+S_{DOC}=$$

$$=\frac{DA\cdot AO\cdot \sin\angle DAO}{2}+\frac{BO\cdot OC\cdot \sin\angle BOC}{2}+$$

$$+\frac{AO\cdot OB\cdot \sin\angle AOB}{2}+\frac{DO\cdot OC\cdot \sin\angle DOC}{2}=$$

$$=\frac{a^2\sin 60^\circ}{2}+\frac{b^2\sin 60^\circ}{2}+\frac{ab\sin 120^\circ}{2}+\frac{ab\sin 120^\circ}{2}=$$

$$=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+2ab)$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}(a^2+b^2+2ab)}=$$

$$=\frac{49+4+14}{49+4+28}=\frac{67}{81}$$

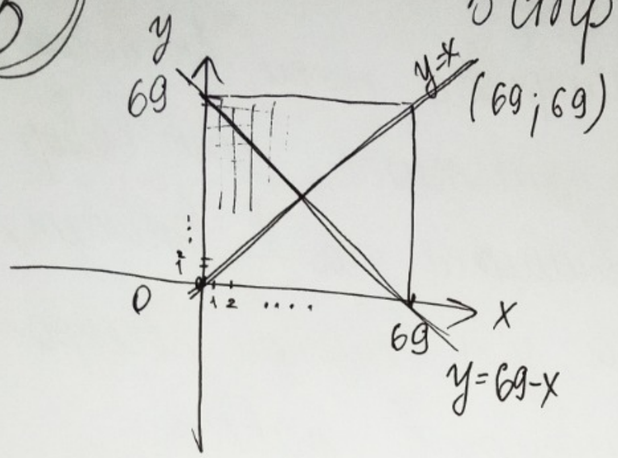
Ответ: $\frac{67}{81}$

211007185 (U341313 M1274071)

Чистовик 10в

5 стр

5



Для начала возьмём 1 точку на прямой $y=x$, к примеру, лежащую над точкой ~~[illegible]~~ (1;0) (не входящую в гран. квадрата). Сколькими способами мы можем выбрать вторую из квадрата (всего их в квадрате $69^2 = 4761$)? Их будет:

$4761 - 1$ (сама точка) $- 272$ (точки границы) $-$

$-$ ~~67~~ $66 \cdot 2$ (точки, из-за которых два узла будут лежать на прямых, парал-х OX и OY) $=$

$= 4760 - 272 - 132 = 4356$ точек.

Теперь рассмотрим точку, лежащую следующей на $y=x$ (выше). Для неё количество возможных для выбора узлов будет уже $4356 - 1 = 4355$ (т.к. мы уже посчитали пару из неё и первой точки до этого).

Чистовик 10В

6 стр

5 Таким образом, рассматривая точки все выше на прямой $y=x$, можно заметить, что выбор узла каждый раз уменьшается на 1. Значит, для всех этих точек на $y=x$ внутри квадрата общее кол-во вариантов равно:

$$4356+4355+4354\ldots+4290=$$

$$=\frac{(4356+4290)67}{2}=$$

$$=\frac{9046\cdot 67}{2}=293041 \text{ вариантов.}$$

И это полное кол-во вариантов. Не имеет смысла рассматривать случай, когда одна из точек лежит на $y=69-x$, а вторая где-то еще – ведь, ~~мы~~ считая варианты для прямой $y=$ ~~x~~, мы посчитали варианты и для точек, лежащих на $y=69-x$ **Ответ: 293041**

6 +

~~Чистовик~~ Черновик

1 стр.

