Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006929**

ID профиля: **855055**

Вариант 10

чистовик 4

если I $a > 2 \cdot \frac{a-3}{4} - 5 \Rightarrow A$ выше $y = 2x-5$

II $a < 2 \cdot \frac{a-3}{4} - 5 \Rightarrow A$ ниже $y = 2x-5$.

$a > \frac{a-3}{2} - 5$

$2a > a - 3 - 10$

$a > -13$

чистовик 3.

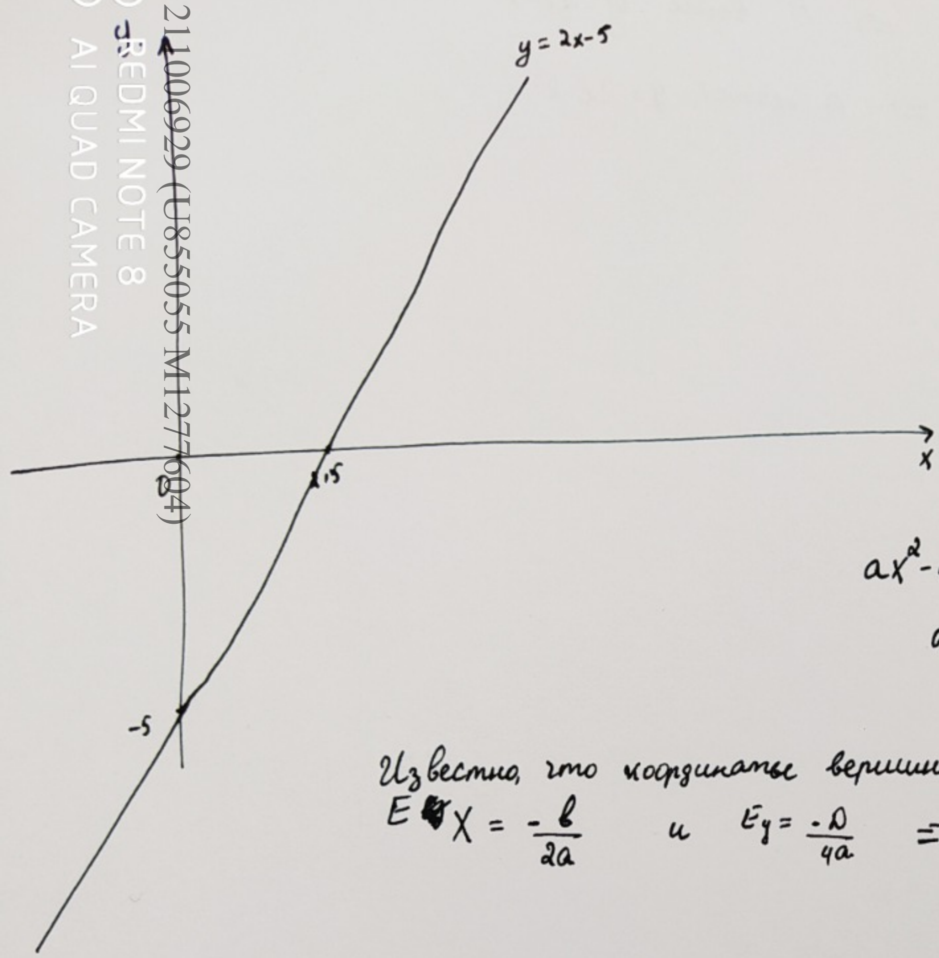
координаты A

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0.$

парабола.

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

B вершина



$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3.$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}.$

заметим, что $a\neq 0$

$D=4a^2-4(a^2+\frac{3}{a})=-\frac{12}{a}$

Известно, что координаты вершины парабола (E) $ax^2+bx+c=0$

$E_x=-\frac{b}{2a}$ и $E_y=\frac{-D}{4a}$ $\Rightarrow$ $B_x=-\frac{-2a}{2}=a$

$B_y=\frac{\frac{-12}{a}}{4}=-\frac{3}{a}.$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$8x^2-4xy+12ax+y^2-4ay+5a^2=0$

