Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007053**

ID профиля: **367003**

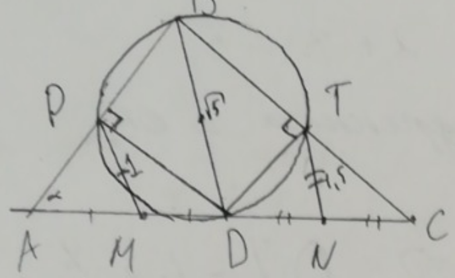
Вариант 10

(Чистовик)

№1.

$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ - ?



$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ т.к. опир на диам.

$\Rightarrow TN = NC$ т.к. в прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе = половине гипотенузы

аналогично

$PM = AM$ т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow$

$\angle PMA = \angle TND$ как соответственные а секущей AC

$\Rightarrow \triangle PMA \sim \triangle TND$ по двум сторонам и углу мщу ними

Пусть ~~∠PMA~~ $\angle PAM = \alpha$, тогда

$\angle TDN = \alpha$ т.к $\triangle$-ки подобны

$= \angle DTN$ т.к. $\triangle TND$ равнобедренный

$\Rightarrow \angle CTN = 90^\circ - \alpha = \angle NCT$

$\Rightarrow \angle \cancel{B}\, ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA =$

$= 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$

Ответ на пункт а

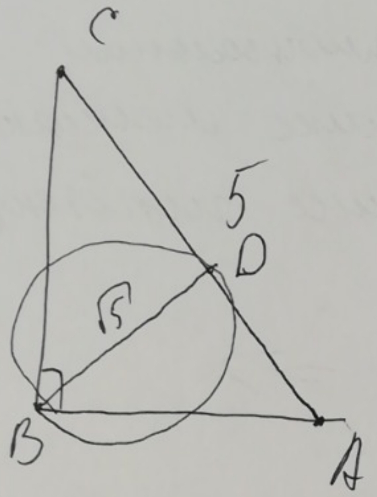
1

211007053 (U367003 M1275026)

5) $MP = 1$ (Черновик)

$NT = \frac{3}{2}$ $BD = \sqrt{5}$ $S_{ABC} - ?$

$AC = \underbrace{2MP + 2NT}_{\text{из равнобедренных } \triangle \text{ов}} = 2 + 3 = 5$



$AP = x \Rightarrow DT = 1,5x$

$DT = BP$ тк прямоугольник

$AP = \cancel{2x}\ 2,5x$

$PD = \sqrt{5 - 2,25x}$

Получается $BC = 4$

$AB = 3$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

Ответ на п.5

2

211007053 (U367003 M1275026)

№2. (чистовик)

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

3

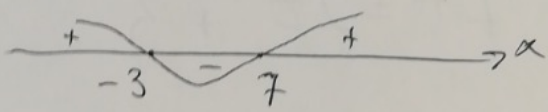
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 & x \geq -3 \\ 7-x \geq 0 & x \leq 7 \\ -x^2+4x+21 \geq 0 & x^2-4x-21 \leq 0 \end{cases}$$

$D = 16 + 84 = 100$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 10}{2} = 7; -3$

ОДЗ

$x \in [-3; 7]$



$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 7 - x = 4(-x^2+4x+21) - 16\sqrt{-x^2+4x+21} + 16$

$14\sqrt{-x^2+4x+21} = 4(-x^2+4x+21) + 6$

$7\sqrt{-x^2+4x+21} = -2x^2+8x+45$

$\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right) =$

$= \left(2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right)$

$x+3-7+x = 2(x+3)\sqrt{7-x} + 2(7-x)\sqrt{x+3} - 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right)$

$2x-4 = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}\right)$

$2x^2-8x-45 \leq 0 \quad D = 64+360 = 424$

$45 \cdot 8 = 360 \quad 22 \cdot 22 = 44 \; 44$

$49 \cdot 4 = 196 \quad 49 \cdot 21 = 49 \; 98 \; 1029$

$-49x^2+196x+1029 = 4x^4-32x^3-116x^2+720x+45^2$

$4x^4-32x^3-67$

$(-2x^2+8x+45)(-2x^2+8x+45) =$

$= 4x^4-16x^3-90x^2-16x^3+64x^2+360x-$

$-90x^2+360x+45^2$

$-116 + 49 = -67$

Зачёркнутое – не решение

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2+4x+21}$ №2 чистовик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\left(\sqrt{(x+3)(7-x)} - 2\right)$

