Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007127**

ID профиля: **362219**

Вариант 10

по т. косинусов.

AB^2

$$25 = \left(2\sqrt{1-y^2} + \sqrt{5-4y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{9y^2-4} + 3\sqrt{1-y^2}\right)^2 - 2\left(2\sqrt{1-y^2} + \sqrt{5-4y^2}\right) \cdot \left(\sqrt{9y^2-4} + 3\sqrt{1-y^2}\right)$$

21007127 (U362219 M1276146)

1) $\sqrt{21+4x-x^2}=3$

$21+4x-x^2=9$

$x^2-4x-12=0$

по т. Виета

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2) $\sqrt{21+4x-x^2}=\frac{1}{2}$

$21+4x-x^2=\frac{1}{4} \quad |\cdot 4$

$84+16x-4x^2=1$

$4x^2-16x-83=0$

$\frac{D}{4}=64+83\cdot 4=396=36\cdot 11$

$x=\frac{8\pm 6\sqrt{11}}{4}$

$x=\frac{4\pm 3\sqrt{11}}{2}$

$x=\frac{4+3\sqrt{11}}{2}$ не соот. ОДЗ

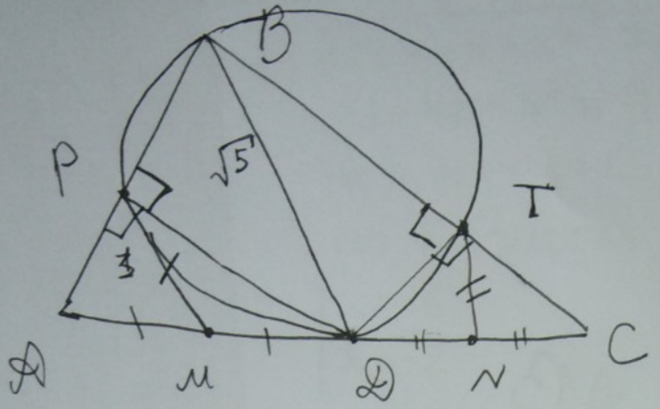
$x=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$ не соот ОДЗ

Ответ: 6, −2

2

211007127 (U362219 M1276146)

Черновик №1



$AB = 2\sqrt{1-y^2} + \sqrt{5-4y^2}$

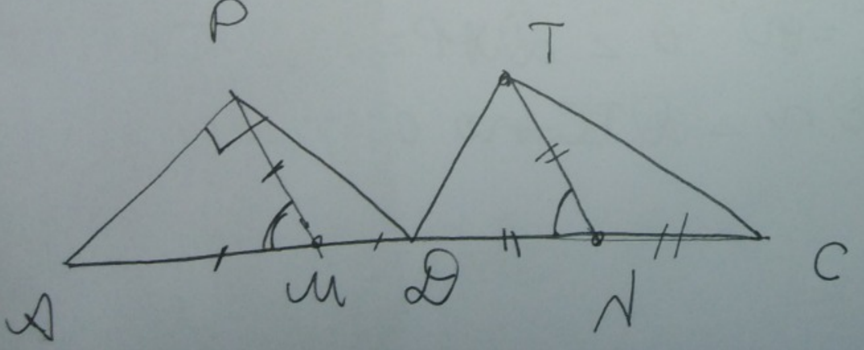
$BC = \sqrt{9y^2-4} + 3\sqrt{1-y^2}$

$AC = 5$

$PBDT$ — четырехугольник т.к. BD диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ т.к. они опираются на диаметр.

PM — медиана в прям. треуг $\Rightarrow PM = AM = MD = \frac{1}{2}AD$, аналогично $NT = \frac{1}{2}DC = DN = NC$

$PM = 1 \Rightarrow AD = 2$, $NT = \frac{3}{2} \Rightarrow DC = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = 5$, $BD = \sqrt{5} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{5}$



$\angle AMP = \angle DNT$ как соответственные при $TN \parallel PM$ по условию. $\Rightarrow \triangle APM \sim \triangle DTN$ по двух пропорциональным сторонам и углу между ними.

211007127 (U362219 M1276146)

Чистовик

Вариант 1

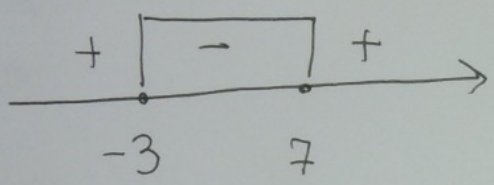
№2

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ 21+4x-x^2\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \\ x^2-4x-21\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \\ (x-7)(x+3)\leq 0 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(1)



$\Leftrightarrow x\in[-3;7]$

$x\in[-3;7]$.

