Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006902**

ID профиля: **380593**

Вариант 10

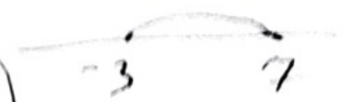
Чистовик (1)

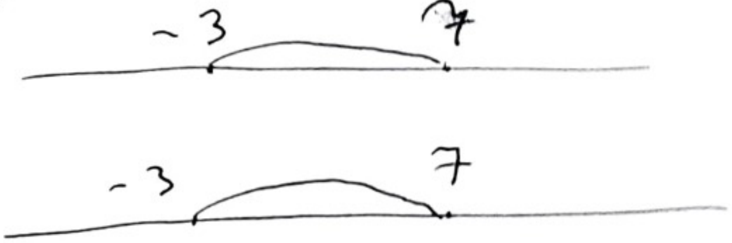
№2.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \begin{cases} x > -3 \\ x < 7 \end{cases} \\ x^2 - 4x - 21 < 0 \iff \end{cases} \quad \begin{cases} \\ (x+3)(x-7) < 0 \end{cases}$$





$x \in [-3; 7]$

Возведу в квадрат, перенеся 4 на право:

Получу

$$10 - 2\sqrt{21+4x-x^2} = 100 + 16x - 4x^2 - 16\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$90 + 16x - 4x^2 = 14\sqrt{-x^2+4x+21}$$

левая часть обязана быть ~~положительной~~ неотрицательной, поэтому

$$90 + 16x - 4x^2 \geq 0$$

Чистовик

(2)

$4x^2-16x-90 \leq 0$

$4x^2-16x-90=0$

$\frac{4-\sqrt{106}}{2} \approx -3$

$\sqrt{106} \approx 10$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{106}}{2}$

По методу интервалов

$\frac{4-\sqrt{106}}{2}$ $\frac{4+\sqrt{106}}{2}$

$x \in \left[\frac{4-\sqrt{106}}{2}; \frac{4+\sqrt{106}}{2}\right]$

После возведения:

$16x^4-128x^3-268x^2+2096x+3984=0$

Если разложить $-268x^2$ и вынести $4x^2$ из одной части, а со второй решить квадр. уравн., то можно из обоих частей вынести $4x^2-64x-48$

