Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006828**

ID профиля: **322094**

Вариант 10

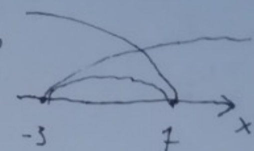
№2 Чистовик ①

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

1) $x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$ по т. Виета. Тогда:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\begin{cases}(x-7)(x+3)\le 0\\ x+3\ge 0\\ x-7\le 0\end{cases}$



ОДЗ: $x\in[-3;7]$

2) $\sqrt{x+3}=a\ge 0$, $\sqrt{7-x}=b\ge 0$ $\Rightarrow a-b+4=2ab$

$\underbrace{a+4}_{\ge 0}=\underbrace{(2a+1)b}_{\ge 0}$ $\quad a^2+8a+16=b^2(4a^2+1+4a)$

$a^2+8a+16=4a^2b^2+b^2+4ab^2$

$\cancel{3)\ x+3+8\sqrt{x+3}+16=(7-x)(4x+12+1+4\sqrt{x+3})}$

$\cancel{x+8\sqrt{x+3}+19=28x+84+7+28\sqrt{x+3}-4x^2-12x-x-4x\sqrt{x+3}}$

$\cancel{4x^2-14x-72-20\sqrt{x+3}-4x\sqrt{x+3}}$

$\sqrt{x+3}=a\ge 0$; $a^2=x+3\Rightarrow -x=3-a^2\Rightarrow 7-x=10-a^2\Rightarrow\sqrt{7-x}=\sqrt{10-a^2}$

Тогда: $a-\sqrt{10-a^2}+4=2a\sqrt{10-a^2}$

$a+4=(2a+1)\sqrt{10-a^2}\Leftrightarrow a^2+8a+16=(4a^2+4a+1)(10-a^2)$

$a^2+8a+16=-4a^4-4a^3+39a^2+40a+10$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0$

3) $a=-1$: $4-4-38+32+6=0\Rightarrow a=-1$ — реш. [$a\ne-1$, ибо $a\ge 0$]

$$\begin{array}{l|l} 4a^4+4a^3-38a^2-32a+6 & a+1\\ \hline -(4a^4+4a^3) & 4a^3-38a+6\\ -38a^2-32a & \\ -(-38a^2-38a) & \\ 6a+6 & \\ -(6a+6) & \\ 0 & \end{array}$$

$4a^3-38a+6=0$ $|:2$

$a=2$: $\cancel{32+6-38}$ $\quad 2a^3-19a+3=0$

$a=3$: $54-57+3=0\Rightarrow a=3$ — реш.

$$\begin{array}{l|l} 4a^3+0\cdot a^2-38a+6 & a-3\\ \hline -(4a^3-12a^2) & 4a^2+12a-2\\ 12a^2-38a & \\ -(12a^2-36a) & \\ -2a+6 & \\ -(-2a+6) & \\ 0 & \end{array}$$

$4a^2+12a-2=0$ $|:2$

$2a^2+6a-1=0$

$D_1=9+2=11$

$a_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$, но $a\ge 0\Rightarrow a=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

4) 1) $a=3\Rightarrow\sqrt{x+3}=a$ $\quad\sqrt{x+3}=3\rightarrow\boxed{x=6}$

$a=\frac{\sqrt{11}-3}{2}\rightarrow 2\sqrt{x+3}=\sqrt{11}-3\Leftrightarrow 4x+12=\underbrace{11+9}_{20}-6\sqrt{11}\rightarrow 4x=8-6\sqrt{11}$ $|:2$

$2x=4-3\sqrt{11}$

$x=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}\vee-3\rightarrow 5\vee\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$10\vee 3\sqrt{11}$

$100\vee 99$

$\Rightarrow x\overset{?}{>}-3$

$\Rightarrow$ подходит

Ответ: $x=6$; $2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

Чистовик (2)

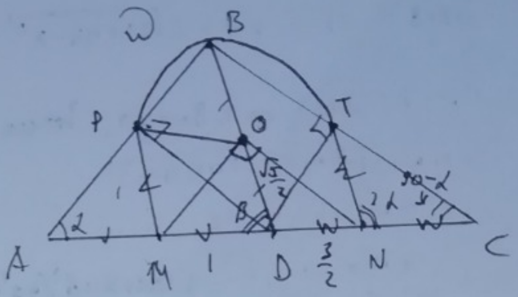
N1

BD – диаметр $\omega(x,O)$

$PM \parallel TN$

$AM = MD$

$DN = NC$



а) $\angle ABC = ?$

1) Пусть O – ц. BD, т.к. ц. ω, т.е. $BO=OD$, тогда MO – ср. линия ADB, $MO \parallel AB$

ON – ср. линия BDC, т.е. $ON \parallel BC$

2) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, ибо опираются на диаметр BD, тогда $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоуг.