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{21+4x-x^2}-4$$

$$x+3-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}+7-x=4(21+4x-x^2)-16\sqrt{21+4x-x^2}+16$$

$$10-2\sqrt{21+4x-x^2}=4(21+4x-x^2)-16\sqrt{21+4x-x^2}+16$$

$$\sqrt{21+4x-x^2}=t,\ t\geq 0$$

$$10-2t=4t^2-16t+16$$

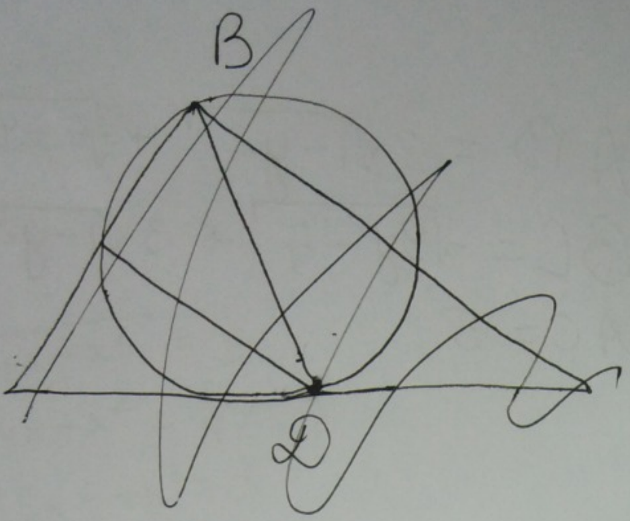
$$4t^2-14t+6=0$$

$$\frac{D}{4}=49-24=5^2$$

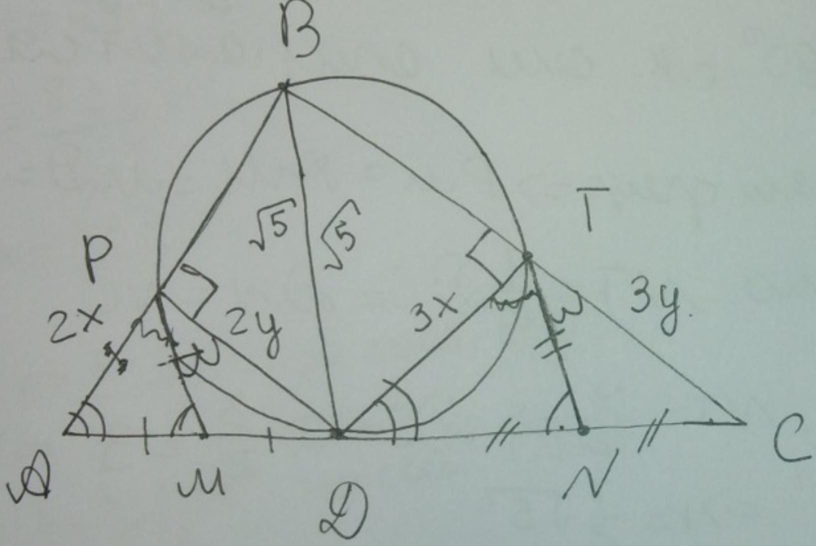
$$t=\frac{7\pm 5}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

1



AB



т. к. $\angle APD = \angle DTC = 90^0$ и $\angle DAP = \angle CDT$ по добию, то $\triangle APD \sim \triangle DTC$ по острому углу.

$$\frac{AP}{DT} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{PD}{TC} = \frac{2}{3}$$

по т. Пифагора $4x^2 + 4y^2 = 4$

$4(x^2+y^2) = 4$

$\underline{x^2 + y^2 = 1}$

$x = \sqrt{1-y^2}$

Чистовик

№3

1) Найдём A:

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$8x^2-(4y-12a)x+y^2-4ay+5a^2=0$

$\frac{D}{4}=(2y-6a)^2-8y^2+32ay-40a^2=$

$=4y^2-24ay+36a^2-8y^2+32ay-40a^2=$

$=-4y^2+8ay-4a^2=-4(y^2-2ay+a^2)=-4(y-a)^2\leq 0$

$\Rightarrow y=a$

Тогда $x=\frac{4y-12a}{16}=-\frac{a}{2}$

$A=\left(-\frac{a}{2};a\right)$ - лежит на прямой $y=-2x$

2) Найдём точку B:

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

т.к. парабола, то $a\neq 0$

Тогда $y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=(x-a)^2+\frac{3}{a}$

$x_B=a$

$y_B=+\frac{3}{a}$

3

$B=\left(a;\frac{3}{a}\right)$ - лежит на гиперболе $y=\frac{3}{x}$

2 точки A и B лежат на одну сторону от прямой $2x-y-5=0$ если $2x-y-5=0$ будет иметь строгий знак (в полном случае)