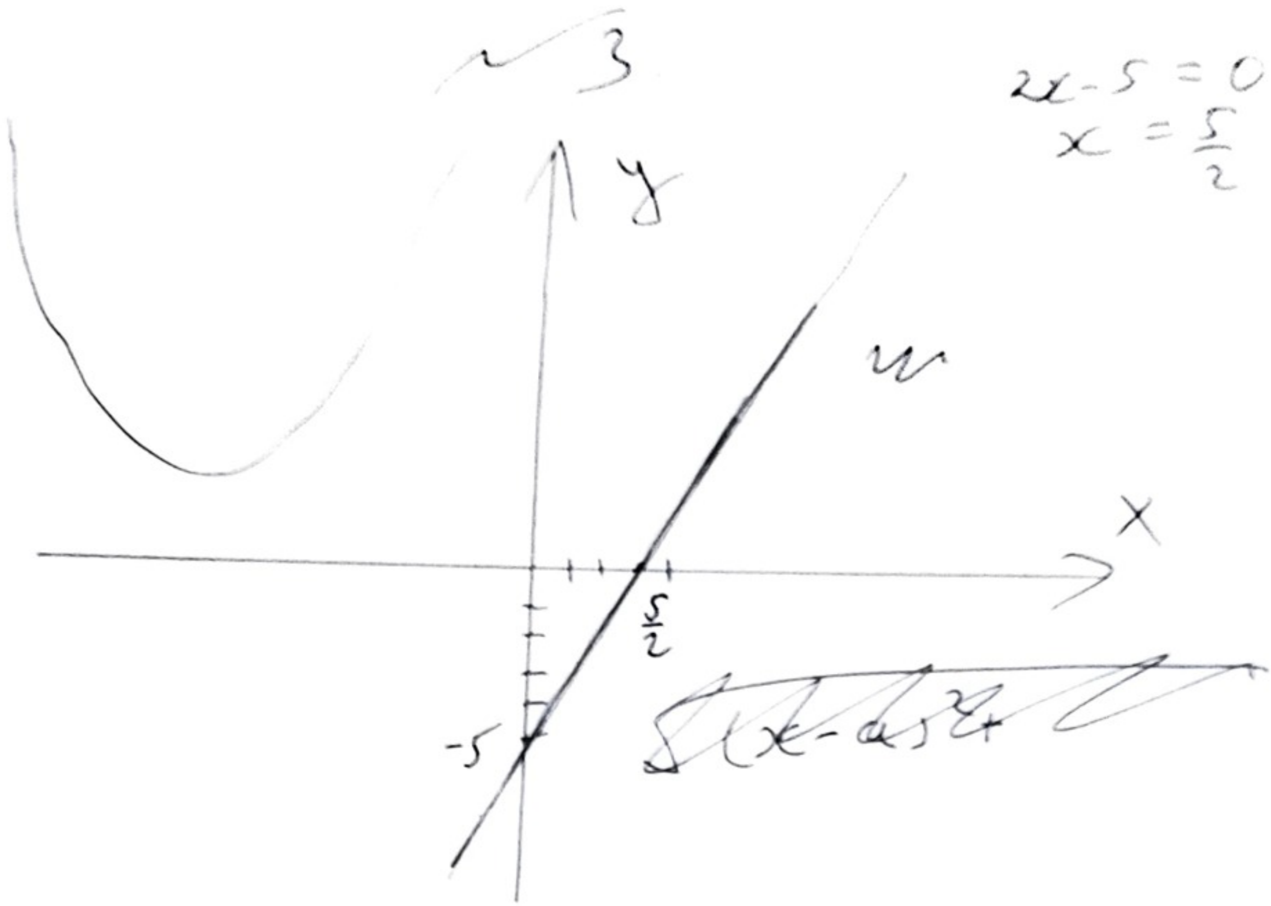
Получу

$4(x+2)(x-6)(4x^2-16x-83)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ - не подх. под ОДЗ} \\ x=6 \text{ - входит в ОДЗ} \\ x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ - входит в ОДЗ} \\ x=2+\frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ - не входит в ОДЗ} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

211006902 (U380593 M1276466)



$2x-5=0$

$x=\frac{5}{2}$

$5a^2-4ay+y^2+8x^2+12ax-4xy=0$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$] \ a \neq 0$

