Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

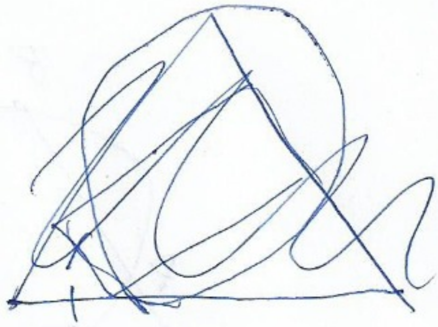
Шифр: **211007135**

ID профиля: **871150**

Вариант 10

2п

$PD = a$
$DT = b$



$a^2 + AP^2 = 4$
$b^2 + TC^2 = 9$
$a^2 + b^2 = 5$
$AP^2 + TC^2 = 13 - 5 = 8$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$

$AC^2 = (AB + BC)^2 - 4S_{ABC}$

$S_{ABC} = \frac{(AB+BC)^2 - AC^2}{4} = \frac{(AP + PD + DT + TC)^2 - AC^2}{4}$

211007135 (U871150 M1274436)

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ 3n

$x \geq -3$
$x \leq 7$

$x^2 - 4x - 21 \leq 0$
$x_1 + x_2 = 4$
$x_1 x_2 = -21$
$x_1 = 7$
$x_2 = -3$

$\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}\right) + 4 = \left(2\sqrt{(x+3)(x-7)} - 4\right)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{x+3} + 4 = \left(2\sqrt{x+3} + 1\right)\sqrt{7-x}$

$\cancel{x}+3 + 7 - \cancel{x} - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + \cancel{16}^{6} - 16\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$4(x+3)(7-x) + 6 - 14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 0$

$\cancel{\sqrt{x+3}}\ \sqrt{(x+3)(7-x)} = t$

$t \geq 0$

$4t^2 - 14t + 6 = 0$

$14 \cdot 14 = 56 + 14 = 196$ $16 \cdot 6 = 96$

$t_1 + t_2 = \frac{14}{4} = 3{,}5$

$t_1 t_2 = 1{,}5$

$D = 14^2 - 16 \cdot 6 =$
$= 196 - 96 = 100$

$t = \frac{14 \pm 10}{8} = \frac{24}{8}, \frac{4}{8}$
$3, \frac{1}{2}$

$(x+3)(7-x) = 9$
$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$

$x^2 - 4x - 12 = 0$
$x_1 + x_2 = 4$
$x_1 x_2 = -12$
$x_1 = 6$
$x_2 = -2$

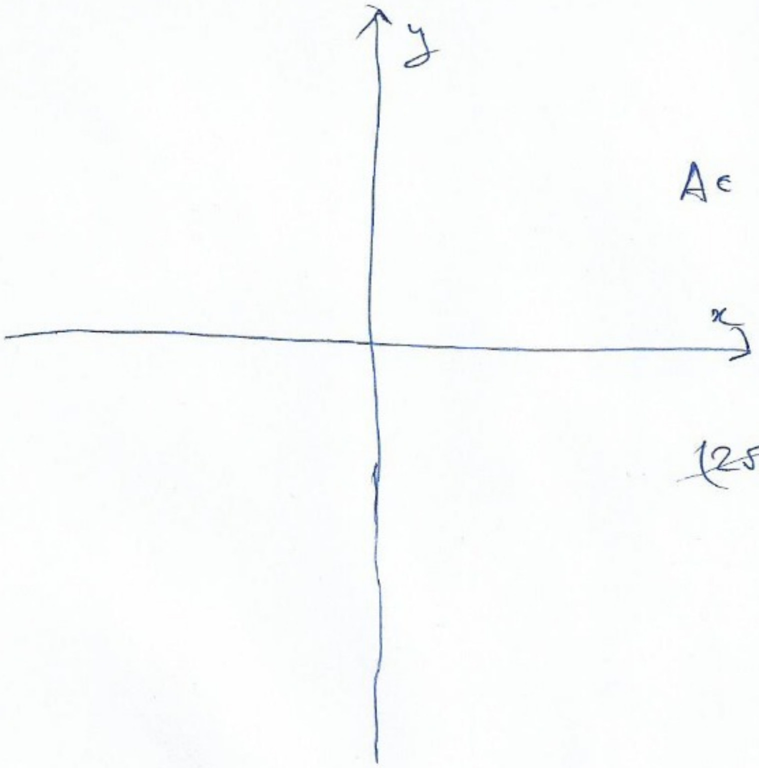
$x^2 - 4x - \frac{81}{4} = 0$
$x_1 + x_2 = 4 = \frac{8}{2}$
$x_1 x_2 = -\frac{81}{4} = 0$