$8x^2-x(4y-12a)+y^2-4ay+5a^2=0$

$D=(4y-12a)^2-4\cdot 8\cdot(y^2-4ay+5a^2)=-16(y-a)^2$

$(y-a)^2\geq 0$

чтобы уравнение имела решение, нужно, чтобы $y=a$

$y=a$

$x_{1;2}=\frac{4y-12a}{8\cdot 2}=\frac{y-3}{2\cdot 2}=\frac{a-3}{2\cdot 2}=\frac{a-3}{4}.$

$A\left(\frac{a-3}{4};a\right)$

$B\left(a;-\frac{3}{a}\right)$

$\frac{a-3}{4}\cdot 2-5\neq a$

$\cancel{\frac{a-3}{2}\neq 5}$ $\cancel{a-3\neq 10}$ $\cancel{a\neq 7}$

$2a-$

$\frac{a-3}{2}-5\neq a$

$a-3-10\neq 2a$

$a\neq -13.$

$2a-5\neq -\frac{3}{a}$

$2a+\frac{3}{a}\neq 5$

$2a^2-5a+3\neq 0$

$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1.$

$a_{1;2}=\frac{5\pm 1}{4}=\frac{6}{4};\ 1.$ $a\neq 1;\ 1{,}5$

2)

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 7-x>0 \\ 21+4x-x^2>0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x>-3 \\ x<7 \end{matrix} \quad x\in(-3;7).$$

заметим, что $21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4.$$

$$(x+3)+(7-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4\left((x+3)(7-x) - 4\sqrt{(x+3)(7-x)} + 4\right)$$

$$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) - 16\sqrt{(x+3)(7-x)} + 16$$

$$4(x+3)(7-x) - 14\sqrt{(x+3)(7-x)} + 6 = 0.$$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = t.$

$$4t^2 - 14t + 6 = 0.$$

$$D = 14^2 - 4\cdot4\cdot6 = 4(7^2-24) = 4\cdot25 = 100$$

$$t_{1;2} = \frac{14\pm10}{8} = 3; \frac{1}{2}.$$

I вариант

$(x+3)(7-x) = 9$

$-x^2+4x+21=9.$

$-x^2+4x+21-9=0 \qquad x^2-4x-12=0$

$D = 16+4\cdot12 = 64.$

$x_{1;2} = \frac{4\pm8}{2} = 6; -2.$

$6 \in (-3;7).$

$-2 \in (-3;7).$

II вариант. $(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}.$

$-x^2+4x+21 = \frac{1}{4} \qquad -x^2+4x+20{,}75=0.$

$4x^2-16x-83=0$

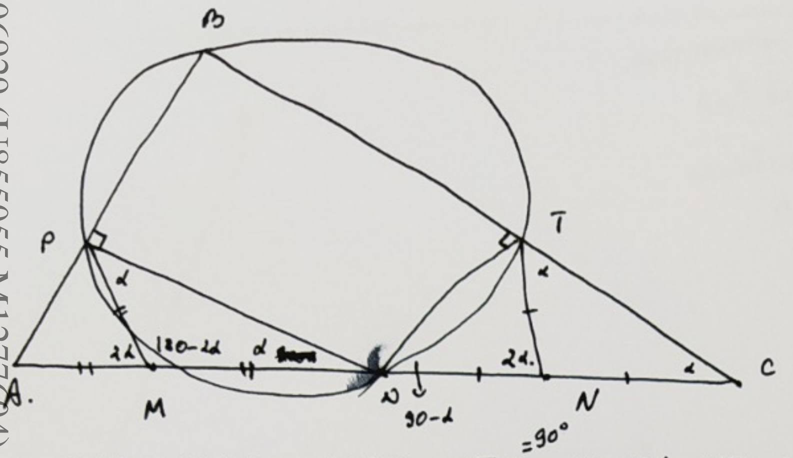
$D = 16^2+4\cdot4\cdot83 = 16(16+83) = 16\cdot99 = 4^2\cdot3^2\cdot11$

$x_{1;2} = \frac{16\pm12\sqrt{11}}{8} = \frac{4\pm3\sqrt{11}}{2} \qquad -3 < \frac{4+3\sqrt{11}}{2} < 7$

$-3 < \frac{4-3\sqrt{11}}{2} < 7.$

Ответ. $\frac{4-3\sqrt{11}}{2}; \frac{4+3\sqrt{11}}{2}; -2; 6$

1.