$x^2-2ax-y+a^2+\frac{3}{a}=0$

$x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=y$

$x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}>2x-5$

$x^2-x(2a+2)+a^2+\frac{3}{a}+5>0$

$D=4(a^2+2a+1)-4a^2-\frac{12}{a}-20$

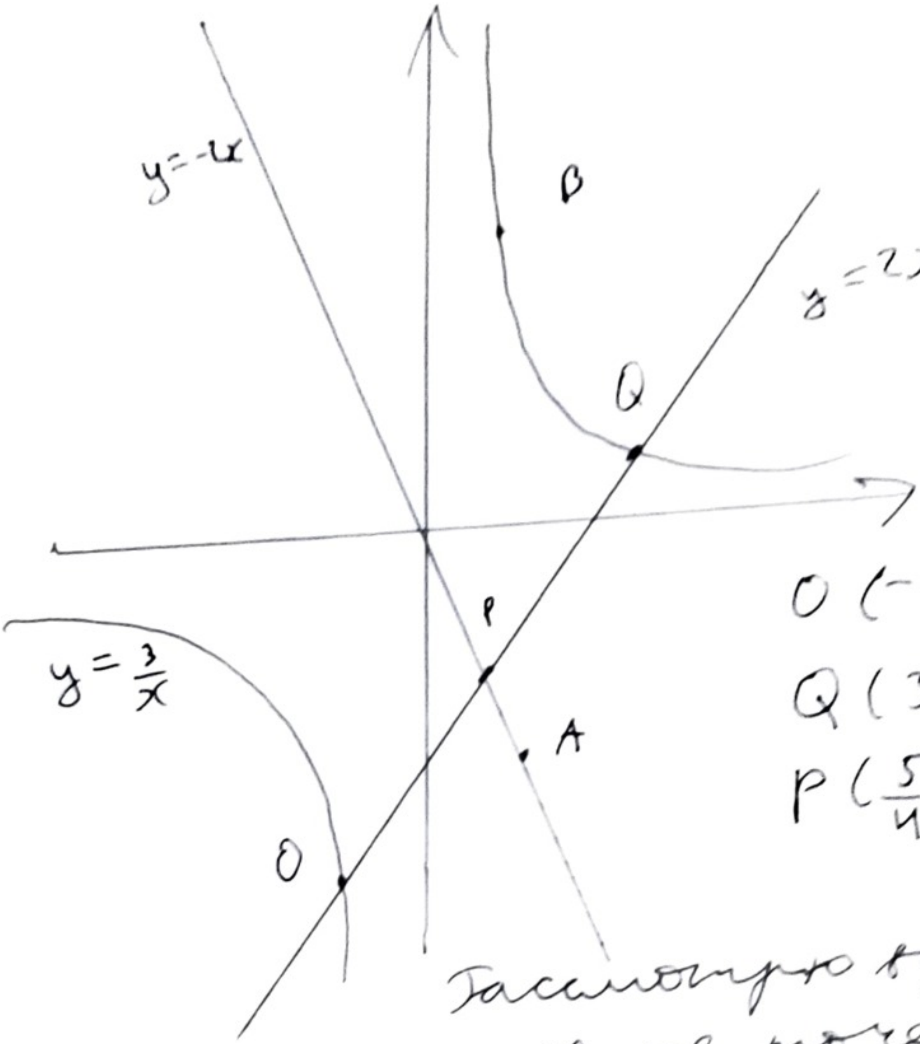
$D=4a^2+8a+4-4a^2-\frac{12}{a}-20$

$D=8a-\frac{12}{a}-16<0$ $\quad 8a-\frac{12}{a}-16=0$

$8a^2+24a-12<0$ $\quad 2a^2-3-4a=0$

$2a^2+6a-\cancel{3}=0$

Чис. о чистовик (5)



$O\left(-\frac{1}{2}; -6\right)$

$Q(3; 1)$

$P\left(\frac{5}{4}; -2,5\right)$

Рассмотрю взаимное расположение точек, используя метод областей (относ. $y=2x-5$)