$\sqrt{97} \approx 10$
$x \approx -\frac{6}{2}$

$D = 16 + 81 = 97$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{97}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{97}}{2}$
$x_1 x_2 = 4 - \frac{97}{4} = \frac{16 - 97}{4} =$
$\frac{-81}{4}$

211007135 (U871150 M1274436)

4n



$A \in$ $5a^2-4ay+8x^2-4xy+$

$+y^2+12ax=0$

$8x^2+y^2-4xy+12ax-4ay+5a^2=$

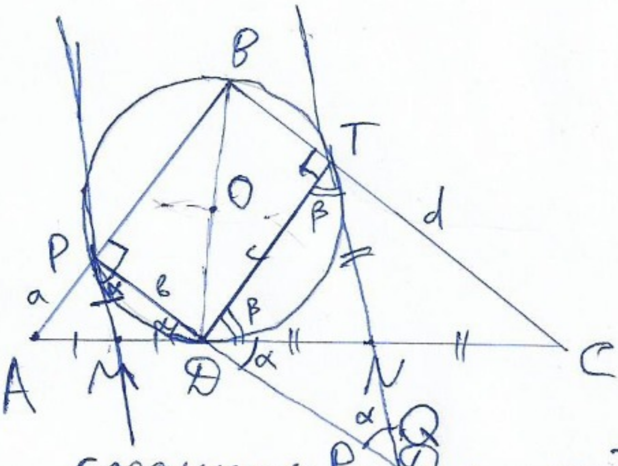
$=0$

$\cancel{(2\sqrt{2}x)^2}$

211007135 (U871150 M1274436)

1т

№1



Дано: △ABC

D ∈ AC

окр ω (O, r), BD - диаметр ω

ω ∩ AB = P

ω ∩ BC = T

M - сер. AD

N - сер CD

PM ∥ TN

а) ∠ABC - ?

б). MP = 1

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

S_{ABC} - ?

1. соединим P и D, а также T и D

2. ~~Т.к.~~ ∠DPB и ∠DTB опираются на диаметр окр ω

∠DPB = 90°

∠DTB = 90°

3. PM = AM = MD (медианы в прям. треуг)

TN = DN = CN

4. Продлим PD до пер-я с TN, (PD ∩ TN = Q)

5. Пусть ∠MDP = α; ∠NDT = β

∠MPD = α

∠A = ∠APM = 90° - α

∠NDQ = α (верт. уг.).

∠TQD = ∠NPD = α (накрест леж.)

△TQD: 2α + 2β = 180°

α + β = 90°

∠A = 90° - α

∠C = 90° - β

~~∠B~~ ∠ABC = 180° - (90° - α) - (90° - β) = α + β = 90°

211007135 (U871150 M1274436)

2m

$AM = MD = MP = 1$

$DN = NT = NC = \frac{3}{2}$

$AC = 5$

Также стоит заметить, что $PBTD$ - прям-к.

$PD = BT$

$PB = DT$

Пусть $AP = a$

$PD = b$

$DT = c$

$TC = d$

$a^2 + b^2 = 4$

$c^2 + d^2 = 9$

$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 25$

$a^2 + c^2 + b^2 + d^2 + 2ac + 2bd = 25$

$2ac + 2bd = 12$

$ac + bd = 6$

$b^2 + c^2 = 5$

$a^2 + d^2 + 5 = 13$

$a^2 + d^2 = 8$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) = \frac{1}{2}(ab + bc + ad + cd)$

$\cancel{a = \frac{6 - bd}{c}}$

$\cancel{S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(6 - bd + c^2)(b+d)}{c}}$

$AB \parallel TD$ (по одност. углам)

$PD \parallel BC$

$\triangle APD \sim \triangle DTC$ $\quad \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(\frac{5}{2}b\right)^2 = 25$

$k = \frac{3}{2}$

211007135 (U871150 M1274436)

Зт

№2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ | ОЗУ: $x \geq -3$, $x \leq 7$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4$