По лемме о медиане из в угла в 90° => $PM = \frac{1}{2}AD$, $TN = \frac{1}{2}DC$ => $\triangle APM, \triangle PMD, \triangle DPN; \triangle TNC$ – р/б.

3) Пусть $\angle PAD = \alpha$ => $\angle OMN = \alpha$; $\angle PMA = 180 - 2\alpha = \angle TND$ ($TN \parallel PM$) => ~~$\angle PMA = \angle TNC$~~ $\angle TNC = 2\alpha$

$\angle TCN = 90 - \alpha$ => $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle TCN) = 180^\circ - (\alpha + 90 - \alpha) = 90^\circ$

$\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

б) $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$

$S_{\triangle ABC} = ?$

1) $MO \parallel AB$, $ON \parallel BC$, как ср. линии, тогда $\angle MON = \angle ABC = 90^\circ$

2) $\angle MDO = \beta$ => $\angle ODN = 180 - \beta$. Т. Косинусов для $\triangle MDO$ и $\triangle ODN$:

$MO^2 = 1 + \frac{5}{4} - \sqrt{5}\cos\beta$, а $MO^2 + ON^2 = MN^2 = \frac{25}{4}$

$ON^2 = \frac{9}{4} + \frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos\beta$

$\frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{10}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\beta = \frac{25}{4} \quad | \cdot 4$

$\frac{5}{4}$

$2\sqrt{5}\cos\beta = 2$ => $\boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$MO = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$ON = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$, $MO = \frac{1}{2}AB$ => $\frac{1}{2}MO = \frac{\sqrt{5}}{4}$, а $BC = \frac{1}{2}ON = \frac{\sqrt{5}}{2}$

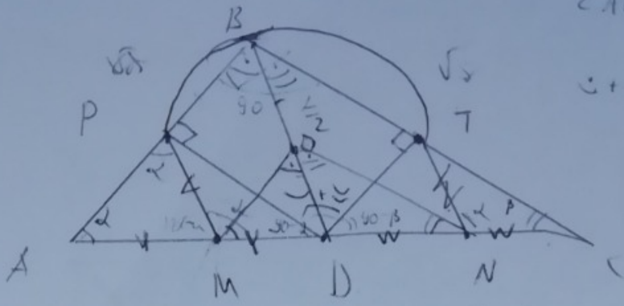
~~$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{8}MO \cdot ON = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{16}$~~

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2MO \cdot 2ON = 2MO \cdot ON = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = 5$

$S_{\triangle ABC} = \cancel{\frac{5}{16}}\ 5$

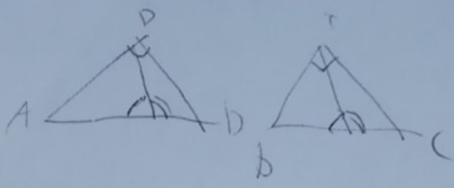
Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{\triangle ABC} = \cancel{\frac{5}{16}}\ 5$

Чернетка 2



$\angle ABC = ?$

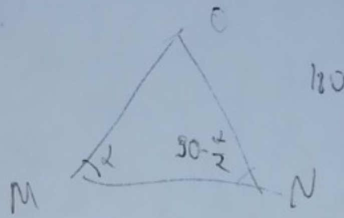
$\angle + \angle = 180 - (\angle + \angle)$