A	−	+	−	+	+
B	+ −2,5	+ $-\frac{1}{2}$	+ 0	+ 3	−

a

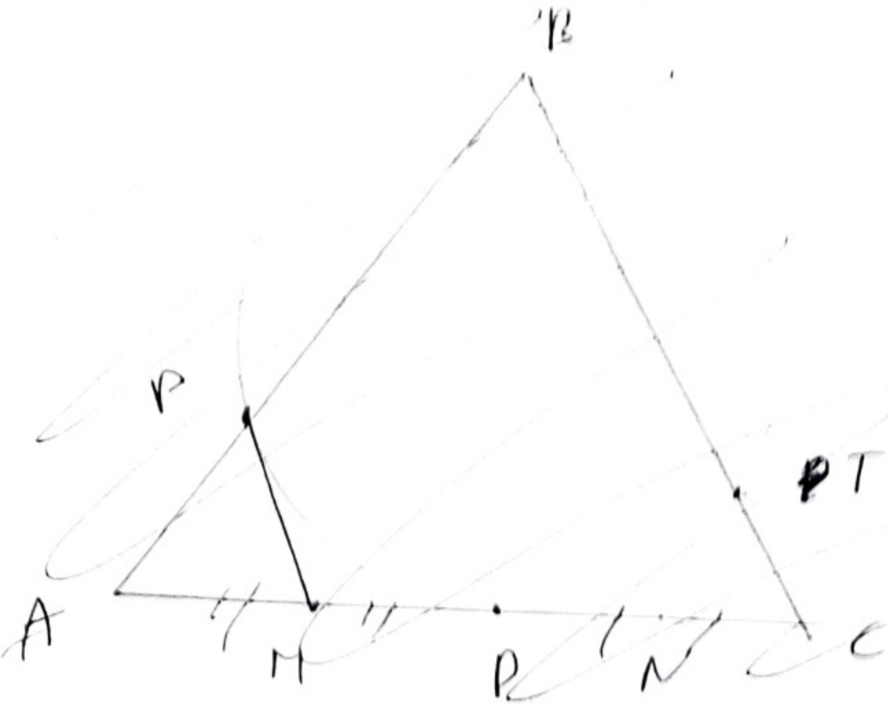
Нам нужны промежутки совпадения

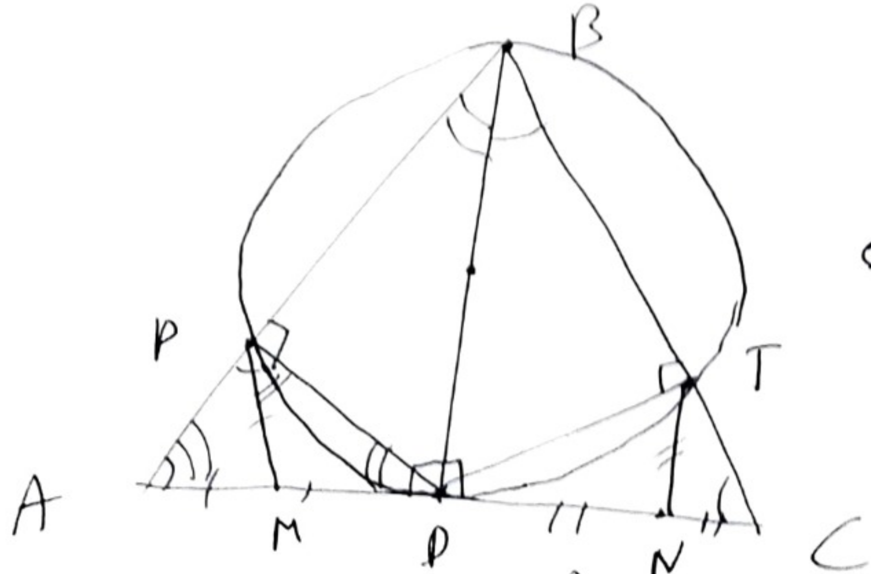
Ответ: $a \in (0; 3) \cup \left(-2,5; -\frac{1}{2}\right)$

211006902 (U380593 M1276466)

Чернетка

№1





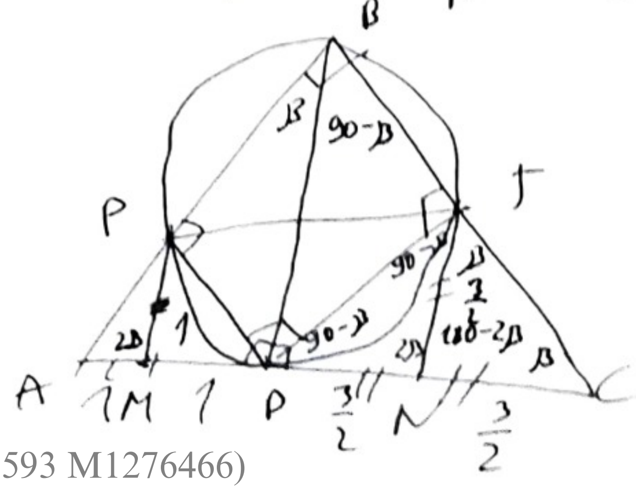
$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

~~CD~~.

$AP \cdot AB = AD^2$

$TC \cdot TB = DC^2$



PM; TN - мед.

90^0

$BD = \sqrt{5}$

Чистовик

№3

4

Рассмотрю 1 уравнение:

$y^2-(4a+4x)y+5a^2+12ax+8x^2=0$

$D=(4a+4x)^2-4(5a^2+12ax+8x^2)=-4(2x+a)^2$

$D\geq 0$ только при $x=-\frac{a}{2}$.

Рассмотрю относительно x:

$8x^2-(4y-12a)x-4ay+5a^2+y^2=0$

$D\geq 0$ только при $y=a$.

Значит $A(-\frac{a}{2};a)$, точка перемещается по прямой $y=-2x$

Рассмотрю 2 уравнение:

$ax^2-2a^2x-ay+a^2+3=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$ (могу $:a$, т.к. при $a=0$; $3=0$?!)

Найду вершину, подставив x_0 (a).