возведём обе части в квадрат

$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + 16 - 16\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$4(x+3)(7-x) - 14\sqrt{(x+3)(7-x)} + 6 = 0$

Пусть $\sqrt{(x+3)(7-x)} = t$

$4t^2 - 14t + 6 = 0$

$t_1 + t_2 = 3{,}5$

$t_1 t_2 = 1{,}5$

$t_1 = 3$

$t_2 = 0{,}5$

$\left[\begin{array}{l} (x+3)(7-x) = 9 \\ (x+3)(7-x) = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 21+4x-x^2-9=0 \\ 21+4x-x^2-\frac{1}{4}=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-4x-12=0 \\ x^2-4x-20{,}75=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \\ x=\frac{4+\sqrt{97}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{97}}{2} \end{array}\right.$

$x \in [-3; 7]$

211007135 (U871150 M1274436)

4т

$\sqrt{97} < 10$

$4+\sqrt{97} < 14$

$\frac{4+\sqrt{97}}{2} < 7$

$4-\sqrt{97} > -10$

$4-\sqrt{97} > -6$

$\frac{4-\sqrt{97}}{2} > -3$

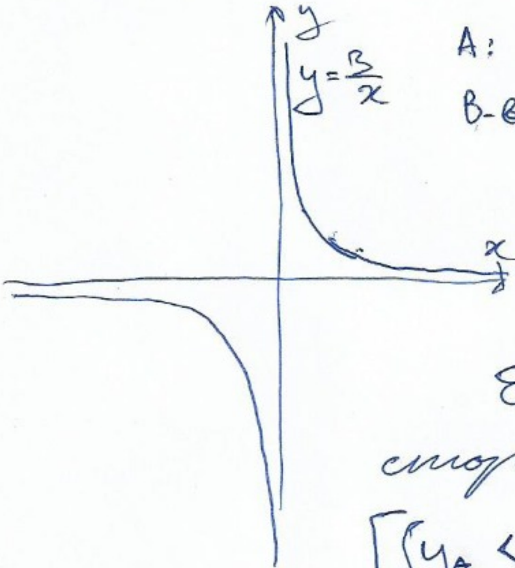
Все значения x в совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \\ x=\frac{4+\sqrt{97}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{97}}{2} \end{array}\right.$$

соответвуют области определения

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \\ x=\frac{4+\sqrt{97}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{97}}{2} \end{array}\right.$

5м



A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

B-верш. $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$2x-y=5$

Если A и B лежат по одну сторону от прямой, то

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y_A < 2x_A-5 \\ y_B < 2x_B-5 \end{cases} \\ \begin{cases} y_A > 2x_A-5 \\ y_B > 2x_B-5 \end{cases}\end{array}\right.$$

Найдём коорд. B

$\cancel{x_B = \frac{2a^2}{2a} = a}$

$\cancel{y_B = a^3-2a^3+a^3+3}$

$ax^2-2a^2x+a^3+3=ay$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

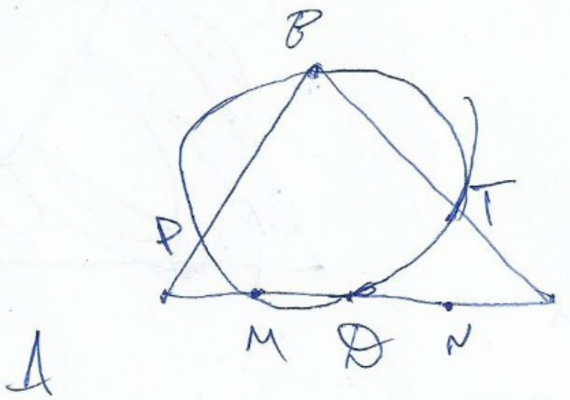
$x_B=\frac{2a}{2}=a$

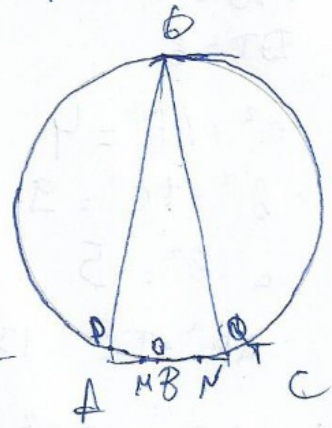
$y_B=y(x_B)=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