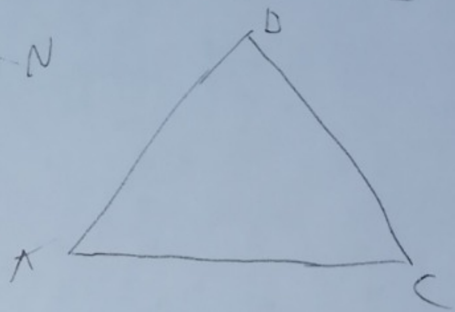
$180 - 2\alpha + \alpha = 180$

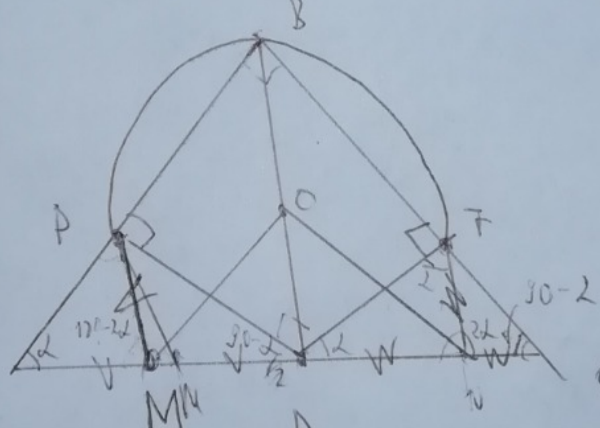
$180 - \alpha = 2\beta$

$\boxed{90 - \frac{\alpha}{2} = \beta}$



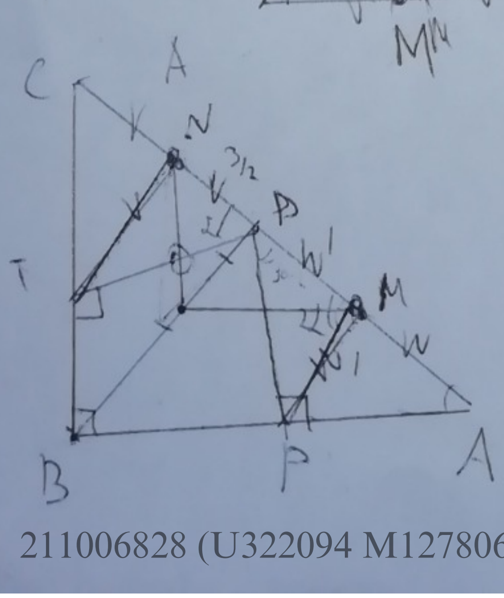
$180 - \alpha - 90 + \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$

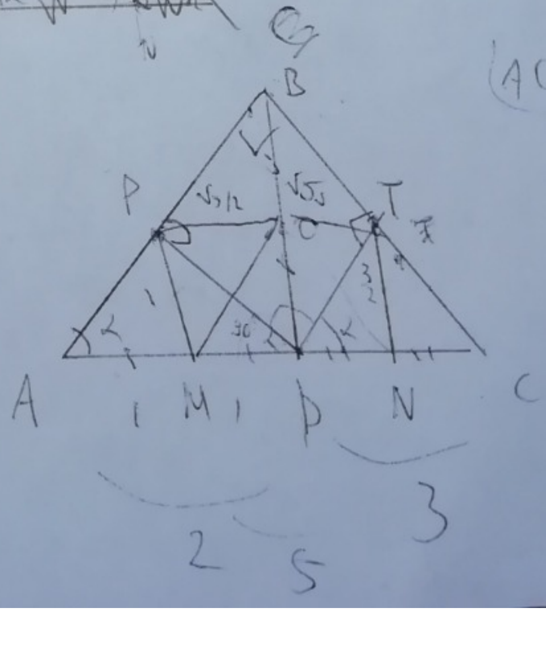




$\sin\alpha = \frac{PD}{AD} = \frac{TC}{DC}$

$AC = 5$





211006828 (U322094 M1278066)

Черновик ①

$x^2-4x-21=0$

$(x-7)(x+3)$

$\sqrt{x+3}=a \Rightarrow a^2=x+3 \quad -x=3-a^2 \Rightarrow \sqrt{7-x}=\sqrt{10-a^2}$

$a-\sqrt{10-a^2}+4=2a\sqrt{10-a^2}$

$\cancel{a+4=(2\sqrt{10-a^2}+1)a}$

$\cancel{4-\sqrt{8}a^2}\ a+4=(2a+1)\sqrt{10-a^2}$

$a^2+8a+16=(4a^2+4a+1)(10-a^2)=(40a^2-4a^4+40a-4a^3+10-a^2)$

$a^2+8a+16=-4a^4-4a^3+39a^2+40a+10$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0$

$a=-1:\quad 4-4-38+32+6=0$ $\qquad 4a^3-38a+6$

$4\cdot 27-38\cdot 4+6=20+28+6-120-32$ $\qquad 32+6-32$

$36\cdot 6=180+36=216$ $\qquad -108+120+32+6$

$33\cdot 33=(30+3)^2=$
$=900+9+180=1089$ $\qquad 3{,}2\times 3{,}2 \qquad 32\times 32 = 64,\ 96,\ 1024$

