Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006822**

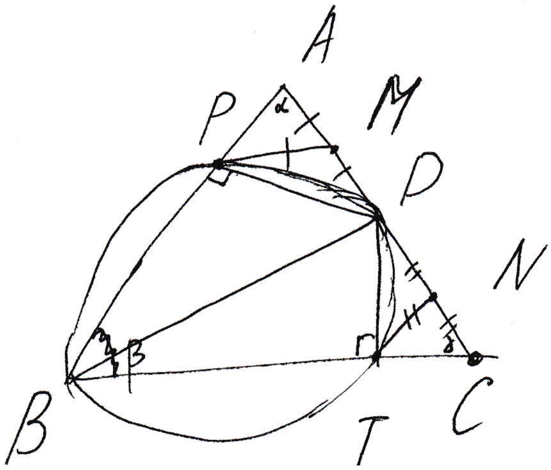
ID профиля: **316593**

Вариант 10

Чистовик.

№1.

1) $(\angle BAC = \alpha;\ \angle BCA = \gamma;\ \angle ABC = \beta)$



~~т.к. $\angle BPD$ и~~

$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ (т.к. они опираются на диаметр BD).

тогда $\angle APD = 90^\circ$ и $\angle DTC = 90^\circ$ (как углы смежные $\angle BPD$ и $\angle CTD$)

По св-ву медианы в прямоугольном треугольнике

$TN = DN = NC$ и $PM = AM = MD$

По св-ву углов при основании равнобедр. треугольника

$\angle MAP = \angle MPA = \alpha$ и $\angle NTC = \angle NCT = \gamma$

По св-ву внешнего угла в $\triangle PMA$ и $\triangle TNC$:

$\angle PMD = \angle MPA + \angle MAP = 2\alpha$

и

$\angle DNT = \angle NCT + \angle NTC = 2\gamma$

Чистовик.

т.к. $PM \parallel TN$, то

$\angle PMD + \angle DNT = 180^\circ$ (как внутренние)

$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ$

По теореме о сумме углов треугольника:

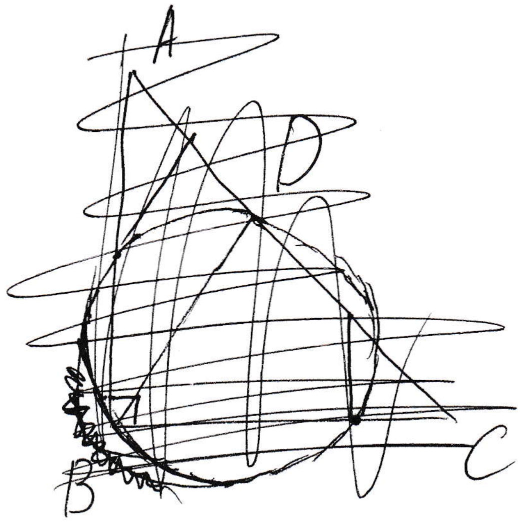
$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

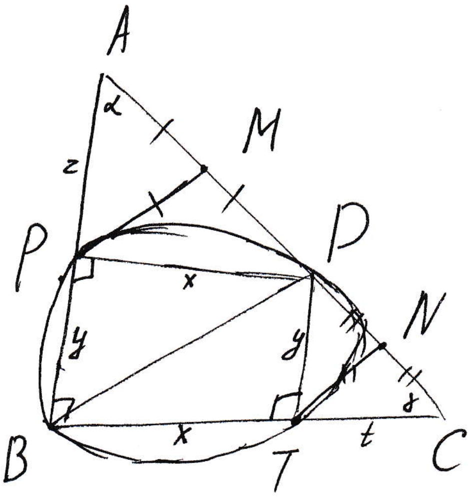
$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$

$\beta = 90^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ$

2)





Пусть $AP = z$; $PD = x$; $DT = y$; $TC = t$

Т.к. $\angle PBT = \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, то $PBTD$ – прямоугольник,

тогда $BT = PD = x$ и $PB = DT = y$

т.к. ~~$\gamma + \beta$~~ $\alpha + \gamma = 90^\circ$, то из теоремы о сумме углов треугольника

$\angle ADP = \gamma$ и $\angle TDC = \alpha$.