$a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

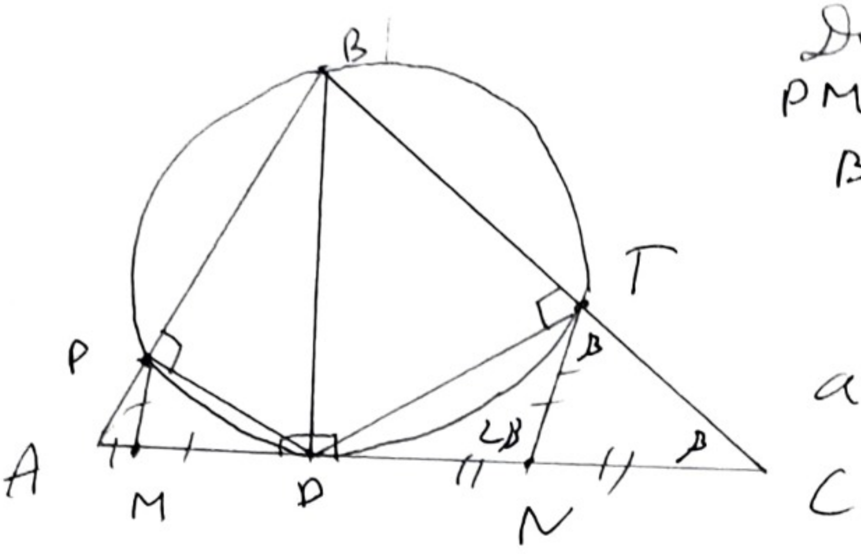
$B(a;\frac{3}{a})$ — вершина парабол[ы], перемещается по гиперболе $y=\frac{3}{x}$

Начерчу.

Чистовик

③

№1



Дано:
PM ∥ TN
BD - диам.

Решение:
а) ∠ABC - ?

Проведу PD и DT,
т.к. BD - диам, то ∠BPD = ∠DTB (90°, опир. на D),
тогда $PM = \frac{1}{2}AD$; $NT = \frac{1}{2}DC$ (мед. $= \frac{1}{2}$ гип.)
∃ ∠TCN = β, тогда ∠NTC = β (равноб.)
∠TND = 2β (внешний) = ∠AMP.
∠PMD = 180° − 2β.
∠NDT = ∠DTN = 90 − β
∠MPD = ∠MDP = β
∠ между кас. и сек. $= \frac{1}{2}$ ∪ на кот. он опир. ⇒ ∠PDA = ∠PBD (впист.)
∠TDN = ∠DBT (впис.)
∠ABC = 90 − β + β = 90°

б) S - ? PD = $\sqrt{5}$; MP = 1; NT = $\frac{3}{2}$
AD = 2 (мед. $= \frac{1}{2}$гип); DC = 3 (мед. $= \frac{1}{2}$гип)
S = S ADB + S BDC
$S_{ADB} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2}{2} = \sqrt{5}$; $S_{BDC} = \frac{\sqrt{5}\cdot 3}{2}$

211006902 (U380593 M1376466)

$S = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{5}\cdot 3}{2} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}$

Часть 2

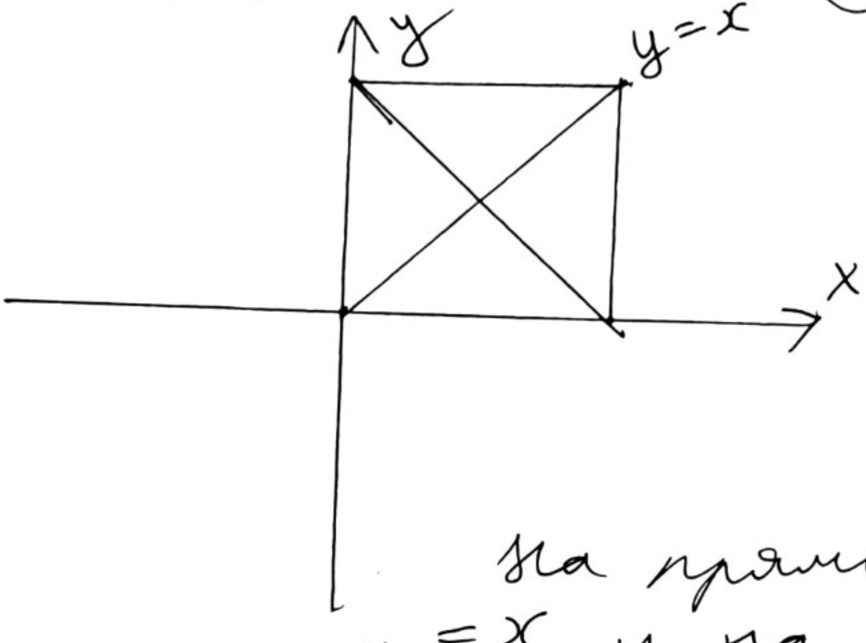
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006902**

ID профиля: **380593**

Вариант 10

Черновик. № 5 (6)



На прямых
$y=x$ и на $y=69-x$

Всего по 68 точек (т.к. это диагонали квадрата.)

Всего можно выбрать 68 точек на $y=x$ и подойдут целоч. точки, кроме точек на прям. $\parallel y=0; x=0$.