а). заметим, что $\angle BPD = \angle DTB$, так как они опираются на диаметр BD.

известно, что в прямоугольном треугольнике TDC ($\angle T = 90°$) $TN = ND = NC$ (N середина DC).

обозначим $\angle NCT$ через α, $\angle NCT = \angle NTC = \alpha$, $\angle TND = 2\alpha$, $\angle TND = \angle NTD = 90 - \alpha$

$PM \parallel TD \Rightarrow \angle PMD = \angle TND = 180 - 2\alpha$

$\angle PAM = 90 - \alpha = \angle APM$, и $\angle MDP = \angle MPD = \alpha$

заметим, что $\angle PDT = 180 - \angle PDA - \angle TDN = 90°$

так как окружность проходит через $P; B; T; D \Rightarrow \angle PBT + \angle PDT = 180°$

$\angle ABC = 90°$ $\qquad \angle PBT = 90°$

б). $MP = 1$ $\quad NT = \frac{3}{2}$ $\quad BD = \sqrt{5}$

$AM = MP = MD = 1$ $\quad$ ~~DD~~ $= TN$ $\quad TN = DN = NC = \frac{3}{2}$

$AD = 2$ $\qquad DC = 3.$

в $\triangle TDC$

$\frac{DT}{\sin\alpha} = 3$ $\quad DT = 3\sin\alpha$ $\quad \frac{TC}{\cos\alpha} = 3$ $\quad TC = 3\cos\alpha$, $PBTD$ прямоугольник $\Rightarrow PB = DT = 3\sin\alpha$

в $\triangle PDA$ $\quad \frac{AP}{\sin\alpha} = 2.$ $\quad AP = 2\sin\alpha$ $\quad \frac{PD}{\cos\alpha} = 2.$ $\quad PD = 2\cos\alpha$ $\qquad PD = BT = 2\cos\alpha$

известно, что BDP прямоугольный $\triangle$, $BD = \sqrt{5}$; $PB = 3\sin\alpha$; $PD = 2\cos\alpha$.

$9\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 5 \quad \Rightarrow \quad 5\sin^2\alpha + 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 5$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$ $\quad$ так как $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AB = 5\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ $\quad BC = 5\cos\alpha = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006929**

ID профиля: **855055**

Вариант 10

чистовик 1

4.
$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{30}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases} \qquad (x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31.$$

обозначим x^2+y^2 через $t(=x^2+y^2)$. $\quad t^2 - \frac{30}{t} = 31. \quad t^3 - 30 - 31t = 0$

$t^3 - 31t - 30 = 0$

$t^3 - t - 30(t+1) = 0.$

заметим, что $x^2+y^2 \geq 0$. следовательно $t=-1$ и $t=-5$ значения не возможные

$t(t-1)(t+1) - 30(t+1) = 0$

$(t+1)(t^2-t-30) = 0 \qquad (t+1)(t+5)(t-6) = 0. \Rightarrow t = -1; -5; 6$

$D = 1+4\cdot30 = 11^2$

$t_{1;2} = \frac{1\pm11}{2} = 6; -5.$

(I вариант). $t = 6. = x^2+y^2$

$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10. \quad x^2y^2 = 9.$

$xy = \pm 3$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 6. \\ xy = \pm 3 \end{cases}$$

а). $xy = +3. \quad x = \frac{3}{y}. \quad \left(\frac{3}{y}\right)^2 + y^2 = 6.$

$\frac{9}{y^2} + y^2 = 6$

$y^4 - 6y^2 + 9 = 0$

$(y^2-3)^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 3. \quad y = \pm\sqrt{3}. \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}.$

в). $xy = -3. \quad x = \left(\frac{-3}{y}\right)$ (так как $\left(\frac{3}{y}\right)^2 = \left(-\frac{3}{y}\right)^2$ то новых решений мы не пол)

$y^2 + \frac{9}{y^2} = 6. \quad y^2 = 3 \quad y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

из пункта I получили следующие пары. $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