$x+3-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+7-x = 4\left(-x^2+4x+21-4\sqrt{(x+3)(7-x)}+4\right)$

$\cancel{10}\ 5-\sqrt{(x+3)(7-x)} = -2x^2+8x+50-8\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$7\sqrt{(x+3)(7-x)} = -2x^2+8x+45$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = t$

$7t = 2t^2+3$ $\quad 2t^2-7t+3=0$

$D = 49-24 = 25 = 5^2$

$t_{1,2} = \frac{7\pm5}{4} = \frac{1}{2};\ 3$

1) $\sqrt{-x^2+4x+21} = \frac{1}{2}$

$-x^2+4x+21 = \frac{1}{4}$ $\quad -4x^2+16x+83=0$

$D = 256+16\cdot83 =$

$= 16(16+83) = 16\cdot99 =$

$= 4\cdot4\cdot9\cdot11 = (4\cdot3\cdot\sqrt{11})^2$

4

$x_{12} = \frac{-16\pm12\sqrt{11}}{-8} = \frac{16\mp12\sqrt{11}}{8} =$

$= \frac{4\mp3\sqrt{11}}{2}$

2) $-x^2+4x+21=3$ $\quad -x^2+4x+18=0$ $\quad D = 16+72 = 88$

$x_{12} = \cancel{\frac{4\pm2\sqrt{22}}{2}}\ \frac{4\pm2\sqrt{22}}{2} =$

$= 2\pm\sqrt{22}$

Ответ: $x_{12} = \frac{4\pm3\sqrt{11}}{2}$ $\quad x_{34} = 2\pm\sqrt{22}$

211007053 (U367003 M1275026)

(чистовик)