$27\cdot 2-19\cdot 3+3=3(18-19+1)$

$2a^2+6a-1$

$D=36+8=44 \Rightarrow a=\frac{-6\pm\sqrt{44}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$ $\qquad \sqrt{11}\vee 3 \quad 11\vee 9 \quad >$

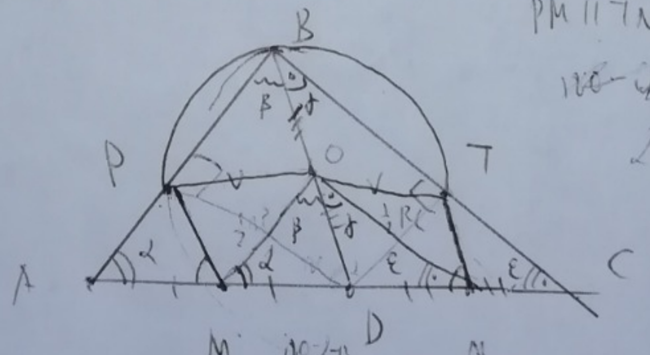
$2\sqrt{x+3}=\sqrt{11}-3$

$2x+6=\underbrace{11+9}_{20}-6\sqrt{11} \quad 2x=14-6\sqrt{11} \quad x=7-3\sqrt{11}\ \vee -3$

$10\vee 3\sqrt{11} \quad 100\vee 99 \quad >$

$x=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}\ \vee -3$

$5\vee\frac{3}{2}\sqrt{11} \quad 25\vee\frac{9}{4}\cdot 11 \quad 100\vee 99$



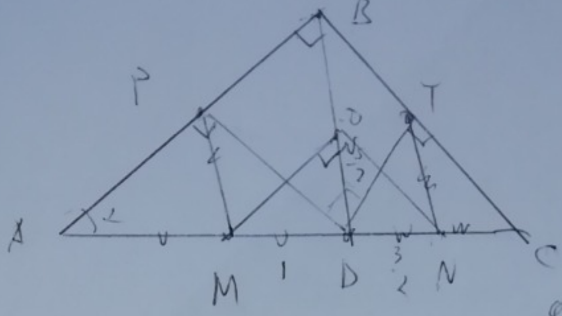
$PM \parallel TN$

$180-(2\beta)$

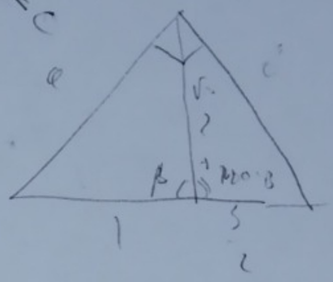
$(\alpha+\beta+\gamma)+\varepsilon=180°$

$\beta+\gamma=180°-(\alpha+\varepsilon)$

Черновик (6)



$a^2+b^2=\frac{13}{7}$



$a^2=\frac{5}{4}+1-\sqrt5\cos\beta$

$b^2=\frac{9}{4}+\frac{5}{4}+\frac{3\sqrt5}{2}\cos\beta$

$a^2+b^2=\frac{10}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt5\cos\beta=\frac{25}{4}$

$\frac{19}{4}$ $\frac{23}{4}$ $\frac{\sqrt5}{2}\cos\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\sqrt5\cos\beta=1$

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$a^2=\frac{1}{2}AB\cdot BC=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2MO\cdot 2$

211006828 (U322094 M1278066)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006828**

ID профиля: **322094**

Вариант 10

Чистовик ①

№4

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81\end{cases}$$

ограничение:
$x\neq0$, $y\neq0$ ⟺ $a>0$, $b>0$

1) $x^2+y^2\neq0 \Rightarrow$ ~~$x\neq y\neq0$~~ $\begin{cases}x\neq0\\ y\neq0\end{cases}$

2) Пусть $a=x^2+y^2$, $b=x^2y^2$, т.е $\begin{cases}a>0\\ b\geq0\end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~$x^4+y^4=$~~ $a^2=x^4+y^4+2x^2y^2$

$x^4+y^4=a^2-2x^2y^2=a^2-2b$

$$\begin{cases}\dfrac{6}{a}+b=10\\ a^2-2b+7b=81\end{cases}$$

$\Rightarrow b=10-\frac{6}{a}\Rightarrow a^2+50-\frac{30}{a}-81=0 \quad |\cdot a\neq0$

$a^3-31a-30=0$

Если $a=-1$: $-1+31-30=0 \Rightarrow a=-1$ – реш, но по огр. не подходит.