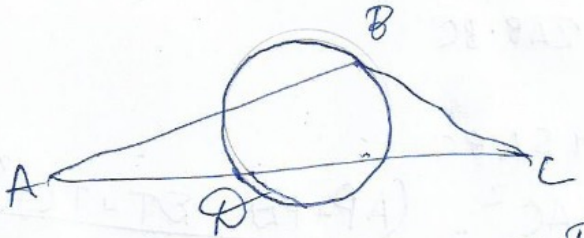
$B\in y=\frac{3}{x}$

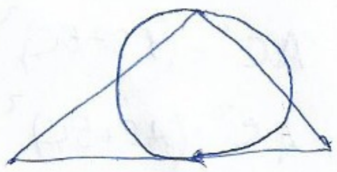
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y_A < 2x_A-5 \\ \frac{3}{a} < 2a-5 \end{cases} \\ \begin{cases} y_A > 2x_A-5 \\ \frac{3}{a} > 2a-5 \end{cases}\end{array}\right.$$

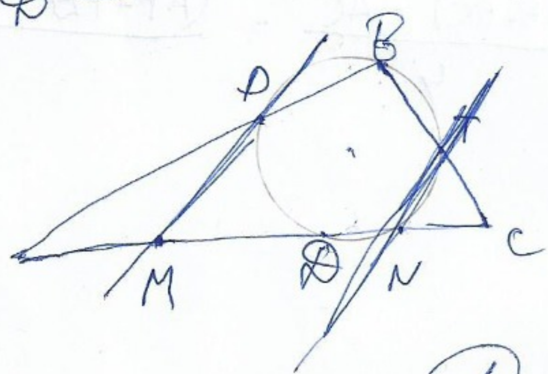
1n

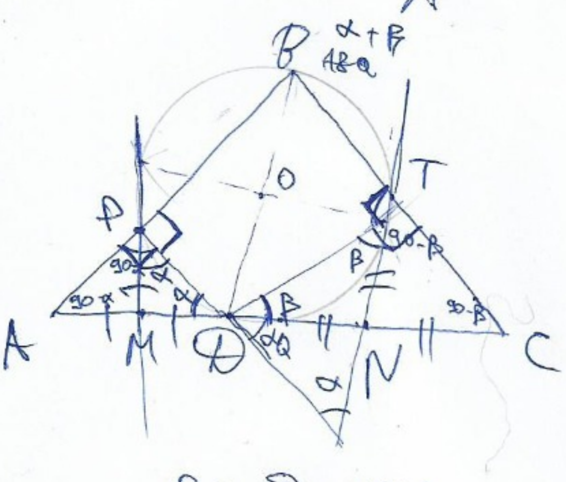












Дано: $\triangle ABC$

$D \in AC$

окр $\omega(O, r)$ BD-диаметр

M - сер. AD

N - сер. DC

$PM \parallel TN$

---

a. $\angle ABC$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\angle BPD + \angle BTD = 180^\circ$

$\angle APD = \angle BTD$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

211007135 (U871150 M1274436)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007135**

ID профиля: **871150**

Вариант 10

m 8

5. $AT = \sqrt{AD^2 + BC^2 - 2\cos\angle ADT \cdot AD \cdot BC}$

$AT = \sqrt{49 + 4 + 2\cos 60^\circ \cdot 7 \cdot 2}$

$AT = \sqrt{53 + 7 \cdot 2}$

$AT = \sqrt{53+14}$

$AT = \sqrt{67}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AT^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 67 = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot (BO \sin 60^\circ + AO \sin 60^\circ) = \frac{AD+BC}{2} (AO+BO) \sin 60^\circ =$