4)
$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2+y^2$, т.е. $a > 0$,
а $b = x^2y^2$, т.е. $b \geq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \Rightarrow b = \dfrac{81-a^2}{5} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{a} + \frac{81-a^2}{5} = 10$$

$$30 + 81a - a^3 = 50a$$

$$a^3 - 31a + 30 = 0$$

$$a^3 - 25a - 6a + 30 = 0$$

$$a(a^2-25) - 6(a-5) = 0$$

$$a(a-5)(a+5) - 6(a-5) = 0$$

$$(a-5)(a(a+5)-6) = 0$$

$a - 5 = 0$ или $a^2 + 5a - 6 = 0$

$a = 5$

$$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4\cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = -6; 1$$

211007185 (U341313 M1274071)

$S_{ABCD} =$

$= 2S_{ADB} = 2(S_{ADO} + S_{AOB}) =$

$= 2\left(\frac{AD \cdot AO \cdot \sin\angle DAO}{2} + \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{2}\right) =$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{ab\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a(a+b)$ $\cos 120°$

$S_{ABT} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT}{2} =$

$= \sqrt{?}$

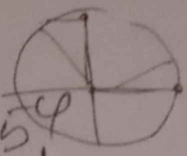
$\frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4}$

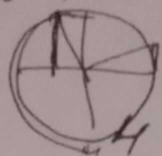
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ $\cos\frac{\pi}{6}$

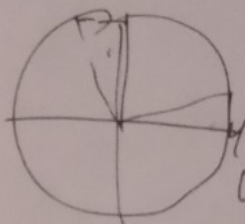
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a(a+b)}$

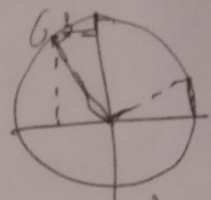
$\frac{a^2+b^2+ab}{(a^2+ab)2} =$ $b = BC = 2$, $a = AD = 7$

$= \frac{49+4+14}{(49+14)2} = \frac{67}{63 \cdot 2} = \frac{67}{126} \approx \frac{1}{2}$









69 69 621 4761 69 67 34 68 4 68 4 272

67 67 64 67 679 102 4699 67 m

4356 − 67 + 1 4356 − 60 4290

3,12 4523 67 21661 27138 29304 27138 21661 4356 4290 29304 19046 −8 10 4

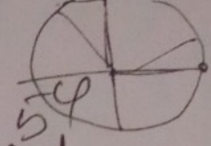
2 4523 53 14 67 53 28 81

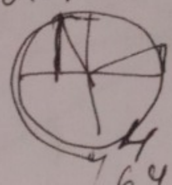
$S_{ABCD} =$

$2S_{ADB} = 2(S_{ADO} + S_{AOB}) =$

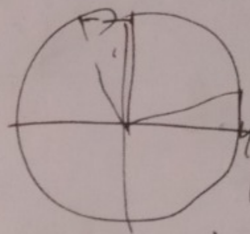
$2\left(\frac{AD \cdot AO \cdot \sin\angle DAO}{\cancel{2}} + \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{\cancel{2}}\right) =$

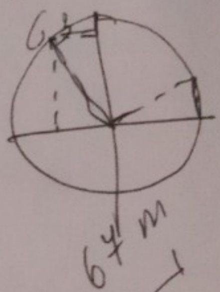
$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{ab\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a(a+b)$ $\quad \cos 120^\circ$





$ABT = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT}{2} =$





$= \sqrt{?}$

$\frac{(a^2+b^2+ab)\sqrt{3}}{4}$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad \cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{(a^2+b^2+ab)\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}\ 2} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{3}}a(a+b)}$

$\frac{a^2+b^2+ab}{(a^2+ab)2} =$ $\quad b = BC = 2$, $\quad a = AD = 7$

$= \frac{49+4+14}{(49+14)2} = \frac{67}{63 \cdot 2} = \frac{67}{126} \approx \frac{1}{2}$