$A: -a-a-5=-2a-5$

$B: 2a-\frac{3}{a}-5$

Одинаковый знак => произведение положительное

$$(-2a-5)\left(2a-\frac{3}{a}-5\right)>0$$

$$(2a+5)\left(\frac{2a^2-5a-3}{a}\right)<0$$

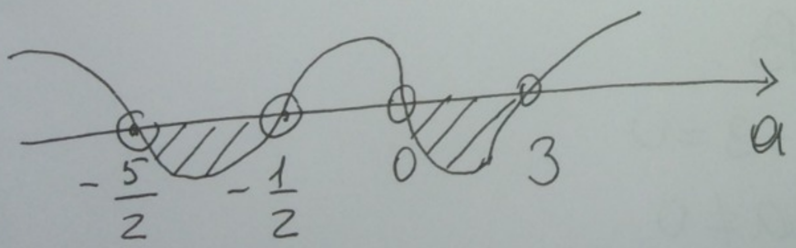
$2a^2-5a-3=0$

$D=25+24=49$

$a=\frac{5\pm7}{4}$

$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

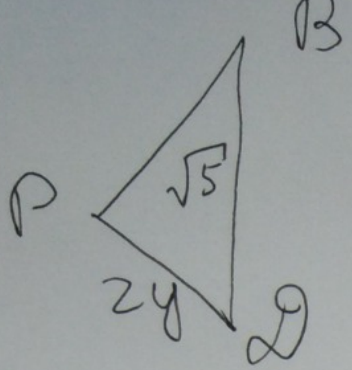
$$(2a+5)\left(\frac{(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{a}\right)<0$$



$a\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$

4



$BP=\sqrt{5-4y^2}$

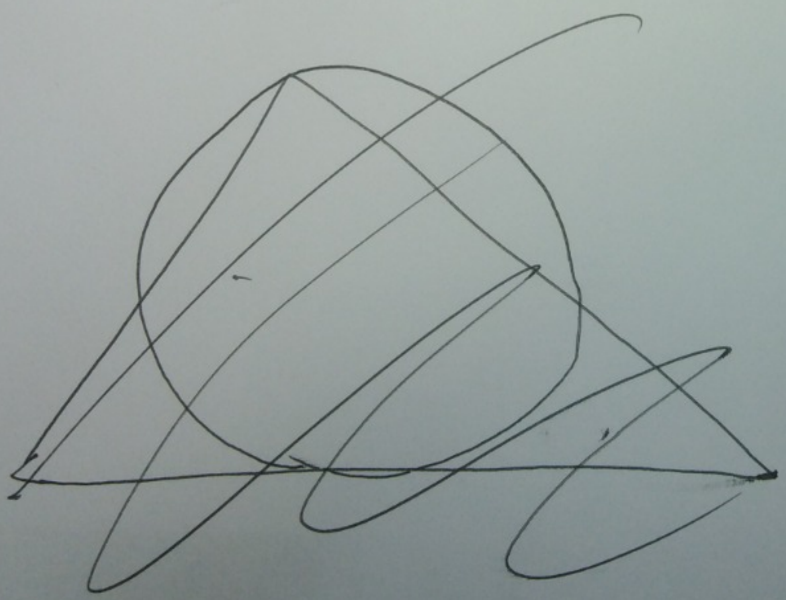
$BT=\sqrt{5-9(1-y^2)}=\sqrt{5-9+9y^2}=\sqrt{9y^2-4}$

$PB=\sqrt{5-4y^2}$

$PD=2y$

$DT=3\sqrt{1-y^2}$

$BT=\sqrt{9y^2-4}$



211007127 (U362219 M1276146)

Черновик.

$$\begin{cases} 5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 \\ (A) \\ ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 \\ 2x-y=5 \\ y=2x-5 \end{cases}$$

1) $\sqrt{21+4x-x^2}=3$ Чистовик.

$21+4x-x^2=9$

$x^2-4x-12=0$

по т. Виета

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2) $\sqrt{21+4x-x^2}=\frac{1}{2}$

$21+4x-x^2=\frac{1}{4} \quad | \cdot 4$

$84+16x-4x^2=1$

$4x^2-16x-83=0$

$\frac{D}{4}=64+83\cdot 4=396=36\cdot 11$

$x=\frac{8\pm 6\sqrt{11}}{4}$

$x=\frac{4\pm 3\sqrt{11}}{2}$

$x=\frac{4+3\sqrt{11}}{2}$ не соот. ОДЗ

$x=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$ не соот ОДЗ

Ответ: 6, -2

2

Черновик.