$= \frac{9}{2} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$

$$(x^2+y^2)^3-31+1=31(x^2+y^2)$$ №1

$$(x^2+y^2)^3+1=31(x^2+y^2+1)$$

$$(x^2+y^2+1)((x^2+y^2)^2+\cancel{y}x^2+y^2+1)=31(x^2+y^2+1)$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2+y^2+1=31$$

$$\cancel{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=30}$$

$$x^2+y^2=t$$

$$t^2+t-30=0$$

$$t_1+t_2=1$$

$$t_1t_2=-30$$

$$t_1=+6$$

$$t_2=5$$

$$\cancel{t=5}\qquad x^2+y^2=6$$

$$\begin{cases} x^2y^2=9 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$36+45=81$$

$$(68-1)^2=68^2-68-68+1=$$

$$=68^2-67-67-7$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} xy=3 \\ xy=-3 \end{array}\right. \\ x^2+y^2=6 \end{array}\right.$$

$$x=-y$$

$$-y^2=3$$

$$y^2=3$$

$$2y^2=6$$

$$y^2=3$$

$$y=\sqrt{3}$$

$$x=-\sqrt{3}$$

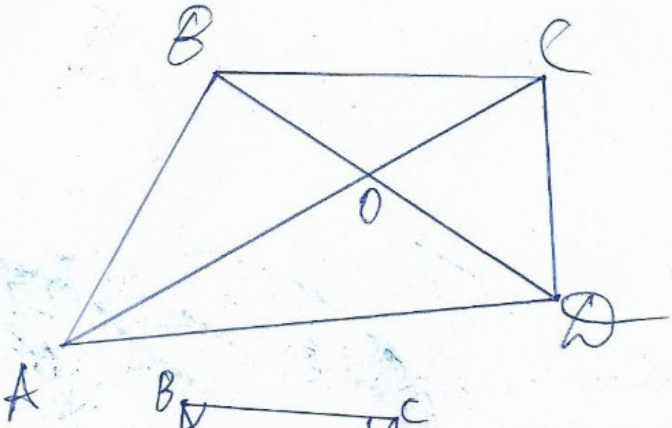
$$x=2\sqrt{3}-y$$

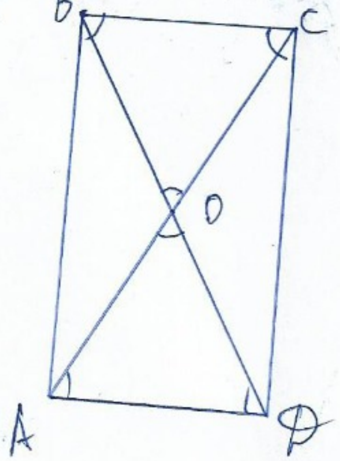
$$2\sqrt{3}y-y^2=3$$

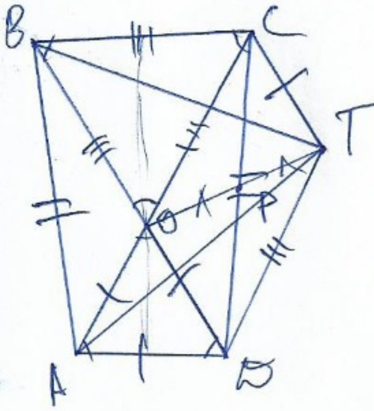
211007135 (U871150-M1274437)

№6.

П2

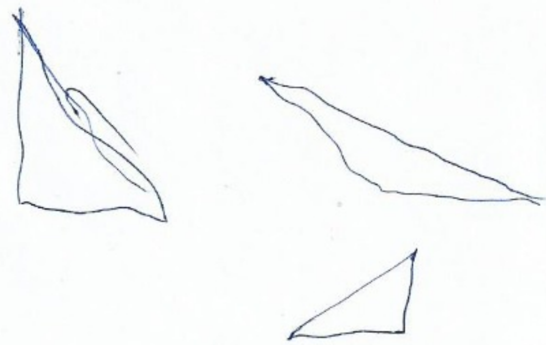






р-сер СТ

ОСТД - пар-мм



211007135 (U871150 M1274437)

m 1

№4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2y^2=50-\frac{30}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2+50-\frac{30}{x^2+y^2}=81$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3-30}{x^2+y^2}=31$$

$$(x^2+y^2)^3-30=31(x^2+y^2)$$

$$\cancel{(x^2+y^2)^2-31(x^2+y^2)=30}\quad (x^2+y^2)^3-31+1=31(x^2+y^2)$$

$$(x^2+y^2)^3+1=31(x^2+y^2+1)$$

$$(x^2+y^2+1)\left((x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)+1\right)=31(x^2+y^2+1) \qquad x^2+y^2+1\neq 0$$

$$(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)-30=0$$

$$x^2+y^2=t$$

$$t^2-t-30=0$$

$$t_1+t_2=1$$

$$t_1t_2=-30$$

$$t_1=6$$

$$t_2=-5$$

211007135 (U872150 M1274437)

$$x^2+y^2=6$$

M2

Подставим

$x^2+y^2=6$ в исходную систему

$$\frac{6}{x}\left\{\begin{array}{l}\frac{6}{6}+x^2y^2=10\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2y^2=9\\ 6^2+5x^2y^2=81\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2y^2=9\\ 5x^2y^2=45\end{array}\right.$$ всё сошлось