Чистовик.

$\triangle APD \sim \triangle DTC$ (по I признаку)

(т.к. $\angle APD = \angle DTC$ и $\angle PAD = \angle TDC$), тогда

$$\frac{AP}{\cancel{TD}\,DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AM}{DC} = \frac{2}{3}$$

$y = \frac{3}{2}z$ и $t = \frac{3}{2}x$

$AC = AD + DC = 2PM + 2TN = 5$

По теореме Пифагора:

$\cancel{AB^2 + BC^2 = AC^2}$ $AP^2 + PD^2 = AD^2$

и

$PB^2 + PD^2 = BD^2$

$\cancel{(z+y)^2 + (x+t)^2 = 25}$

$\cancel{\left(\frac{5}{3}z\right)^2 + \left(\frac{5}{3}x\right)^2 = 25}$

$\cancel{z^2 + x^2 = 9}$

$z^2 + x^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{4}z^2 = 5$

$\cancel{\frac{5}{4}z^2 = 5 \Rightarrow z = 2}$ $\frac{5}{4}z^2 = 1;$ $z = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{x^2 = 1,\ x = 1}$ $x^2 = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5};$ $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (z+y)(x+t) = \frac{25}{8} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5} = 5$

Ответ: 1) $\angle ABC = 90^\circ$; 2) $S_{ABC} = 5$.

Чистовик.

№2

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

Заметим, что $-x^2+4x+21=(x+3)(7-x)$

$$4+\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{(7-x)(x+3)}$$

Т.к. $x+3\geq 0$ и $7-x\geq 0$, то

$x\in[-3;7]$

Заметим, что чем больше x, тем больше левая часть, т.к. $\sqrt{x+3}$ растет, а $\sqrt{7-x}$ уменьшается.

Заметим, что $x=6$ является решением данного уравнения

Ответ: $x=6$.

Чистовик.

№3.

$$ax^2 - 2ax - ay + a^3 + 3 = 0$$

$$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$$

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$$

$$x_0 = -\frac{-2a}{2} = +a$$

$$y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$$

$$B\left(a; \frac{3}{a}\right)$$

$$y^2 - y(4x + 4a) + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$$

Решим кв. уравнение отн. y

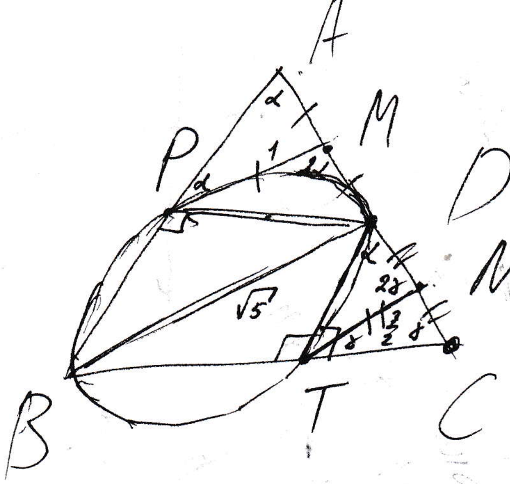
$$D = (4x + 4a)^2 - 4 \cdot (8x^2 + 12ax + 5a^2) =$$

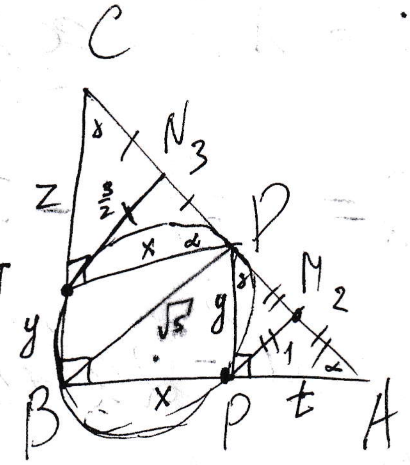
$$= -(16x^2 + 16ax + 4a^2) = -(4x + 2a)^2 < 0,$$

значит корней нет и не существует точки A, удовлетворяющей этому условию, тогда ~~не сущ~~ $a = \varnothing$

Ответ: $\varnothing$

Черновик.