$A: -a-a-5=-2a-5$

$B: 2a-\frac{3}{a}-5$

Одинаковый знак => произведение положительное

3 $(-2a-5)\left(2a-\frac{3}{a}-5\right)>0$

$(2a+5)\left(\frac{2a^2-5a-3}{a}\right)<0$

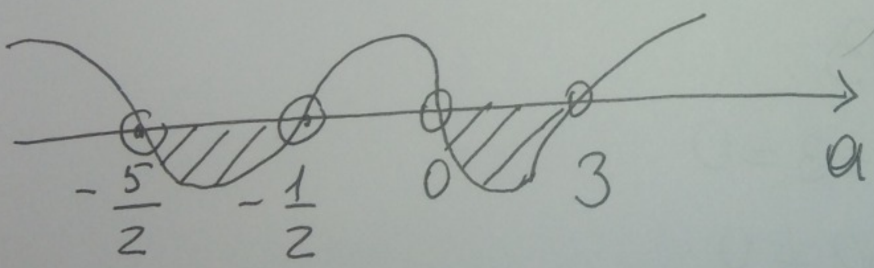
$2a^2-5a-3=0$

$D=25+24=49$

$a=\frac{5\pm7}{4}$

$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$(2a+5)\left(\frac{(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{a}\right)<0$



$a\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$

Ответ: $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;3)$

4

21007127 (U362219 M1276146)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007127**

ID профиля: **362219**

Вариант 10

Чистовик

исключаем те, которые лежат на первой ~~точке~~ прямой, но не лежат на одной ~~вертикали~~ вертикали или горизонтали

$(68-2)=66$

Плюс; из всех комбинаций исключим те, которые посчитали дважды на одной прямой) $- C_{68}^2$

Итого $68(67^2-66)-\frac{68\cdot 67}{2}$

3) Сумма рез-ов

$$68\cdot 67^2-\frac{68\cdot 67}{2}+68(67^2-66)-\frac{68\cdot 67}{2}=$$

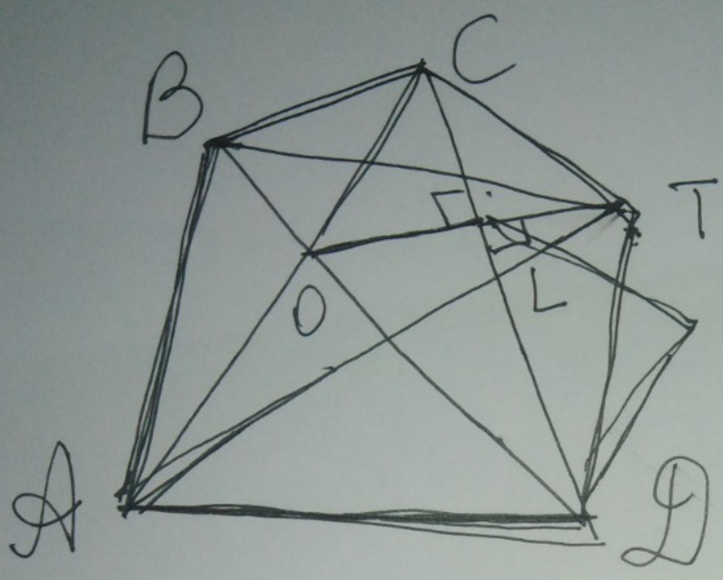
$$=68(67^2+67^2-66)-68\cdot 67=68(67^2\cdot 2-66-67)=$$