Все 2 такие прямы, значит всего $2\cdot 68$ точек, но также уже 2 мы взяли для наших ~~??~~ узла, значит $67\cdot 2$ точек.

Т.к. всего внутри квадр. 68^2 точек, то на подходят. $68^2-67\cdot 2-1$ (наша, выбранная.)

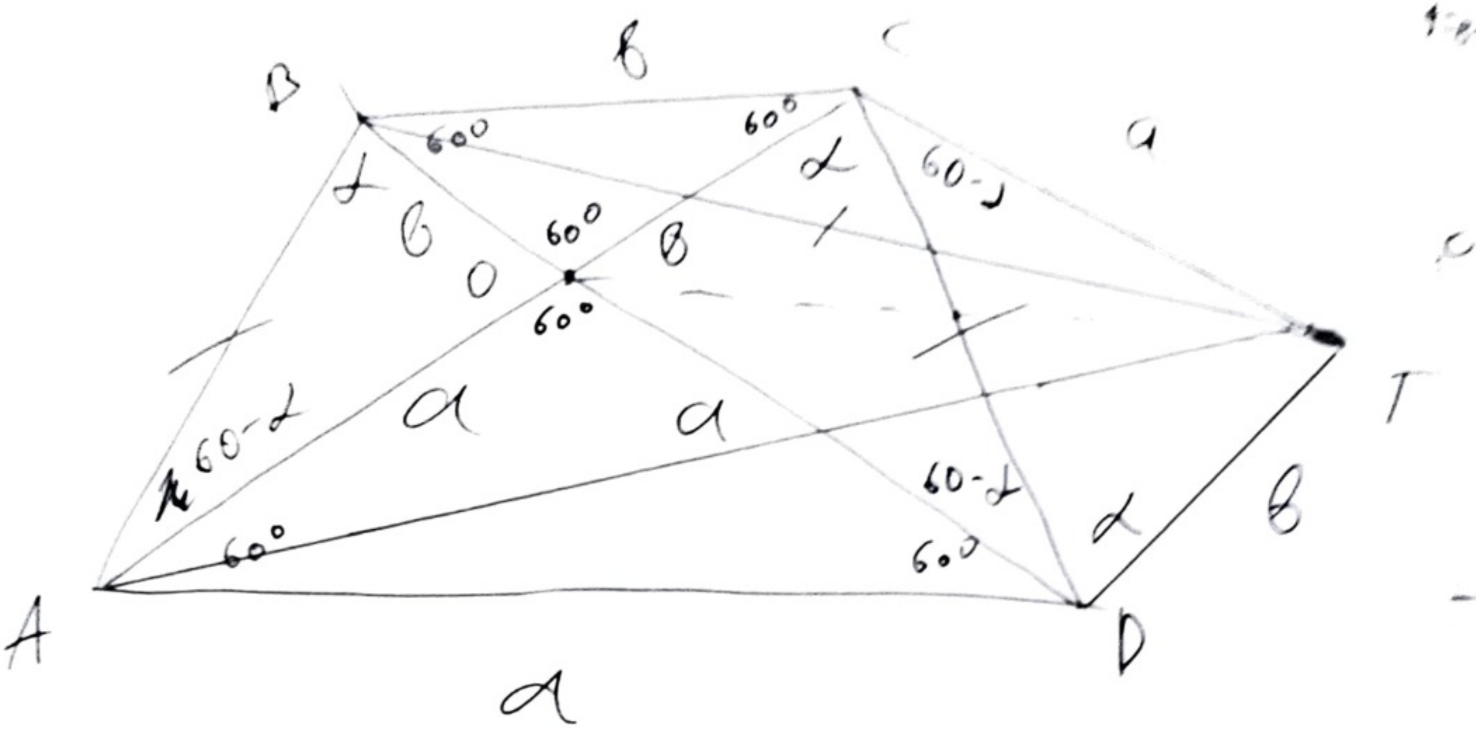
Значит, если выбирать точку для $y=x$, то её можно выбрать $\frac{68\cdot(68^2-135)}{2}$ способами, $\frac{1}{2}$ ведь мы считаем в 2 раза больше узлов

Черновик

$49+4+14$

67

$\angle ACT=60°$



$AB=\sqrt{a^2+b^2+ab}=CD$

$a^2+b^2+2ab+a^2-(a+b)a$

a^2+b^2+ab

$$\begin{array}{r} \times\ 67 \\ 4 \\ \hline 268 \end{array}$$

268

$$\begin{array}{r} 268 \\ -\ 25 \\ \hline 243 \end{array}$$

Чистовик (5)