~~вариант II $t = -5 \quad x^2+y^2 = -5.$~~

~~$\frac{6}{-5} + x^2y^2 = 10. \quad x^2y^2 = 10 + \frac{6}{5} = \frac{56}{5}.$~~

~~$xy = \pm\sqrt{\frac{56}{5}}$~~

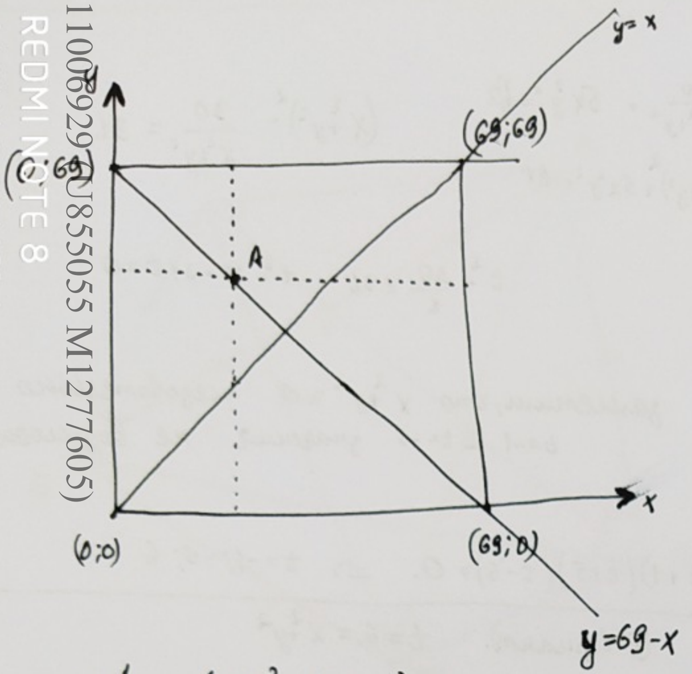
~~а) $xy = +\sqrt{\frac{56}{5}}.$~~

~~$x = \frac{\sqrt{\frac{56}{5}}}{y}. \quad \frac{\sqrt{\frac{56}{5}}}{y^2} + y^2 = -5. \quad y^4 + 5y^2 - \sqrt{\frac{56}{5}} = 0. \quad D = 25 + 4\cdot\sqrt{\frac{56}{5}}$~~

Ответ $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

чистовик $\underline{2}$

5.



если не считать границу, не то на каждой из прямых есть по 68 точек, которые нам интересны.

заметим, что при любой точке количество пар. не удовлетворяющих условиям равно $(67+67)=134$.

всего у нас есть 68^2 узлов, способов выбрать одну точку из прямых $y=x$ или $y=69-x$ (общих точек у них нет) $=136$

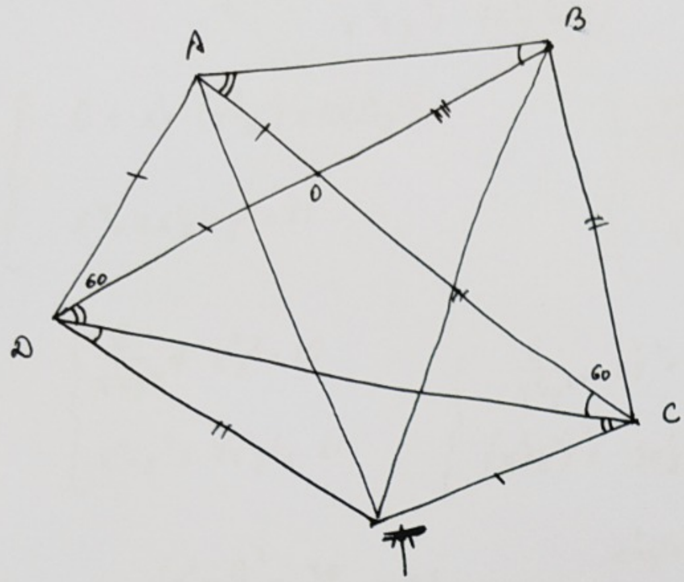
$$\frac{C_{136}^{1}\cdot\left(68^2-134-1\right)}{\cancel{2}}$$

количество точек после выбора 1-ого $=68^2-1$; из них 134 не удовлетворяют условия, (~~нужно разделить на 2, так как любой~~) но есть еще и повторения, те пары, оба точек которых лежат на $y=x$ или $y=69-x$ мы считали дважды.