Теперь проверить найденые значения на ОДЗ $x \in [-3; 7]$

$x_1 = 2+\sqrt{22}$ корень

$x_2 = 2-\sqrt{22}$ корень

$x_3 = \frac{4+3\sqrt{11}}{2} > 7$ => не корень

$x_4 = \frac{4-3\sqrt{11}}{2} \overset{>}{\vee} -3$ => подходит

$4-3\sqrt{11} \vee -6$

$10 \vee 3\sqrt{11}$

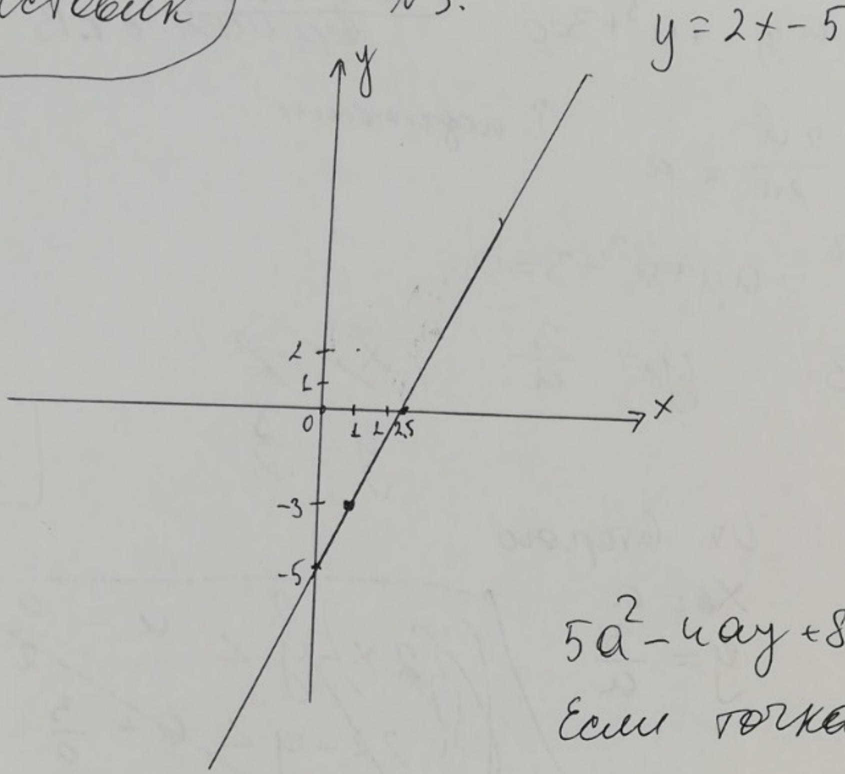
$100 \overset{>}{\vee} 99$

Ответ: $x_{12} = 2 \pm \sqrt{22}$

$x_3 = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

$\boxed{5}$

(чистовик) №3.



$$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$$

Если точка A, то одно решение $\Rightarrow$

$$5a^2 + a(12x - 4y) + 8x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

$$D = 0 = \cancel{12x^2 - 4ay}\,(4(3x - y))^2 - 160x^2 + 80xy - 20y^2 =$$

$$= 144x^2 - 96xy + 16y^2 - 160x^2 + 80xy - 20y^2 =$$

$$= -16x^2 - 16xy - 4y^2 = 0$$

$$+4x^2 + 4xy + y^2 = 0 \qquad \cancel{D = 16y^2 - 16y^2}$$

$$(2x + y)^2 = 0 \qquad y = -2x$$

при каком a и $y = -2x$ имеет 1 решение

$$5a^2 + a(12x + 8x) + 8x^2 + 8x^2 + 4x^2 = 0$$

$$5a^2 + a \cdot 20x + 20x^2 = 0$$

$$a^2 + 4ax + 4x^2 = 0 \qquad D = 16 \qquad a = y \qquad x = \frac{-y}{2}$$

$$(a + 2x)^2 = 0 \qquad a = -2x$$

$\boxed{6}$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ (Шестовик вершина в т. В)

$x_в = \frac{2a^2}{2a} = a$ ↑ подставим

$\cancel{a^3}-2\cancel{a^3}-ay+\cancel{a^3}+3=0$

$ay=3$ $\quad y_в=\frac{3}{a}$ $\quad \cancel{x=\frac{3}{x}}$

$y=\frac{3}{x}$

$\boxed{7}$

От первого

$y=-2x$

$a=-2x$

$y=a$

$x=\frac{-a}{2}$

От второго

$x_в=a$

$y=\frac{3}{a}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y<a-\frac{a}{2}\\2x-y<a+\frac{3}{a}\end{cases}\\\begin{cases}2x-y>a-\frac{a}{2}\\2x-y>a+\frac{3}{a}\end{cases}\end{array}\right.$

$2x-y<\frac{a}{2}$

$2x-y<\frac{a^2+3}{a}$

$\begin{cases}5<\frac{a}{2}\\5<\frac{a^2+3}{a}\end{cases}$

$5a$

$\begin{cases}a>10\\a^2-5a+3>0\end{cases}$ $a>0$

$D=25-12=13$

$a_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$a>10$

$a<0$

$a^2-5a+3<0$

$\begin{cases}5>\frac{a}{2}\\5>\frac{a^2+3}{a}\end{cases}$

$\begin{cases}a<10\\a^2-5a+3<0\end{cases}$ $a>0:$

$a<0:$

$a^2-5a+3>0$

a $\quad \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ $\quad -$ $\quad \frac{5+\sqrt{13}}{2}$

~~Ответ: $a\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2};\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$~~

211007053 (U367003 M1275026)

Чистовик

1) $2x-y<5$

$\begin{cases}-a-a<5\\ 2a-\frac{3}{a}<5\end{cases}$ $\begin{cases}a>-2,5\\ \frac{2a^2-3}{a}<5\end{cases}$

$a>-2,5$

$a>0$:

$2a^2-5a-3<0$

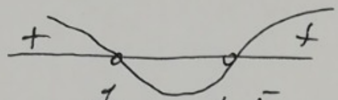
$D=25-24=1$

$a=\frac{5\pm1}{4}=\frac{3}{2};1$

$(1;1,5)$

$a<0$:

$2a^2-5a-3>0$



$a\in(-2,5;0)\cup(1;1,5)$

$\cancel{a\in(-2,5;1)\cup(1;1,5)\cup(1,5;+\infty)}$

2) $2x-y>5$

$\begin{cases}a<-2,5\\ \frac{2a^2-3}{a}>5\end{cases}$

$a<0$

$2a^2-5a-3<0$

$a\in\varnothing$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-2,5;0)\cup(1;1,5)\\ a\in\varnothing\end{array}\right.$

Ответ: $\cancel{a\in(-2,5;1)\cup(1;1,5)\cup(1,5;+\infty)}$

$a\in(-2,5;0)\cup(1;1,5)$

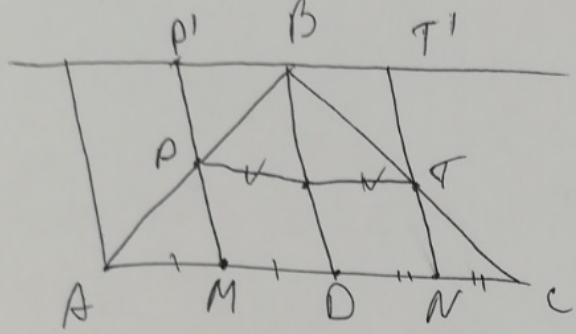
$\boxed{8}$

211007053 (U367003 M1275026)

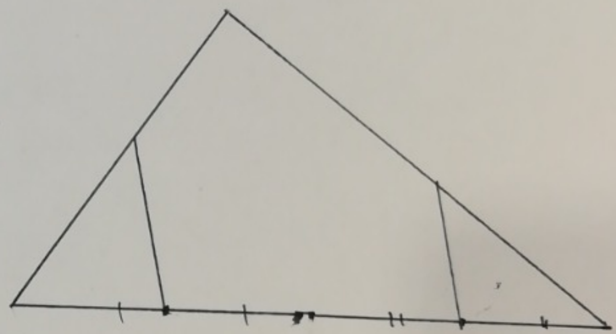
$\frac{AP}{BP} =$

$CT \cdot BC = CD \cdot CX$

$AP \cdot AB = AX \cdot AD$



$P'T' = MN$



$180 - (\alpha + \beta)$

круг

Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007053**

ID профиля: **367003**

Вариант 10

№4 Чистовик

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2 = a \quad y^2 = b$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b} + ab = 10 \\ a^2+b^2+7ab = 81 \end{cases}$$

$ab = 10 - \dfrac{6}{a+b}$ $\quad \cancel{a^2+b^2+70-\dfrac{42}{a+b}=81}$

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b} + ab = 10 \\ (a+b)^2 + 5ab = 81 \end{cases}$$

$a+b = t$

$ab = d$

$\begin{array}{r} +81 \\ 30 \\ \hline 111 \end{array}$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{t} + d = 10 \\ t^2 + 5d - 81 = 0 \end{cases}$$

$6 + dt = 10t$

$t(10-d) = 6 \qquad t = \dfrac{6}{10-d} \qquad \dfrac{36}{(10-d)^2} + 5d - 81 = 0$

$\cancel{36 + 5d(10-d)^2 - 81(10-d)^2 = 0}$

$d = 10 - \dfrac{6}{t} \quad d = \dfrac{10t-6}{t} \qquad d = \dfrac{2(5t-3)}{t}$

$t^2 + \dfrac{10(5t-3)}{t} - 81 = 0 \qquad \cancel{t^3+50t-111=0}$

$\cancel{t(t^2+50)-111=0}$

$t^3 + 50t - 30 - 81t = 0$

$\cancel{t^3+131t-30=0} \qquad t^3 - 31t - 30 = 0$

$t(t^2-31) = 30 \qquad \underline{t_1 = 6}$

$$\begin{array}{l|l} t^3+0t^2-31t-30 & t-6 \\ \cline{2-2} -\;t^3-6t^2 & t^2+6t+5 \\ \hline \quad 6t^2-31t & \\ \quad 6t^2-36t & \\ \hline \qquad 5t-30 & \\ \qquad 5t-30 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$t^2+6t+5 = 0 \quad D = 36-20 = 16$

$t_{2,3} = \dfrac{-6\pm4}{2} = -5; -1$

1

211007053 (U367003 M1275027)