$$=68(67^2\cdot 2-133)$$

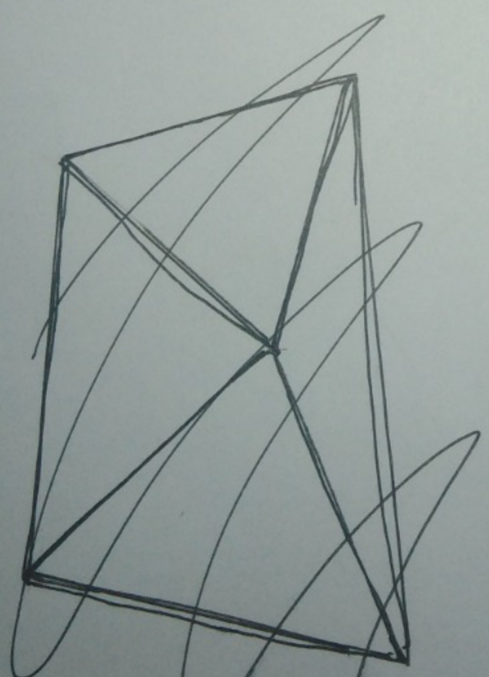
Ответ: $68(67^2\cdot 2-133)$

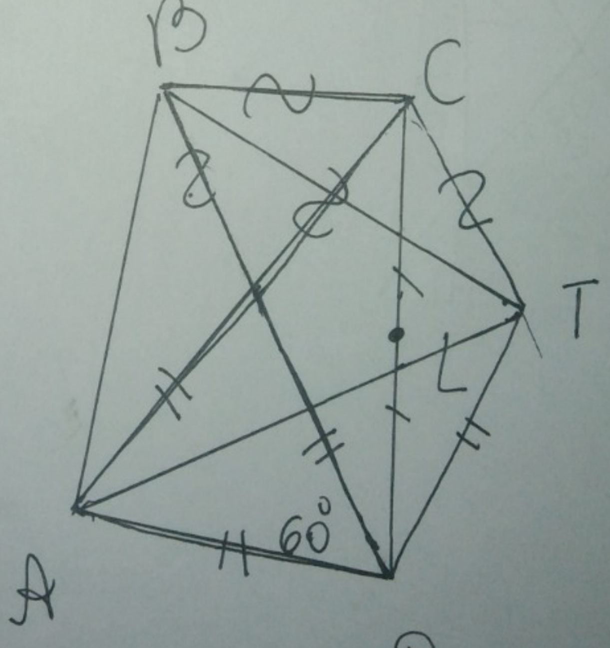
4

№6



BC = 2
AD = 7





Чистовик

$(a+1)(a^2-a-30)=0$

$\underline{a=-1}$ $\quad a^2-a-30=0$

$\left[\begin{array}{l} a=-5 \\ a=6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-5 \end{array}\right.$ – не подходят т.к $a=x^2+y^2$ $\Rightarrow a=6$

$5b+36=81$

$b=9$

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \quad | : y^2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=\frac{9}{y^2} \\ \frac{9}{y^2}+y^2=6 \quad (1) \end{cases}$

(1) $\frac{9}{y^2}+y^2=6$

$y^4-6y^2+9=0$

$(y^2-3)=0$

$y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x^2=\frac{9}{3}$

$x=\pm\sqrt{3}$

1) $x=\sqrt{3}, y=\sqrt{3}$

2) $x=\sqrt{3}, y=-\sqrt{3}$

3) $x=-\sqrt{3}; y=\sqrt{3}$

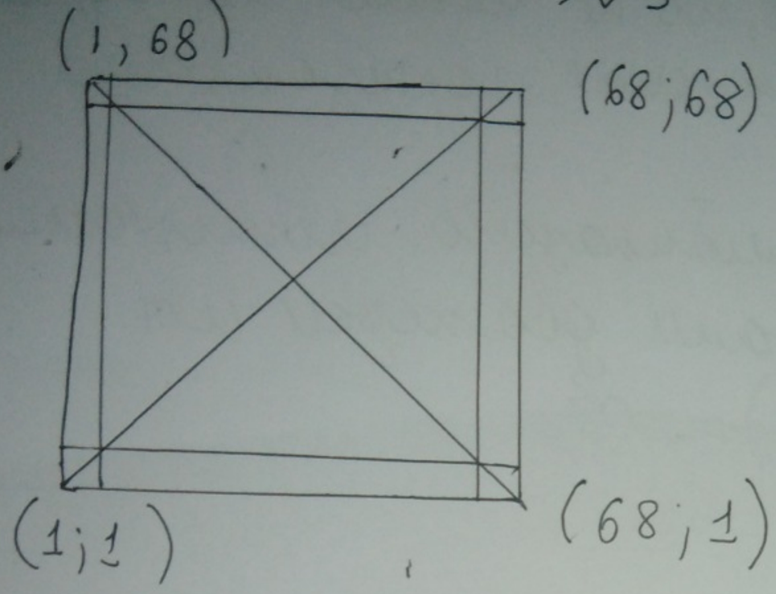
4) $x=-\sqrt{3}, y=-\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

2

Чистовик

№5



1) Рассмотрим $y=69-x$

На ней 68 возможных точек, выбираем одну; 2-я точка не может лежать на той же вертикали или горизонтали =>

=> 67^2 возможных кандидатов

Но были дважды учтены те случаи когда обе точки лежат на одной прямой. Таких пар $C_{68}^2 = \frac{68\cdot 67}{2}$

Количество правильных пар:

$68\cdot 67^2 - \frac{68\cdot 67}{2}$

3

2) Теперь рассмотрим $y=x$

(Центральная точка имеет меньшие кандидаты)

Всего 68 точек на второй прямой ($y=x$)

Для каждой из этих точек аналогично первому случаю есть 67^2 точек, но в этот раз

№4 Черновик.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+ 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = a$

$x^2y^2 = b \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 = a^2 - 2b$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 - 2b + 7b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \quad | \cdot 5 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{30}{a} - 5b = -50 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$$

$a^2 - \frac{30}{a} = 31 \quad | \, a$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a = -1 \qquad 5b = 80$

$b = 16$

$x^2+y^2 = -1 \qquad x^2y^2 = 16$

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 0a^2 - 31a - 30 & a+1 \\ \hline a^3 + a^2 & a^2 - a - 30 \\ \hline \quad -a^2 - 31a & \\ \quad -a^2 - a & \\ \hline \qquad -30a - 30 & \\ \qquad -30a - 30 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