69 69 621 4 4 1 47 61 5 4

68 4 69 67 4 3 68 4 272

67 67 4 67 67 679 10 2 4699 67 m

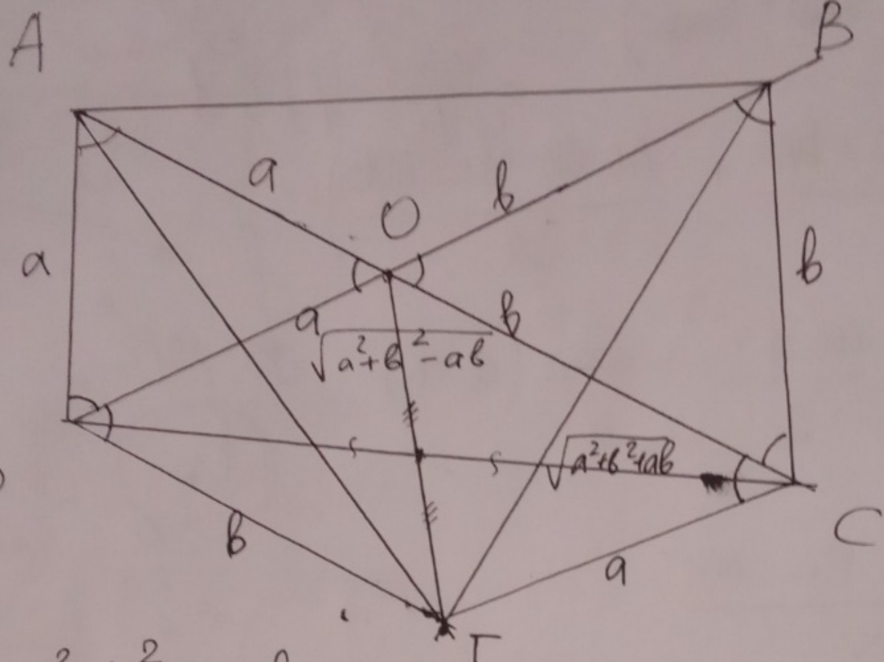
4356 − 67 + 1 4356 − 60 4290

3 12 4523 67 21661 27138 29304

6 27138 4290 21661 4356 29304 19046 −8 10 4

2 4523

53 14 67 1 53 28 8 1



$TB^2 = \sqrt{a^2+b^2-2ab}$

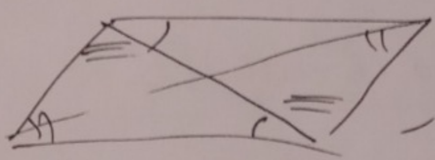
$\sqrt{a^2+b^2+ab}$

$a^2+b^2-\frac{2ab}{2}$

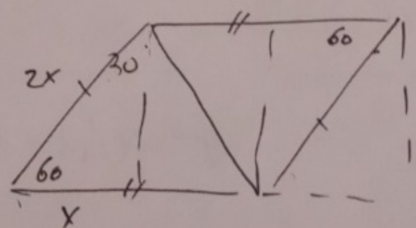
a^2+b^2-ab

$\cos 120^\circ$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

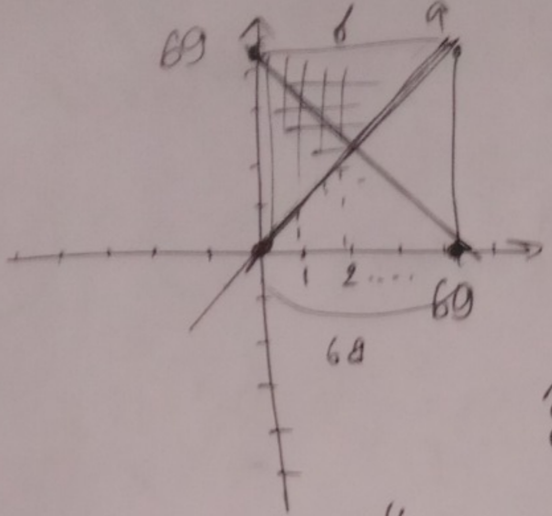


$-\sin\frac{\pi}{6}$



$CD^2 + a^2+b^2-ab = 2a^2+2b^2$

$CD^2 = a^2+b^2+ab$



$y = 69 - x$

x	0	69
y	69	0

Число узлов „нужных":

$2 \cdot 69 - 1 = 138 - 1 = 137$.