их количество ~~$136-1-2=133$~~. (для каждой точки $=2$)

$$C_{136}^{1}\left(68^2-134-1\right)+136\cdot 2=136\left(68^2-134-1+2\right)=136\left(68^2-133\right)=136\cdot 4491$$

6.



заметим, что в 4-угольнике $DOCT$ OT и DC пересекаются и делятся по ровну в этой точке $\Rightarrow$ $DOCT$ параллелограм

$DO = TC$ $\quad$ $OC = DT$

$DO \parallel TC$ $\quad$ $OC \parallel DT$

$\angle TDC = \angle DCA$

$\angle TCD = \angle BDC$

Заметим, что $\triangle ADT = \triangle BTC$

$\angle BCT = \angle ADT$, $AD = TC$, $DT = BC$ $\Rightarrow$ $AT = BT$.

заметим, что $\angle DAC = \angle DBC = 60°$

$\Downarrow$

$ABCD$ можно описать окружность $\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD$.

$\triangle ABO = \triangle DOC$. $\Rightarrow DC = AB$

$DO = OA$, $OB = OC$, $\angle AOB = \angle DOC$ $\rightarrow$

Заметим, что $DBCT$ равнобедренная трапеция

так, как $DT = BC$ и $DB \parallel TC$.

$\Downarrow$

$BT = DC$.

$DC = AB$

$\Downarrow$

$AB = BT = AT$

$\Downarrow$

а) $\triangle ABT$ правильный

б) $BC = 2$. $AD = 7$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot DB \cdot \sin(60)}{2} = \frac{(7+2)\cdot(7+2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{81\cdot\sqrt{3}}{4}$$

~~$(AB = 2^2 + 7^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 7 = 4+49+14 = 53+)$~~

$AO = AD = 2$ $\quad BO = BC = 7$

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2\cos 120 \cdot AO \cdot BO = 4+49+2\cdot 7 = 53+14 = 67.$$

$AB = \sqrt{67}$

$$S_{ABT} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin 60}{2} = \frac{\sqrt{67}\cdot\sqrt{67}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 67}{4}.$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 67}{4} : \frac{81\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{67}{81}.$$

черновик

4. $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} 6 + x^2y^2(x^2+y^2) = 10(x^2+y^2) \\ x^4+7x^2y^2+y^4 = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{42}{x^2+y^2} + 7x^2y^2 = 70 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$9 = \frac{42}{x^2+y^2} + x^4+y^4$

$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{6\cdot 5}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$x^2+y^2 = 6$