~~$a^3-31a-30 \mid a+1$, $a^3+\ldots$, a^2~~

$$\begin{array}{l|l} a^3+0a^2-31a-30 & a+1\\ \hline a^3+a^2 & a^2-a-30\\ -a^2-31a & \\ -a^2-a & \\ -30a-30 & \\ -30a-30 & \\ 0 & \end{array}$$

$\neq0$

$a^2-a-30=0$

~~Д~~ По т. Виета: $\begin{cases}a_1=6\\ a_2=-5<0 \text{ – не подходит}\end{cases}$

$\underline{a=6} \Rightarrow \underline{b}=10-1=\underline{9}$, т.е $\begin{cases}a=6\\ b=9\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=6\\ x^2y^2=9\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=6\\ (xy-3)(xy+3)=0\end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=6\\ \left[\begin{array}{l}xy=3\\ xy=-3\end{array}\right.\end{array}\right.$

Отметим: если $(x;y)$ – реш., то $(y;x)$ – реш.

① $xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x} \Rightarrow x^2+y^2=x^2+\frac{9}{x^2}=6 \quad |\cdot x^2\neq0 \Rightarrow x^4-6x^2+9=0$

$x^4-2\cdot3x^2+3^2=0$

$(x^2-3)^2=0$ ~~$\Rightarrow x=3\to y=1$~~

$(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)=0$ ~~$(3;1)$ и $(1;3)$~~

$x=\pm\sqrt3 \to y=\pm\sqrt3 \Rightarrow (\sqrt3;\sqrt3)$, $(-\sqrt3;-\sqrt3)$

② $xy=-3 \Rightarrow y=-\frac{3}{x}$.

$x^2+y^2=x^2+\frac{9}{x^2}=6 \Rightarrow$ Аналогично:

$x=\pm\sqrt3 \Rightarrow y=\mp\sqrt3$

$(\sqrt3;-\sqrt3)$ и $(-\sqrt3;\sqrt3)$

Ответ: $(\sqrt3;\sqrt3)$; $(-\sqrt3;-\sqrt3)$; $(\sqrt3;-\sqrt3)$; $(-\sqrt3;\sqrt3)$, где $(x;y)$ – реш.

211006828 (U322094 M1278067)

Чистовик ②

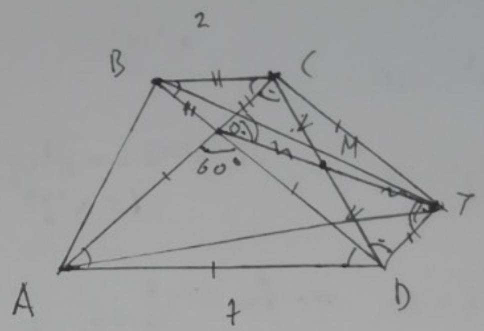
№6

ABCD – вып. четырёхуг.

O – т. пересеч. диаг.

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – пр.

T – симм. O отн. сер. CD.



а) Д-ть: $\triangle ABT$ – пр.

1) $\angle BCO = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle CBO = \angle ODA = 60^\circ$ $\Rightarrow$ $BC \parallel AD$ (накрест. лежащие углы) $\Rightarrow$ ABCD – трапеция

2) M – сер. CD. По условию симметрии $OM = MT$, тогда по 2-ум сторонам и вертик. $\angle$ между ними $\triangle CMO = \triangle TMD$ $\Rightarrow$ OCTD – параллелограмм ($OC = DT$ и $OC \parallel DT$ из-за р-ва $\triangle$, т.е. рав-ва соотв. углов)

3) $CT = OD$ и $CT \parallel OD$ по п. 2; $\angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle ODT = 60^\circ$, как односторонние при $OC \parallel DT$,