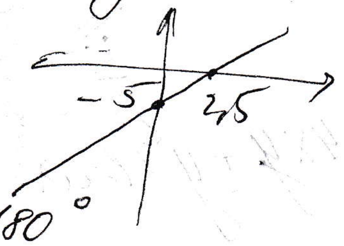
$2\alpha + 2\gamma = 180°$

$\alpha + \gamma = 90°$

$\angle ABC + \alpha + \gamma = 180°$

$\angle ABC = 90°$

$y = 2x - 5$



$(x+t)^2 + (y+z)^2 = 25$

$z^2 + x^2 = 9$

$y^2 + t^2 = 4$

$2a - \frac{3}{a} \geq 5 \quad y = \frac{2}{3} z$

$2a^2 - 5a - 3 \geq 0 \quad t = \frac{2}{3} x$

2) $AC = 2PM + 2NT = 5$

$z + y = \frac{5}{3} z$

$x + t = \frac{5}{3} x$

$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 + 24 = 49$

$\left(\frac{5}{3} x\right)^2 + \left(\frac{5}{3} z\right)^2 = 25$

$a = \frac{5 \pm 7}{4}; a_1 = 3$

$a_2 = -\frac{1}{2}$

$x^2 + z^2 = 9$

$x^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$

$x^2 + \frac{4}{9} z^2 = 5$

$\frac{5}{9} z^2 = 4$

$z = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$x^2 = 9 - \frac{36}{5} = \frac{45-36}{5} = \frac{9}{5}$

$x = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$S = \frac{1}{2}(z+y)(x+t) = \frac{4}{2 \cdot 9} xz = \cancel{\frac{25 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 5}} = 5$

$= \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 5} \quad \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

$S = \frac{1}{2}(z+y)(x+t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6 \cdot 3}{5}$

Черновик

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$B_x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2a}{2}=a$

$B_y=\cancel{a^2-2a^2+a^2}+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

$B(a;\frac{3}{a})$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$(2x-y)^2+4x^2-4ay+12ax+5a^2=0$