$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31.$

$t^2 - \frac{30}{t} = 31$

$t^3 - 30 = 31t.$

$t^3 - 31t + 30 = 0.$

$t^3 - t + 30t - 30 = 0$

$t(t^2-1) - 30(t+1) = 0$

$(t+1)(t(t-1)-30) = 0$

$D = 1+4\cdot 30 = 121$

$(t+1)(t^2-t-30) = 0$

$t_{1;2} = \frac{1\pm 11}{2} = 6; -5$

$(t+1)(t-6)(t+5) = 0$

$x^2+y^2 =$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

$x^2+y^2 = -5$

$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$a=0$ или $b=0$

$5x^2y^2 = 81 - 25 = 56$

$x^2y^2 = \frac{56}{5}$

$(x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2 =$

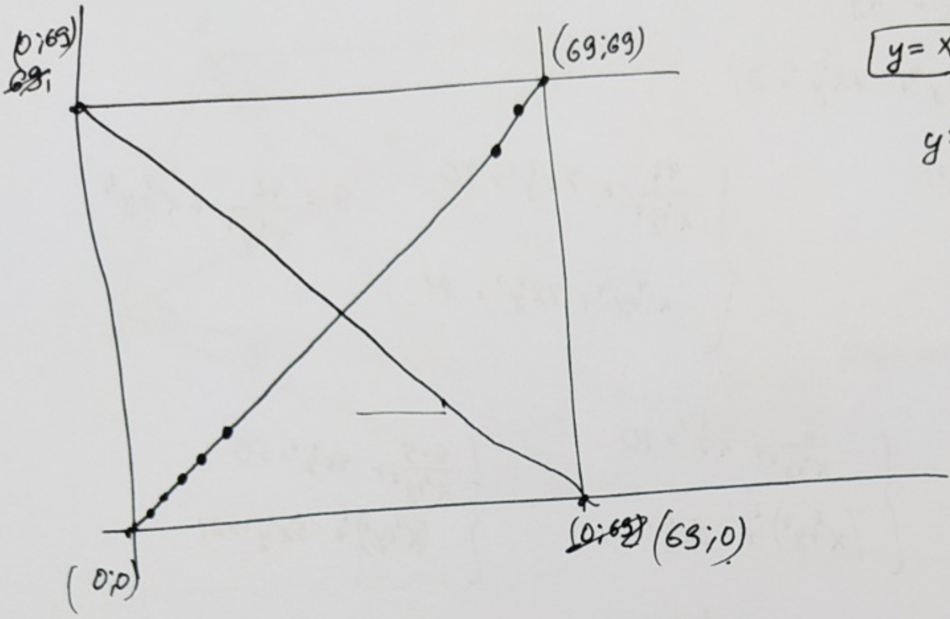
$25 \geq 4\cdot\frac{56}{5}$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

211006929 (U855055 M1277605)

черновик

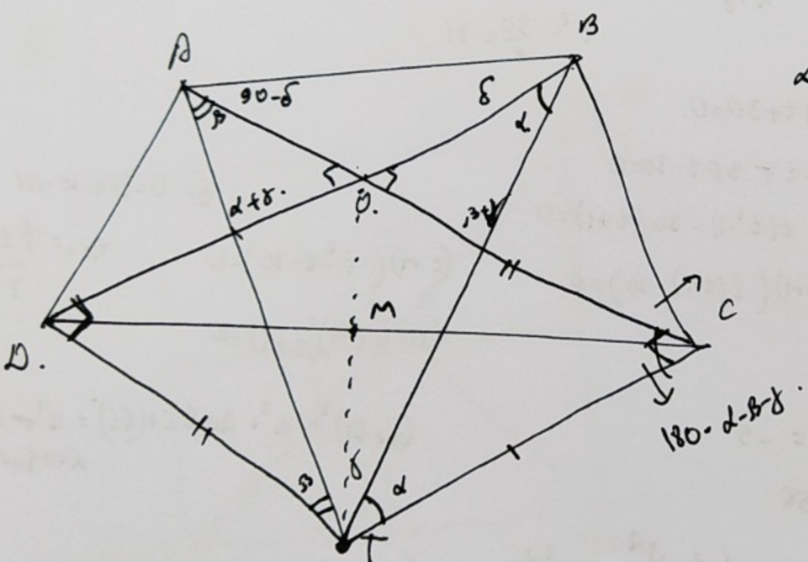
5-?



$\boxed{y=x}$ или $\boxed{y=69-x}$.

$y=69-x$ $x=0$

6.

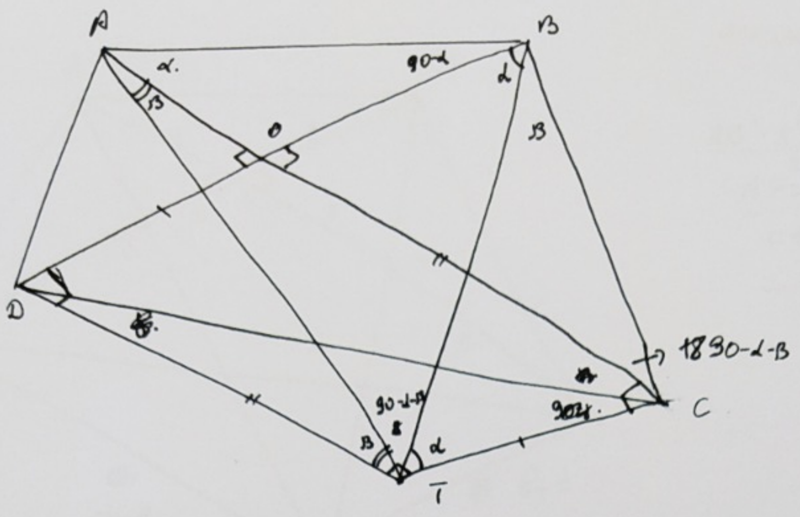


$\alpha+\beta+\gamma=90°$.