1) $d_1 = 10 - \frac{6}{6}$ $d_1 = 9$ $\boxed{\text{Чистовик.}}$

2) $d_2 = 10 - \frac{6}{-5}$ $d_2 = 11{,}2$

3) $d_3 = 10 - \frac{6}{-1}$ $d_3 = 16$

1) $a + b = 6$ $a = 6 - b$

$ab = 9$ $\cancel{ab}\,(6-b)b = 9$ $-b^2 + 6b = 9$

$\cancel{b^2 - b\cdot 9 + 9 = 0}$ $b^2 - 6b + 9 = 0$

$\cancel{D = 36}$

$x = \pm\sqrt{3}$ $b = 3$

$y = \pm\sqrt{3}$ $a = 3$

2) $a + b = -5$ – быть не может, т.к.

$ab = 11{,}2$ $x^2 + y^2 \neq -5$

3) $a + b = -1$ – быть не может, т.к

$ab = 16$ $x^2 + y^2 \geq 0 > -1$

Ответ: Ответы в виде $(x; y)$

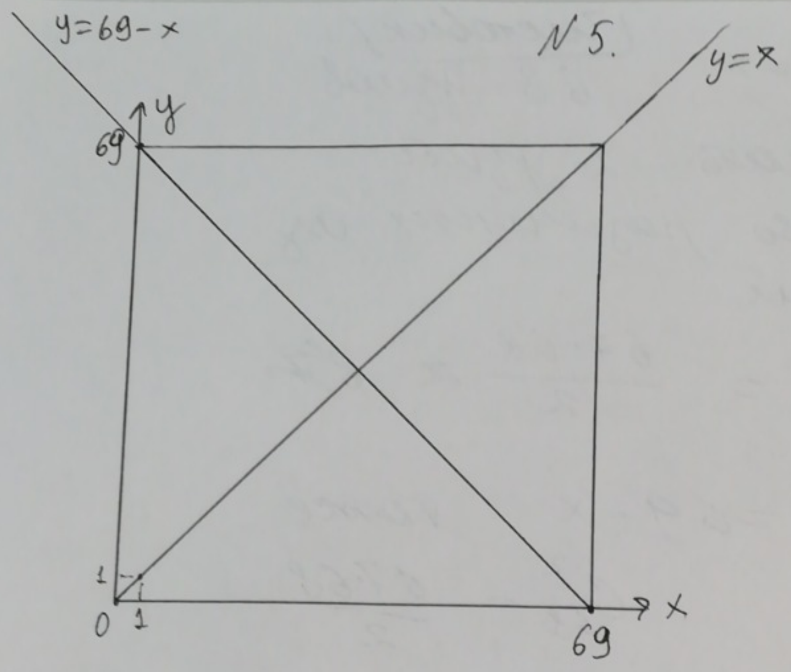
1) $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$
2) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
3) $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$
4) $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

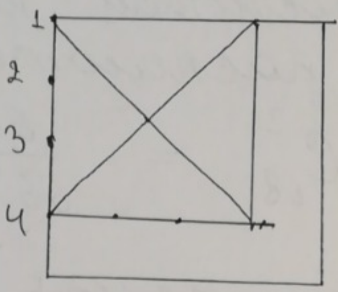
$\boxed{2}$

№ 5.

(Чистовик)

Не включая границы квадрата!!!





- Возьмём точку (1;1)
- Рассмотрим второе возможной узлы, не лежащие на прямой $y=x$
- сумма всех узлов − сумма узлов || − сумма узлов на прямой $y=x$

$$68\cdot68-(68\cdot2-1)-67=68\cdot66-66=$$

$= \cancel{67\cdot68}\ 66\cdot67$ узлов для т. (1;1)

аналогично для всех точек прямой $y=x$

точек 68 шт т.е есть на прямой $y=x$

исключая взаимные на этой прямой

можно выбрать $66\cdot67\cdot68$ узлов

аналогично ~~да~~ для прямой $y=69-x$

Заметим, что $y=69-x$ и $y=x$ пересекаются не в узле.