36

$5b = 45$

9

Чистовик
Вариант 10

A

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 = a \\ x^2y^2 = b \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 - 2b + 7b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \quad \Big| \cdot(-5) \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-30}{a} - 5b = -50 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$$

$$a^2 - \frac{30}{a} = 31 \quad \Big| \cdot a \neq 0$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

Заметим, что $a=-1$ является корнем.

$$\cancel{a^3 - 31a - 30 \;|\; a+1}$$
$$\cancel{a^3 + a^2 \;|\; a^2}$$

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 0a^2 - 31a - 30 & a+1 \\ \underline{a^3 + a^2} & a^2 - a - 30 \\ \quad -a^2 - 31a & \\ \quad \underline{-a^2 - a} & \\ \qquad -30a - 30 & \\ \qquad \underline{-30a - 30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

1

211007127 (U362219 M1276147)

① $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \text{ — невозможно} \\ x^2y^2=16 \end{cases}$

$x^2=\frac{16}{y^2}$

$\frac{16}{y^2}+y^2=-1 \mid \cdot y^2 \neq 0$

$y^4+y^2+16=0$

$y^2=t, \quad t>0$

$t^2+t+16=0$

$D<0.$

2) $a^2-a-30=0$

$a=6$

$a=-5$ невозможно.

$36+5b=81$

$5b=45$

$b=9$

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$

$x^2=\frac{9}{y^2}$

$x^2=\frac{9}{3}$

$\frac{9}{y^2}+y^2=6 \mid y^2$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y^4-6y^2+9=0$