211006929 (U855055 M1277605)

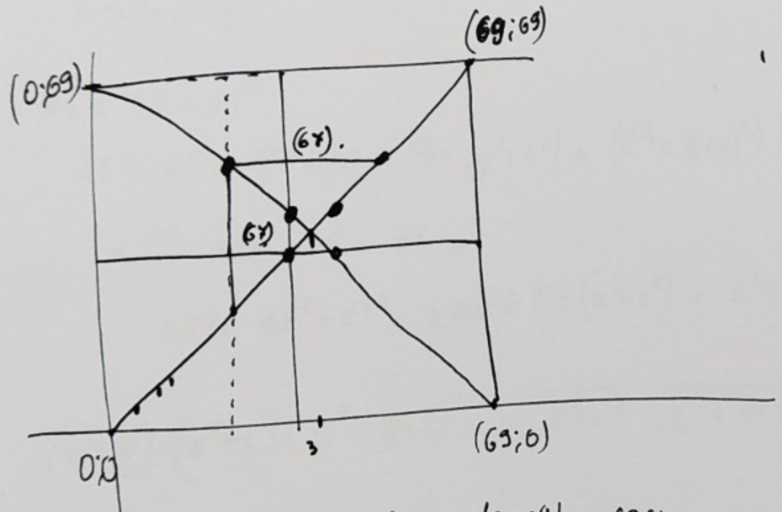
черновик.

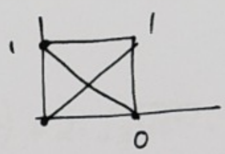
6.

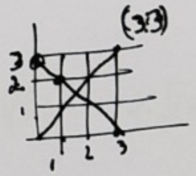


$11 + 10 = 21$ [illegible]

5.







4491
136
46

$x = y$ · 1 [illegible] 68 [illegible] (1;1) ... (68;68) 68 [illegible]   O [illegible]

$y = 69 - x$ · 1 [illegible] (1;68) (68;1) 6 [illegible]

$2 \cdot 67 = 134$ $2 \cdot 68 = 136$

$C^{1}_{(68+68)}$ $(68^2 - 67 \cdot 67) \cdot 2 \cdot 68 = (68^2 - 134) \cdot 136$

$68 \cdot 68 =$
$= (70-2)^2 = 4900 - 280 + 4 =$
$= 4624$

68
68
544
[illegible]
5 [illegible] 4

$68 \cdot 6$

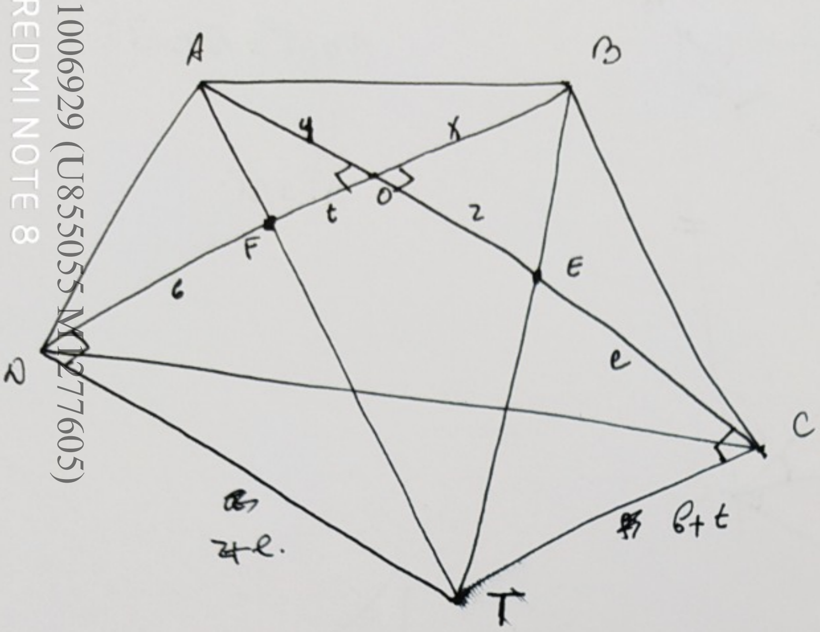
$(70-2)^2 = 4900 + 140 \cdot 2 \cdot 4 =$
$=$
$(70-2)^2 = 4900 - 2 \cdot 70 \cdot 2 + 4 =$
$= 4900 - 280 + 4.$
$4600 + 24 = 4624.$

68
68
5 4 4
40 8
4 6 2 4

4624
− 133
4491

черновик.