$\Rightarrow$ ~~вз~~ вторых узлов $66\cdot67\cdot68\cdot2$

↳ исключая узлов на одной прямой $y=69-x$ или $y=x$

Посчитаем их

3

211007053 (U367003 M1275027)

на прямой $y=x$ (Чистовик)
68 узлов
и если выбирать 2 узла
посчитаем кол-во различных их расположений

$$C_{68}^{2} = \frac{68!}{66!\,2!} = \frac{67\cdot 68}{2}$$

на прямой $y=69-x$ тоже

$$C_{68}^{2} = \frac{67\cdot 68}{2}$$

$\Rightarrow$ кол-во способов =

$= 66\cdot 67\cdot 68\cdot 2 + 67\cdot 68 =$

$= 67\cdot 68(66\cdot 2+1) = 67\cdot 68\cdot 133 =$

$= 605948$

$$\begin{array}{r} \times\ 67 \\ 68 \\ \hline 536 \\ +\ 402\ \ \\ \hline \times\ 4556 \\ 133 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 4556 \\ 133 \\ \hline 13668 \\ 13668\ \ \\ 4556\ \ \ \ \\ \hline 605948 \end{array}$$

Ответ: 605948

4

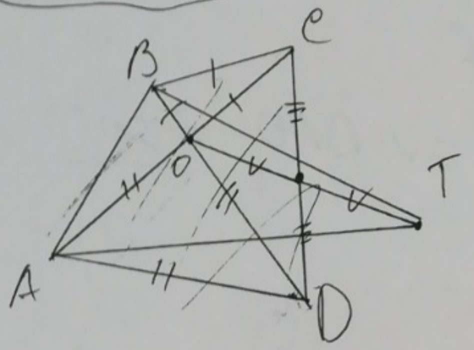
211007053 (U367003 M1275027)

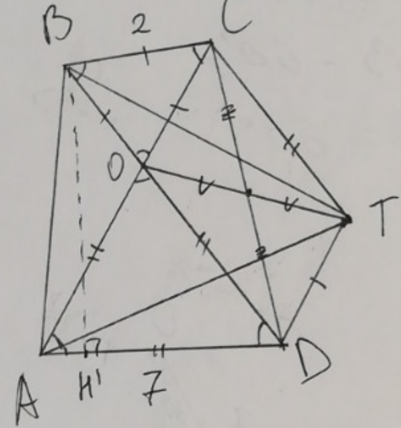
Чистовик

№6. $\angle COD = 120^\circ$

ABCD – равнобедренная трапеция

OCTD – //грамм





ABCD - равнобедр трапеция

т.к.
$BC \parallel AD$

т.к. $\triangle BOC \sim \triangle AOD$

и $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$

$\Rightarrow BA = CD$

$\Rightarrow$ чтд.

~~OCTB~~

OCTD – параллелограмм

т.к. диагонали делятся пополам

$\Rightarrow OD = CT$

$DT = OC$

Вокруг ABCD можно описать окр-ть

$\triangle BCT = \triangle BOA$ по ~~двум~~ 1-му признаку

1) $BC = BO$

2) $OA = CT$

3) $\angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = 60^\circ$ т.к. //грамм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle BCT = 120^\circ = \angle BOA}$

$\Rightarrow \angle CBT = \angle OBA = \alpha$

$\Rightarrow \underline{\angle TBA} = \angle TBO + \alpha = \angle OBC = \underline{60^\circ}$

5

Аналогично $\triangle TDA = \triangle BOA$ $\Rightarrow$ (Чистовик)

$\Rightarrow \angle TAD = \angle BAO = \beta$

$\Rightarrow \underline{\angle TAB} = \angle TAO + \beta = \angle DAO = \underline{60^\circ}$

$\Rightarrow$ То есть:

1) $\angle TAB = 60^\circ$

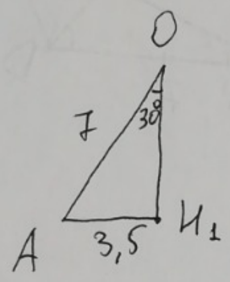
2) $\angle TBA = 60^\circ$ $\Rightarrow \triangle TBA$ правильный