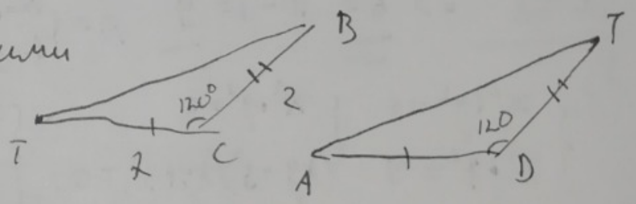
$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Аналогично можно получить, что $\angle BCT = 120^\circ$ ($\angle BCA + \angle ACT = 60^\circ + 120^\circ$ – $\angle COD = 60 + 60^\circ = 120^\circ$)

4) Р-рим $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$:

$\begin{cases} BC = DT \\ TC = AD \\ \angle BCT = \angle TDA \end{cases}$ $\Rightarrow$ по 2-ум ст. и углу между ними

$\triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow BT = AT$



5) $\triangle COD = \triangle ADT$, ибо

$\angle COD = \angle ADT = 120^\circ$

$CO = DT$

$DO = AD$

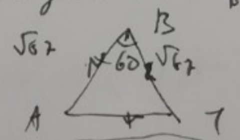
, т.е. по 2-ум ст. и углу между ними, тогда $CD = AT \Rightarrow = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

б) $BC = 2$, $AD = 7$, $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

1) Из т. Косинусов для $\triangle BCT$ найдём BT: $BT^2 = 4 + 49 - 28\cos 120^\circ = 53 + 28 \cdot \frac{1}{2} = 53 + 14 = 67$

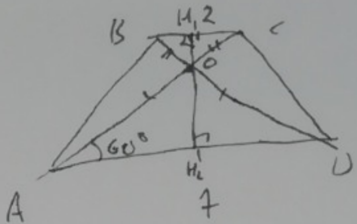
$BT = \sqrt{67}$

2) $S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2}\sin\angle ABT \cdot AB^2 =$



$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 67 = \frac{67\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABT} = \frac{67\sqrt{3}}{4}}$

Чистовик ③



~~[illegible]~~ 3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h \Rightarrow h = ?$

$h = h_{\triangle BOC} + h_{\triangle AOD} = OH_1 + OH_2$, $OH_1 \perp BC$, $OH_2 \perp AD$, H_1H_2, $H_1H_2 \perp BC$, $\perp AD$

1. $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OH_1 \cdot BC = \frac{1}{2}\sin\angle BOC \cdot BC^2 \quad | : \frac{BC}{2}$

$OH_1 = \sin\angle BOC \cdot BC \Rightarrow OH_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}$, $OH_1 = \sqrt{3}$

2. $S_{\triangle AOD}$ $OH_2 = AO \cdot \sin 60° = 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_1H_2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

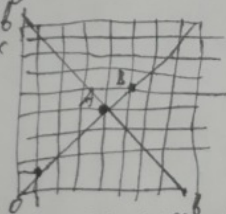
3. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot H_1H_2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{4}\sqrt{3} = S_{ABCD}$

4) ~~$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle ABT}}$~~ $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

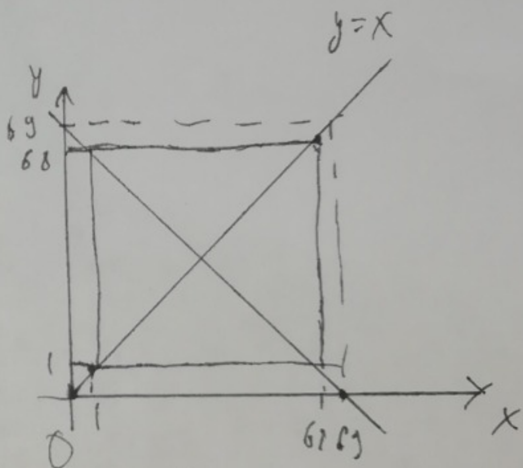
Ответ: $S_{\triangle ABT}/S_{ABCD} = \frac{67}{81}$

№5.

① Р-рим случай, что 1 точка $\in y = x$



1) Пусть какая-то точка $A \in y=x$ имеет коорд $(x_1; y_1)$, тогда $y_1 = x_1$. Получаем, что любая



такая точка может выбрать пару из других точек, кот. $\in y = x$ и кот. в углах квадрата $(1;1)$, $(1;68)$; $(68;68)$ и $(68;1)$.

Каждой точке A будут соотв. узлы (т B) в кол-ве 67 точек, т.е. $68!\cdot 67!$, если 2 точка на $y = x$.

2) Если 2-ая точка $\notin y=x$, то проведём через неё $y = -x + 6$, и на этой прямой ~~также~~ лежат все подходящие точки.