Подставим в 1 ур-е.

$$1+x^2\cdot y^2=10 \Rightarrow x^2\cdot y^2=9$$

I
$$\begin{cases} x\cdot y=3 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\cdot y=3 \\ x+y=\sqrt{12} \end{cases} \\ \begin{cases} x\cdot y=3 \\ x+y=-\sqrt{12} \end{cases} \end{array}\right. \overset{\text{по Виету}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

II
$$\begin{cases} x\cdot y=-3 \\ x^2+y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Черновик 4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 10 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = t$

$x^2y^2 = p$

$\frac{6}{t} + p = 10$

$t^2+5p = 10$

$p = 10 - \frac{6}{t}$

$t^2+5\cdot(10-\frac{6}{t}) = 10$

$t^2+50-\frac{30}{t} = 10$

$t^3+40t-30=0$

$x^2y^2 =$

211006902 (U380593 M1276467)

~~Чистовик~~. №4. Черновик

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2 \cdot y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2 \cdot y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = \frac{81-(x^2+y^2)^2}{5} \\ \frac{6}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = 10 \end{cases} ; \quad x^2+y^2 = t \geq 0$$

$$\frac{6}{t} + \frac{81 - t^2}{5} = 10$$

Приведу к общему знаменателю:

$$\frac{30 + 81t - t^3}{5t} = 10 \quad | \cdot 5$$

$$\frac{30 + 31t - t^3}{5t} = 0.$$

$t \neq 0$ (усл. на $t > 0$).

$\Downarrow$

$$30 + 31t - t^3 = 0$$

$\Downarrow$

$$t^3 - 31t - 30 = 0$$

$$t(t-1)(t+1) - 30(t+1) = 0$$

$$(t+1)(t^2 - t - 30) = 0$$

$$(t+1)(t+5)(t-6) = 0 \rightarrow \text{по Виету}$$

$$t_{1,2,3} = -5; -1; 6$$

$t = -1; -5$, не подх., т.к. t

Чистовик (4)

№ 4.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2 \cdot y^2 = 81 \end{cases}$$; $] \; x^2+y^2 = k > 0$ $(\neq 0)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{k} + x^2 \cdot y^2 = 10 \\ (\underbrace{x^2+y^2}_{=k^2}) + 5x^2 \cdot y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y^2 = \dfrac{81-k^2}{5} \\ \dfrac{6}{k} + \dfrac{81-k^2}{5} = 10 \end{cases}$$

Приведу к общ. знам.