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=6\\ x^2y^2=9\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=6\\ \left[\begin{array}{l}xy=3\\ xy=-3\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+2xy+y^2=6+6\\ x^2+2xy+y^2=6-6\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x+y)^2=12\\ (x+y)^2=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-y\\ x=2\sqrt{3}-y\\ x=-2\sqrt{3}-y\end{array}\right.$$

211007135 (U871150 M1274437)

М3

Подставим значения x из

$$\left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2\sqrt{3}-y \\ x=-2\sqrt{3}-y \end{array}\right.$$

в систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ \left[\begin{array}{l} xy=3 \\ xy=-3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2=6 \\ \left[\begin{array}{l} -y^2=3 \\ -y^2=-3 \end{array}\right. \end{cases} \qquad x=-y$$

$$y^2=3$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ x=-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12-4\sqrt{3}y+2y^2=6 \\ \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{3}y-y^2=3 \\ 2\sqrt{3}y-y^2=-3 \end{array}\right. \end{cases} \qquad x=2\sqrt{3}-y$$

$$\begin{cases} y^2-2\sqrt{3}y+3=0 \\ \left[\begin{array}{l} y^2-2\sqrt{3}y+3=0 \\ y^2-2\sqrt{3}y-3=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$y^2-2\sqrt{3}y+3=0$$

$$(y-\sqrt{3})^2=0$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2+4\sqrt{3}y+12=6 \\ \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3}y-y^2=3 \\ -2\sqrt{3}y-y^2=-3 \end{array}\right. \end{cases} \qquad x=-2\sqrt{3}-y$$

$$\begin{cases} y^2+2\sqrt{3}y+3=0 \\ \left[\begin{array}{l} y^2+2\sqrt{3}y+3=0 \\ y^2+2\sqrt{3}y-3=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

2110092135 (U871150 M1274437)

$y^2+2\sqrt{3}y+3=0$ М 4

$(y+\sqrt{3})^2=0$

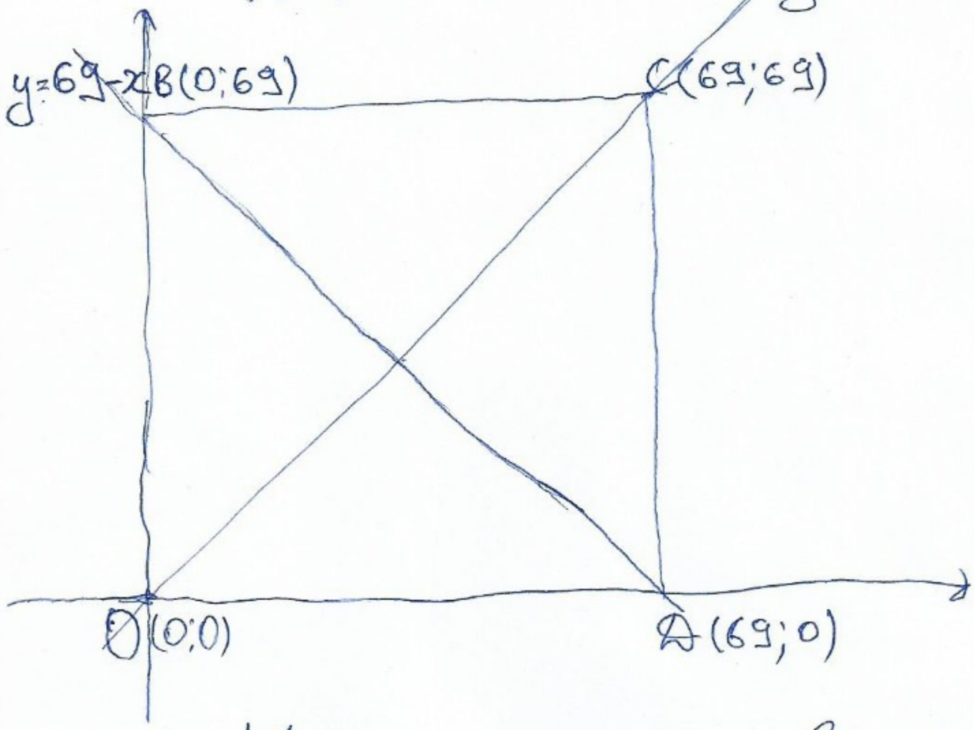
$\begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=-2\sqrt{3}-y \end{cases}$