Можно выбрать точки от (1) до (6.) ~~по x или y~~ по OX или OY, неважно.

Первую точку выберем 6! способами, а следующую $(6-1)!$ $\Rightarrow$ Всего $6!\cdot(6-1)!$ сп.

Не забудем вычесть 2 способа от каждой прямой, т.е сумм

Чуриловa Г.

$$\begin{cases}\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+2x^2y^2=81\end{cases}$$

$\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$

$\lambda^2=$

$b=x^2y^2$

$a=x^2+y^2$

$b=x^2y^2$

$a^2=x^4+y^4+2x^2y^2$

$a^2-2b=x^4+y^4$

$$\begin{cases}\frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=81\end{cases}$$

$\cancel{6+ab=10a}$ $\quad b=10-\frac{6}{a}$

$\begin{cases}a^2+5b=81\end{cases}$

$a^2+50-\frac{30}{a}=81$

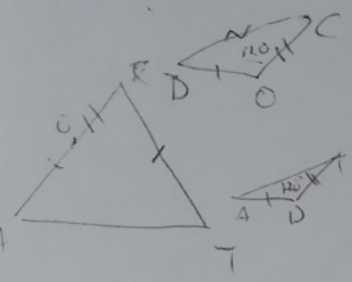
$a^3-31a-30=0$

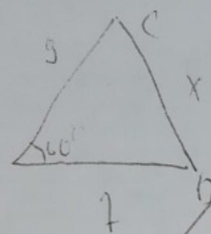
$53+14=67$

$14\cdot 9$

N6.

а) ABT - м-а? (р-ка)

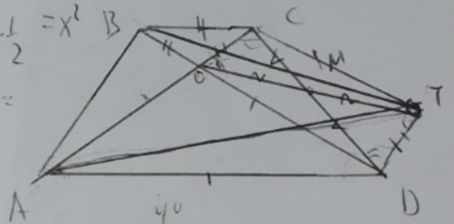


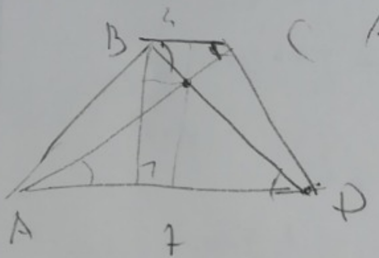


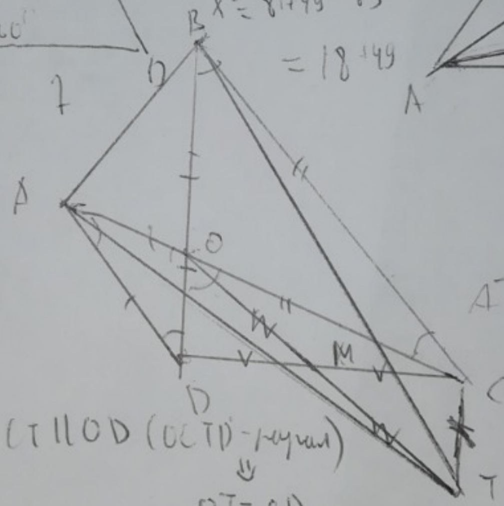
$81+49-14\cdot 9\cdot\frac{1}{2}=x^2$

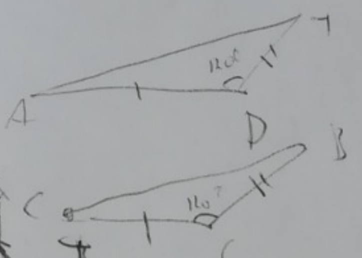
$x^2=81+49-63=$

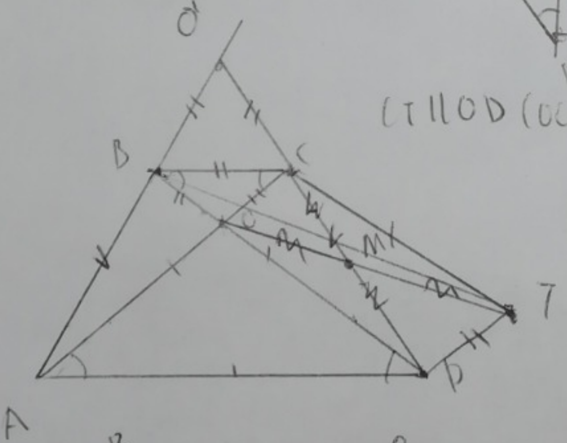
$=18^{149}$











$CT \parallel OD$ (OCTD - р-ник)