$$\frac{6}{k} + \frac{81-k^2}{5} = 10 \quad | \cdot 5$$

$$\cancel{30+31k-k^3}$$

$$\frac{30+31k-k^3}{k} = 0 \qquad k \neq 0 \text{ одз}$$

$\Downarrow$

$$k^3 - 31k - 30 = 0$$

$$k(k-1)(k+1) - 30(k+1) = 0$$

$$(k+1)(k^2-k-30) = 0 \Rightarrow \text{Виет.}$$

$$(k+1)(k+5)(k-6) = 0$$

$$k_{1,2,3} = -1; -5; 6$$

$k_{1,2} = -1; -5$ – не подх. $(k>0)$

$$k = 6.$$

$$x^2+y^2 = 6.$$

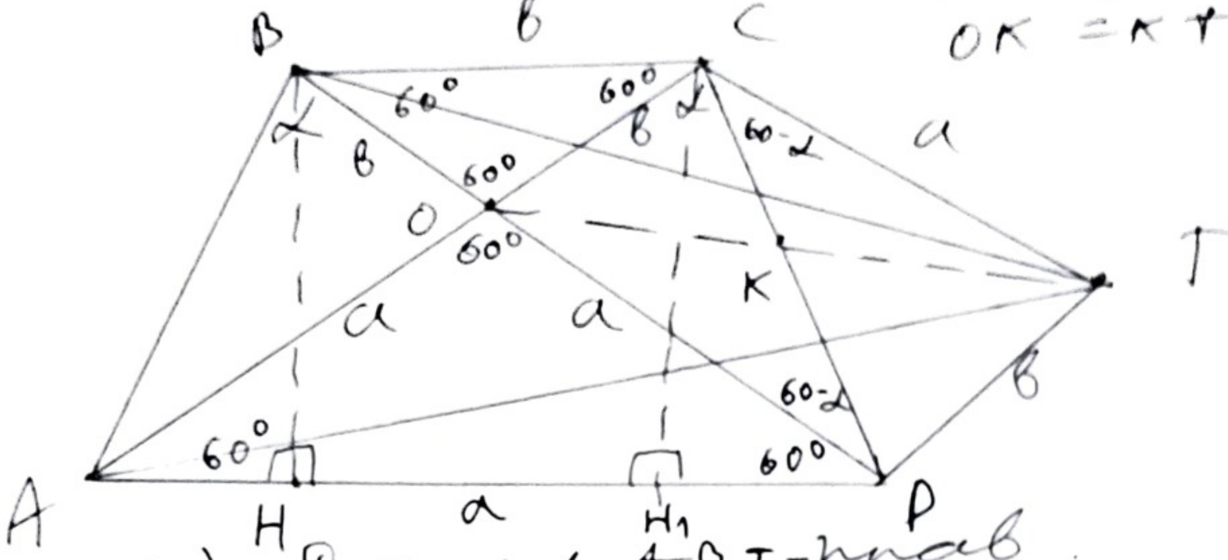
211006902 (U380593 M1276467)

Чистовик

1

№7

Дано:
$\triangle AOD$, $\triangle BOC$ – прав
$OK = KT$



а) Док-ть ADT – прав.

Док-во.

Введу обозначения $AO = OD = AD = a$;

$BO = OC = BC = b$

$\angle ACD = \alpha$.

$BC \parallel AD$ ($\angle OAD = \angle OCB$ (они накрест лежащ.)

$\angle CBD = \angle CAD \Rightarrow A, B, C, D \in$ одной окр.
(равные углы опир. на одну дугу.)

Значит $ABCD$ – вписс., $\angle BCA = \angle CAD$,
$60^\circ = 60^\circ \Rightarrow AB = CD$ (равные дуги стяг. равные хорды.)

$\angle ABD = \angle ACD = \alpha$ (опир. на одну $\cup$)

$\angle BAO = \angle BDC = 60 - \alpha$

Рассмотрю $OCTD$ – параллелограм.
(т.к. при симметрии все расстояния сохраняются, а также $OCTD$ – четырехугольник, у которого диаг. пересек. и в точке пер. делятся пополам.)

Чистовик (3)

$HH_1 = BC = 8 = 2$ (парал.)

$AH = H_1D = \frac{7-2}{\cancel{3}2} = \frac{5}{2}$

По теор. Пиф.

$BH^2 = AB^2 - AH^2$

$BH^2 = 67 - \frac{25}{4}$

$BH = \sqrt{\frac{268-25}{4}} = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{\sqrt{243}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{7+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt{243}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{9 \cdot \sqrt{243}}{4}} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot \sqrt{243}} = \frac{67 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{81 \cdot \cancel{\sqrt{3}}} =$

$= \frac{67}{81}$

чистовик

(2)

Тогда $\angle ODC = \angle DCT$ (парал. стор.)

$CT = OD = a$
$CO = TD = b$ } св.-ва пар

Рассм. $\triangle BCT$:

$\angle BCT = 120^0$

По теор. cos

$BT = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

Рассм. $\triangle BOA$:

По теор. cos: $(\angle BOA = 120^0\ (180^0 - 60^0))$

$AB = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

Рассм. $\triangle ACT$:

$\angle ACT = \alpha + 60\ \alpha = 60^0$

По теор. cos.

$AT = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 - (a+b)\cdot a}$

$AT = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$BT = AB = AT = a^2+b^2+ab$

$\triangle ABT$ – правильный.

ч.т.д.

б) $BC = 2$; $AD = 7$: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение:

$AB = \sqrt{a^2+b^2+ab} = \sqrt{49+4+14} =$
$= \sqrt{67}$

$S_{ADT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^0}{2} = \frac{67\cdot\sqrt{3}}{4}$

Найду BH (выс.)

211006902 (U380593 M1276467)

Чистовик.

(7)

Аналогично определяются точки для прямой $y = 69 - x$

Их точке $\frac{68(68^2 - 135)}{2}$.

Значит всего точек $68 \cdot (68^2 - 135)$

~~надо~~

Ответ: $68 \cdot (68^2 - 135)$.