$\begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

№5

m5



* Первый узел — это тот, который ОБЯЗАТЕЛЬНО лежит на одной из прямых $y=x$ и $y=69-x$.

- Лежит ли на одной из них второй, НАМ НЕ ВАЖНО

1. Не на сторонах квадрата
2. хотя бы один узел лежит на одной из прямых $y=x$ или $y=69-x$
3. ~~НЕ~~ узлы имеют разные абсциссы и разные ординаты
4. Нам не важно, какой из узлов лежит на прямой $y=x$ или $y=69-x$

- Выбирая первый узел, у нас есть 68 вариантов на ~~прямой~~ любой из прямых

Прямые пересекаются НЕ на узле

Количество вариантов выбрать первый узел равно $68+68=136$ вариантов

$N_1=136$

- После того, как мы выбрали первый узел, ~~И~~ мы можем выбрать вторым узлом любой на квадрате 68×68 за вычетом всех на вертикали первого и всех на горизонтали первого, ~~всех на горизонтали первого~~ не считая первого, а также самого первого

21007135 (U871150 M1274437)

m6

$N_2 = 68 \cdot 68 - 67 - 67 - 1 = 68^2 - 68 - 67 = 68(68-1) - 67 =$

$= 68 \cdot 67 - 67 = 67(68-1) = 67^2$

$N_{общ}$ – кол-во спос-в выбрать два узла, удовл. условию.

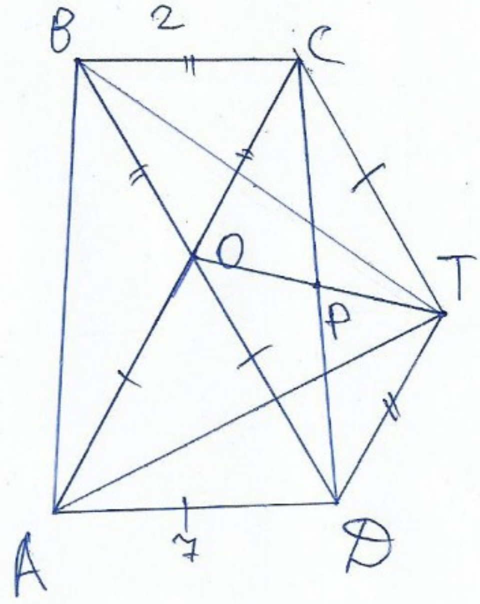
$N_{общ} = N_1 \cdot N_2 = 136 \cdot 67^2 = 136 \cdot 4489 = 610504$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 67 \\ \hline 469 \\ +\ 402\ \ \\ \hline 4489 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4489 \\ \times\ 136 \\ \hline 26934 \\ +\ 13467\ \ \\ 4489\ \ \ \ \\ \hline 610504 \end{array}$$

Ответ: 610504

211007135 (U871150 M1274437)

№6 М7



Дано: ABCD

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ - прав

$\triangle AOD$ - прав.

P - сер. CD

T симм. O отн. P

а). Док: $\triangle ABT$ - прав.

б). $BC = 2$

$AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

1. OCTD - ~~пр~~ параллелограмм, т.к $CP = PD$ и $OP = PT$

$\Downarrow$

$CO = DT$

$CT = OD$

2. $BC \parallel AD$ по накрестлежащим углам

3. $\angle COD = 180° - 60° = 120°$

$\angle ODT = 180° - 120° = 60°$

$\angle ADT = \angle BCT = 120°$

$\triangle BCT = \triangle ADT$ по двум ст и углу между ними

$AT = BT$

4. $\angle BOA = 180° - 60° = 120°$

$\triangle AOB = \triangle BCT$ по двум ст и углу между ними.

$AB = BT = AT$

$\Downarrow$

ABT правильный

211007135 (U871150 M1274437)