6.



доказать что $\angle ABD = 90°$

$AB^2 = x^2+y^2.$

$AF^2 = y^2+t^2$

$FT^2 = b^2+a^2 = b^2+(z+e)^2$

$ET = \sqrt{e^2+f^2}$

$BE = \sqrt{x^2+z^2}$

$AB^2 = x^2+y^2$

$AT = AF + FT$

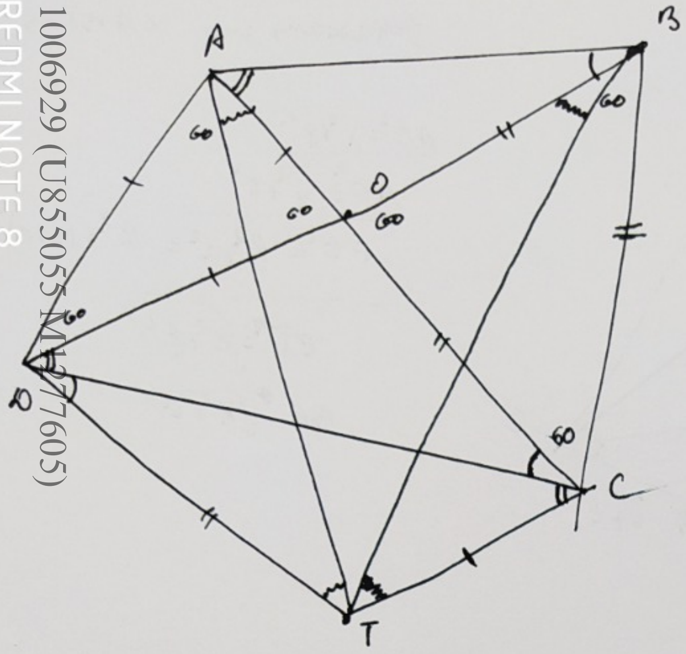
$AT^2 = AF^2 + FT^2 + 2AF \cdot FT = (y^2+t^2) + (b^2+(z+e)^2) + 2\cdot\sqrt{y^2+t^2}\cdot\sqrt{b^2+(z+e)^2}$

$BT = \cancel{x+z}\ BE + ET =$

$BT^2 = BE^2+ET^2+2BE\cdot ET = (x^2+z^2) + e^2 + (b+t)^2 + 2\cdot\sqrt{(x^2+z^2)}\cdot\sqrt{e^2+(b+t)^2}$

$(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+e^2+(b+t)^2+2\cdot\sqrt{(x^2+z^2)}\cdot\sqrt{e^2+(b+t)^2} = y^2+t^2+b^2+(z+e)^2+2\sqrt{y^2+t^2}\cdot\sqrt{b^2+(z+e)^2}$

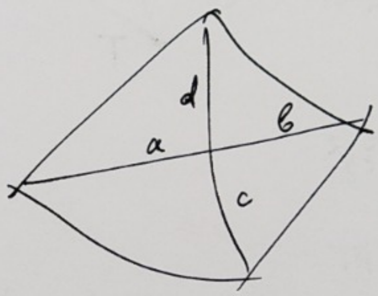
<u>черновик</u>



$\triangle ADT = \triangle BCT$.

$\Downarrow$

$AT = BT$.



$$\frac{ad\sin\alpha}{2} \quad \frac{bc\sin\alpha}{2} \quad \frac{db\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{bc\sin\alpha}{2}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2}\, a(d+c) + b(d+c)$$

$$\begin{array}{r} 4491 \\ 136 \\ \hline 46 \end{array}$$