⇓

$OT=CD$

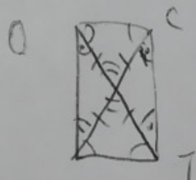
$CM=OM=$

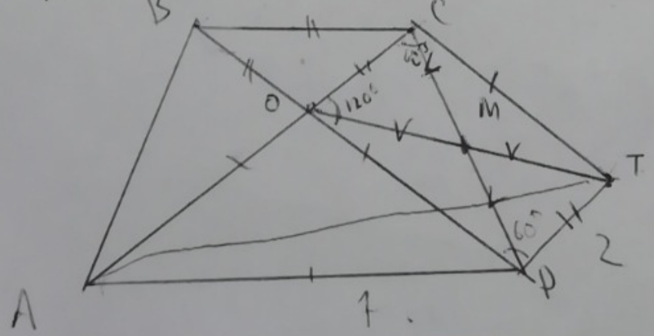
$CB=AT$

$\boxed{BT=AT}$

$2(\upsilon+v)=120°$

$\upsilon+v=90°$

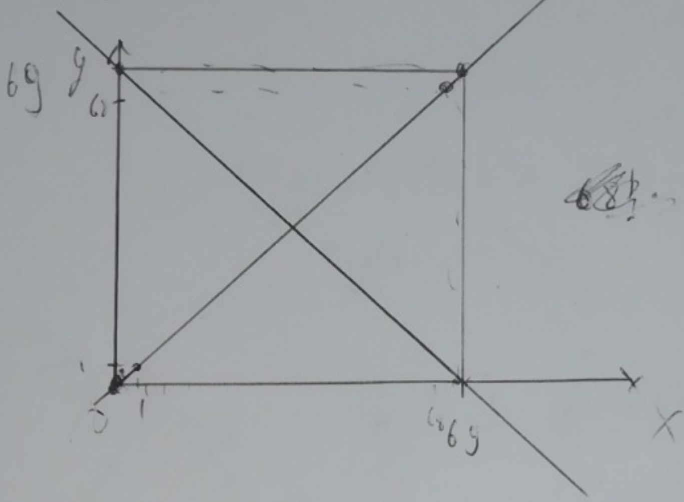


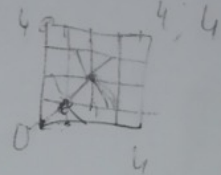


$S_{ABCD}=S_{ABT}-S$

$49+4+28\cdot\frac{1}{2}=49+18=53+8=67$

Черновик 2

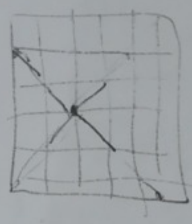


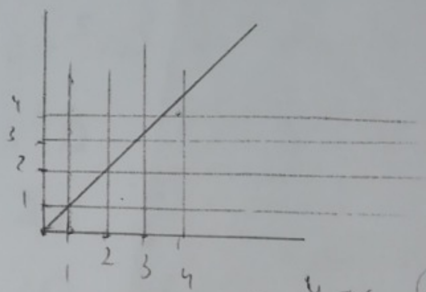


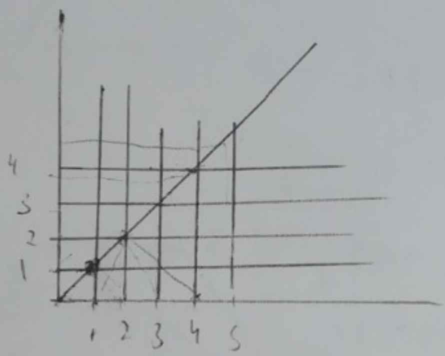
12

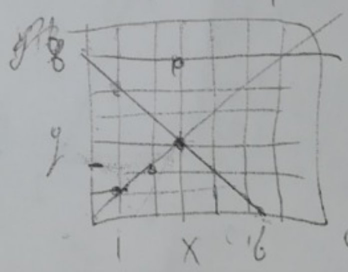
11

23









8

$y_1 = x_1$

X

$y = kx + b$

$y_1 = kx_1 + b$

$b \neq 0$

$y \neq 0$

$k \neq \infty$

$b = -1$

$y = -x + b$

$y = -x_1 + b$

$y + x_1$