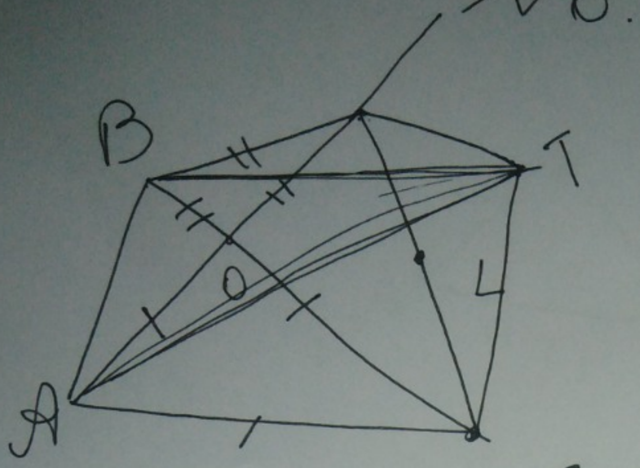
$(y^2-3)^2=0$

$y^2=3$

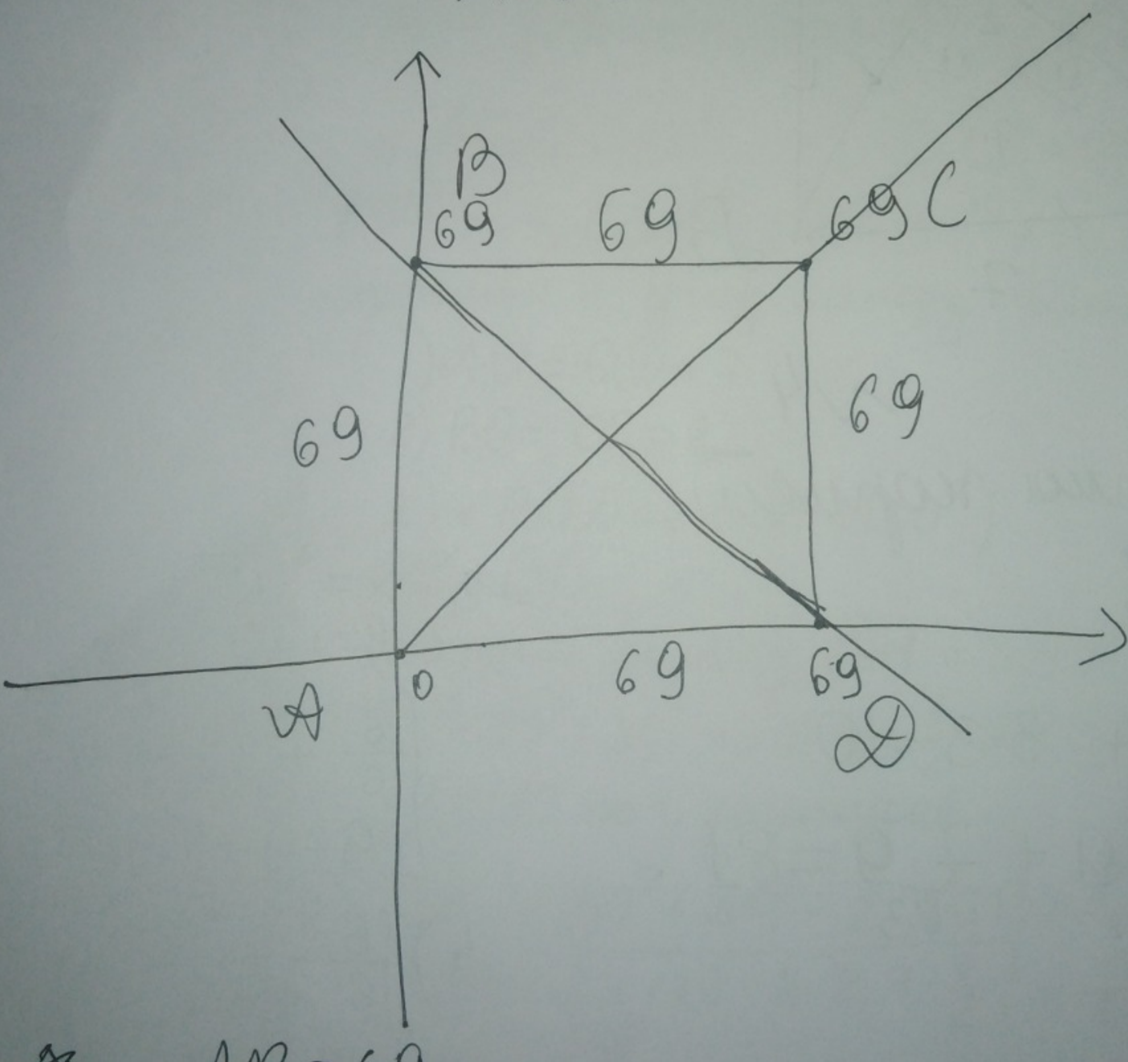
$y=\pm\sqrt{3}$

$(\sqrt{3};\sqrt{3}), (\sqrt{3};-\sqrt{3}), (-\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{-3};\sqrt{3})$

№6.



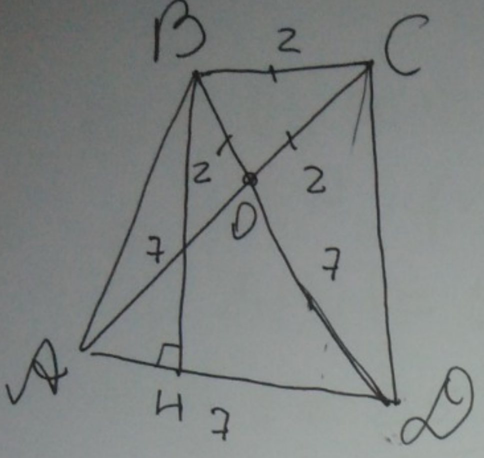
№5



$AB = 69$

$$AC = \sqrt{69^2 + 69^2} = \sqrt{69^2(1+1)} = 69\sqrt{2}.$$

Чудновский 6



б) $\triangle AOD$ равносторонний $\Rightarrow AO = OD = AD = 7$

$\triangle BOC$ равносторонний $\Rightarrow BO = OC = BC = 2$

$\angle AOD = 60^\circ \Rightarrow \angle BOA = 180 - 60 = 120^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 180 - 120^\circ \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$ по 2 сторонам и углу между ними:

(1) $AO = OD = 7$

2) $BO = OC = 2$

3) $\angle BOA = \angle COD = 120^\circ$)

$AB = BC$

Проведём высоту $BH \Rightarrow \triangle AHB$ - прямоуг, $\angle ABH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2} AB =$

$\triangle ABO$ по т. косинусов:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos 120^\circ$$

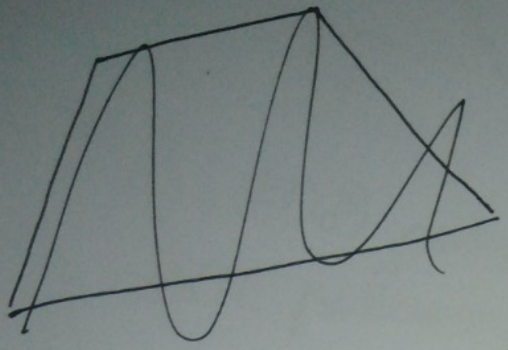
$$AB = \sqrt{4 + 49 - \cancel{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{53 - 14} = \sqrt{39}$$