$137 - 4 = 133$

a_1

$69^2 - 1 - (4 \cdot 69 - 4) - 266$

3

69 вч 8

272
132
4104
4760
404

69

69
69
621
414
4761

4760
272
4488
132
4356

69
4
276
272
4356

~~43~~ $1 + 2 \ldots + 4356$

19379092 | 2
18 | 9689546
13
12
17
16
19
18
10
9
12

9689546

$\frac{(4356+1)4356}{2}$

$\frac{4357 \cdot 4356}{2}$ =

4357
4356
26142
21785
17071
17428
18979092

Черновик

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \qquad x^2+y^2=a$$

$$x^4+y^4+\cancel{4}2x^2\cancel{4}y^2 = 81 \qquad x^2y^2=b$$

$$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2+5b=81 \end{cases}$$

$$b = \frac{81-a^2}{5}$$

$$\frac{6}{a} + \frac{81-a^2}{5} = 10$$

$$30 + 81a - a^3 = 50a$$

$$a^3 - 21a - 30 = 0$$

$-5;$ -1 6 $-5;$

$\frac{6}{-5}+$

$$6 + ab = 10a$$

$$6 + \frac{a(81-a^2)}{5} = 10a$$

$$30 + 81a - a^3 = 50a$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

$$\cancel{a(a^2-31)-31}$$

1 56 2 11

$$a^3 - 30a - 30 - a = 0$$

$$a(a^2-30) - (a+30)$$

$$\cancel{a^3 - 27 - 31a - 3}$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

$$a^3 - 16a - 15a - 30$$

$$a(a^2-16) - 15(a+2)$$

$$a(a-4)(a+4)$$

$$a^3 - 25a - 30 - 6a = 0$$

$$a^2(a-5)(a+5) - 6(5+a) = 0$$

$$(a+5)(a(a-5)-6) = 0$$

$$a = -5 \qquad a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25+4\cdot 6}}{2}$$

$$\frac{5 \pm 7}{2} = -1; 6.$$

$$15a+30 \;\big|\; a+4$$

$$-\,15a-60 \quad 15$$

$$a(a-4)(a+4) - 15(a+4) + 30$$

~~Чистовик~~ Черновик

1 стр.

4)

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2+y^2$, т.е. $a > 0$,

а $b = x^2y^2$, т.е. $b \geq 0$.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \Rightarrow b = \frac{81-a^2}{5} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{a} + \frac{81-a^2}{5} = 10$$

$30 + 81a - a^3 = 50a$

$a^3 - 31a + 30 = 0$

$a^3 - 25a - 6a + 30 = 0$

$a(a^2-25) - 6(a-5) = 0$

$a(a-5)(a+5) - 6(a-5) = 0$

$(a-5)(a(a+5)-6) = 0$

$a - 5 = 0$ или $a^2 + 5a - 6 = 0$

$a = 5$

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4\cdot 6}}{2} =$

$= \frac{-5 \pm 7}{2} = -6; 1$

Чистовик ~~Черновик~~

2 стр.

4) Значит, есть 3 варианта:

I) $a=5 \Rightarrow b=\frac{81-a^2}{5}=\frac{81-25}{5}=\frac{56}{5}=11{,}2$

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \Rightarrow y^2=5-x^2 \\ x^2y^2=\frac{56}{5} \end{cases}$

$x^2(5-x^2)=\frac{56}{5}$

$25x^2-5x^4=56$

$5x^4-25x^2+56=0$

$x^2_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-4\cdot5\cdot56}}{10}$, $D<0 \Rightarrow$ нет решения

II) $a=-6$. Такого не может быть, ведь $a>0$.

III) $a=1 \Rightarrow b=\frac{81-a^2}{5}=\frac{80}{5}=16$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2 \\ x^2y^2=16 \end{cases}$

$x^2(1-x^2)=16$

$-x^4+x^2=16$

$x^4-x^2+16=0$

$x^2_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot16}}{2}$, $D<0 \Rightarrow$ нет решения

Ответ: нет решения