чтд

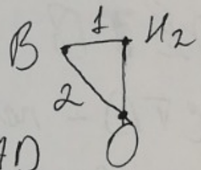
б) $BC = 2$

$AD = 7$

$\times\begin{array}{r}3{,}5\\3{,}5\\\hline 175\\105\\\hline 12{,}25\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}49{,}00\\12{,}25\\\hline 36{,}75\end{array}$



$OH_1 = \sqrt{49 - 3{,}5^2} = \sqrt{36{,}75}$



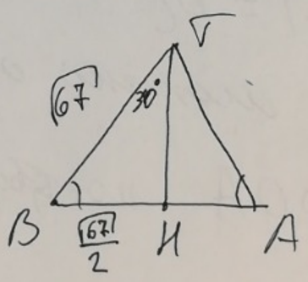
$OH_2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$S_{ABCD} = (OH_1 + OH_2) \cdot \dfrac{BC+AD}{2}$

Теор. кос для $\triangle BCT$:

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos(\underbrace{\angle BCT}_{120^\circ})\, BC \cdot CT =$

$= 4 + 49 + 14 = 67$



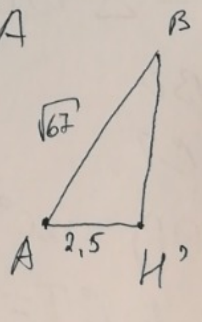
$TH = \sqrt{67 - \frac{67}{4}} =$

$= \dfrac{\sqrt{67 \cdot 3}}{2}$

$BH = \dfrac{BT}{2} = \dfrac{\sqrt{67}}{2}$

$AH' = \dfrac{AD - BC}{2} = 2{,}5$

$\times\begin{array}{r}7{,}5\\7{,}5\\\hline 375\\525\\\hline 66{,}25\end{array}$



$BH' = \sqrt{67 - 6{,}25} = \sqrt{60{,}75}$

$S_{ATB} = \cancel{\frac{\sqrt{67}}{2}} \dfrac{BA \cdot TH}{2} = \dfrac{\sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = BH' \dfrac{BC+AD}{2} = \sqrt{60{,}75}\ \dfrac{9}{2}$

$\dfrac{S_{ATB}}{S_{ABCD}} = \dfrac{67\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot 9 \cdot \sqrt{60{,}75}} = \dfrac{67\sqrt{3}}{18\sqrt{60{,}75}}$ — Ответ: $\dfrac{67\sqrt{3}}{18\sqrt{60{,}75}}$

6

Черновик

Возьму точку (1; 1) Рассмотрю все возможные вторые точки, кроме тех, что лежат на прямых $y = 69 - x$ и $y = x$.

Для этого посчитаю общее кол-во узлов (без границ квадрата)

это $1 - 68$ по ~~оси~~ Ox

$1 - 68$ по Oy Черновик

$\Rightarrow 68 \cdot 68$ ← это кол-во узлов

из этого кол-ва нужно вычесть узлы, которые с т. (1; 1) составят прямые ‖ осям ~~либо которые~~ ~~$\in y = 69 - x$~~ ~~принадлежат~~ и $y = x$

Узлов ‖ осям $68 \cdot 2 - 1$

Узлов принадл. $y = x$: ~~$68 \cdot 2 - 1$~~ 67

То есть точка (1; 1) не учитывая эти прямые может соединиться с $68 \cdot 68 - (68 \cdot 2 - 1) - 67 =$

$= 68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 + 2 - 67 = 68 \cdot 66 - 65$ узлами

Далее возьмём точку (2; 2) на прямой $y = x$

у неё также $68 \cdot 64 + 2$ ~~узлов~~ вторых узлов

на прямой $y = x$ таких точек 68 $\Rightarrow$

$(68 \cdot 64 + 2) \cdot 68$ число парных узлов для точек на прямой $y = x$

на прямую $y = 69 - x$ парных узлов $(68 \cdot 64 + 2) 68$ т.к. прямые $y = 69 - x$ и $y = x$ пересекаются в точке, не являющейся узлом.

$180° - 120° + \beta - \varphi - \gamma = 60° - \alpha$

$\beta + \alpha = \varphi + \gamma$

$180° - 120° + \alpha - \cdot$

Черновик

211007053 (U367003 M1275027)