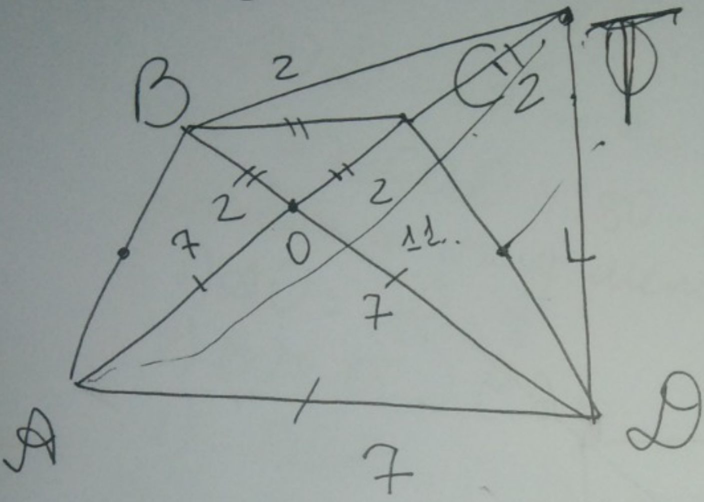
$$AH = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$BH = \sqrt{49 - \frac{39}{4}} = \frac{\sqrt{157}}{2}$$

211007127 (U362219 M1276147)

№6.





№4

Проверка корней.

1) $x = \sqrt{3}$
$y = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \frac{6}{6} + 3 \cdot 3 = 10 \\ 9 + 9 + \underbrace{7 \cdot 9}_{63} = 81 \end{cases}$$

2) $x = \sqrt{3}$
$y = -\sqrt{3}$

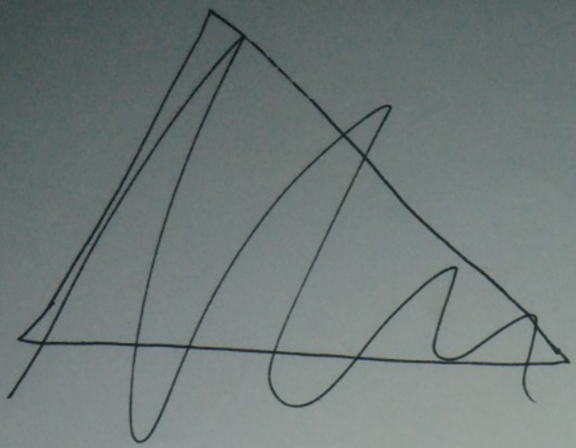
$$\begin{cases} \frac{6}{6} + 3 \cdot 3 = 10 \\ 9 + 9 + 7 \cdot 9 = 81 \end{cases}$$

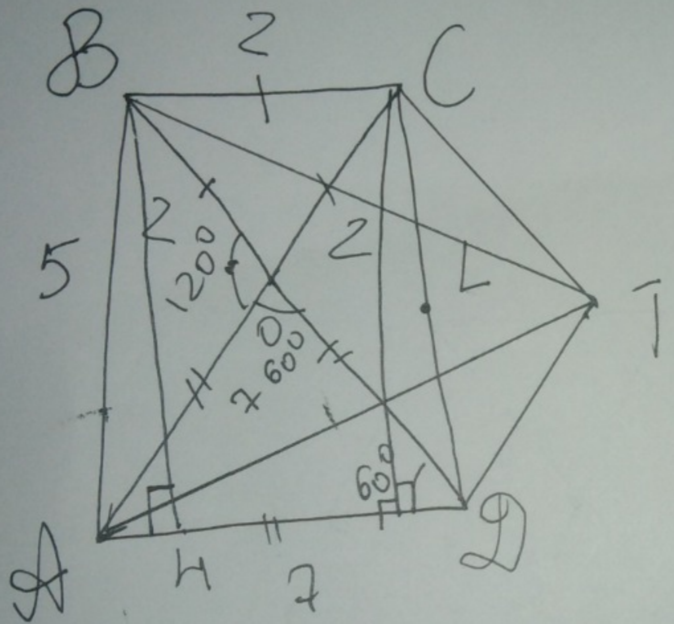
3) $x = -\sqrt{3}$
$y = +\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \frac{6}{6} + 3 \cdot 3 = 10 \\ 9 + 9 + 7 \cdot 9 = 81 \end{cases}$$

4) $y = -\sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \frac{6}{6} + 3 \cdot 3 = 10 \\ 9 + 9 + 7 \cdot 9 = 81 \end{cases}$$





△ AOD - равносторонний =>

$AD = AO = OD = 7.$

△ BOC равносторон =>

$BO = OC = BC = 2$

$AB^2 = 4 + 49 - \cancel{2}\cdot 4\cdot 7\cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}$

$AB = \sqrt{4+49-4\cdot 7} = \sqrt{53-28} = \sqrt{25} = 5$

т.к. ~~Треуг.~~ △ABO = △COD => CD = AB = 5

A H 7

ВН - высота

△ АВН прямоуг

$\angle ABH = 90 - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AH =$

$= \frac{1}{2} 5 = 2{,}5$ по св. угла в 30°.

$BH = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2+7}{2} = \frac{9 \cdot 5\sqrt{3}}{4} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$.

$\angle \frac{3}{\cancel{4}9} \cdot 4$ 196 - 39 = 157

196

211007127 (U362219 M1276147)