$y^2-4xy-4ay=-8x^2+5a^2$

$y^2-4y(x+a)+8x^2-5a^2$

$D=4^2(x+a)^2-4\cdot8x^2+20a^2$

$D=16x^2+16a^2$

$x+y-4=2xy$

$7-x=-(x-7)=-a+10$

$x^2+y^2+2xy=4x^2y^2+16-16xy$

$a=x+3$

$4+\sqrt{x+3}=\cancel{2\sqrt{x+3}}\quad\sqrt{7-x}(2\sqrt{x+3}+1)$

$4=\sqrt{7-x}(\sqrt{x+3}+1)+\sqrt{x+3}(\sqrt{7-x}-1)$

$4+\sqrt{x+3}>\sqrt{7-x}$

$4+x-3+4\sqrt{x+3}>7-x-4-4\sqrt{7-x}$

$2x-10>-4(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x})<0$

$2x>5$

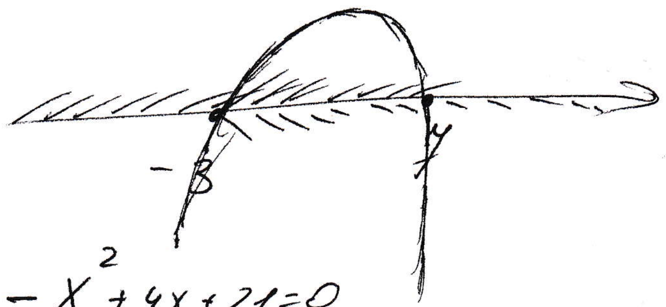
$2x>10-4\sqrt{10}$; $x>5-2\sqrt{10}$

$-2 \vee 5-2\sqrt{10}$

$-5 \vee 2(1-\sqrt{10})$

$25 \wedge 4\cdot(1+10-2\sqrt{10})$

Черновик



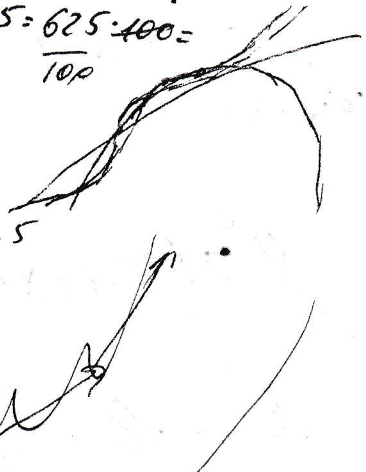
$-x^2+4x+21=0$

$D=16+4\cdot21=16+84=100$

$x=\frac{-4\pm10}{-2}$

$x_1=-3$

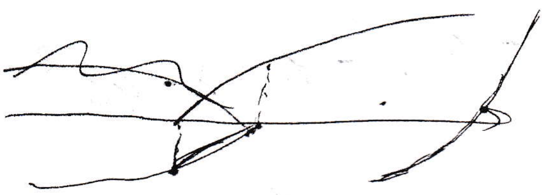
$x_2=7$



$6{,}25=625:100=\frac{}{100}$

$x=$

$\frac{25}{10}=2{,}5$



$2\cdot\sqrt{(x+3)(-x+7)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4$

$4-\sqrt{10}$

$2\cdot\sqrt{9\cdot1}$

$3-1+4$ 6 2

$x=6$

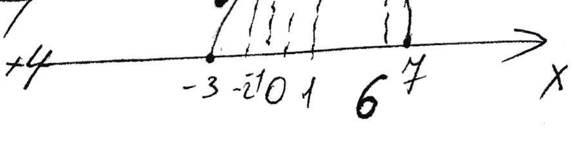
6

$2\cdot\sqrt{1\cdot}$

$\times 1{,}5$
$1{,}5$
$+75$
150
$2{,}25$

$2\cdot2\sqrt{3}=\sqrt{2}-4\sqrt{2}+4$

$2\sqrt{21}\ \overset{>}{\vee}\ \sqrt{3}-\sqrt{7}+4$



0,75

$4(x+3)(7-x)=x+3+7-x+16+2(-\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x})+$

$2\cdot2\cdot\sqrt{6}=6-\sqrt{6}$

$2\cdot1\cdot3\ \vee\ 1-3+4$

$45\ \overset{>}{\vee}\ \sqrt{6}$

$6\ \vee\ 2$

$2\cdot\sqrt{2{,}25\cdot6{,}25}\ \vee\ \sqrt{2{,}25}-\sqrt{6{,}25}+4=1{,}5-2{,}5+4=3$

$2\cdot1{,}5\cdot2{,}5=$

Черновик

$D = \cancel{16} \cdot x^2 + \cancel{16a^2} + 32ax - \overset{16}{\cancel{32}}x^2 + \overset{36}{\cancel{20}}a^2 =$

$= 16x^2 + 32ax + 36a^2$

$4 \cdot 6 \cdot 2 = 38$

$y^2 - y4(a+x) + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$

$D = \cancel{16a^2} + \cancel{16}x^2 + \cancel{32ax} - \overset{16}{32}x^2 - \cancel{32x} \overset{16}{48}ax - \overset{4}{\cancel{20}}a^2 =$

$= -16x^2 - 16ax - 4a^2 = -(4x+2a)^2 < 0$

$64 - 48 = 16$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006822**

ID профиля: **316593**

Вариант 10

Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

Пусть $u=x^2+y^2$ $(u\geq 0)$; $v=x^2y^2$ $(v\geq 0)$.

$$\begin{cases} \frac{6}{u}+v=10 \quad \Big| \cdot 5 \\ u^2-2v+7v=81 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} \frac{6}{u}+v=10 \\ \end{cases}} \quad \begin{cases} \frac{30}{u}+5v=50 \\ u^2+5v=81 \end{cases}$$

Вычтем из нижнего верхнее:

$$u^2-\frac{30}{u}=31 \quad \Big| \cdot u$$

$$u^3-31u-30=0$$

$$(u+1)(u-6)(u+5)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{u=-1}\ u=-1 \\ u=6 \\ u=-5 \end{array}\right.$$

т.к. $u\geq 0$, то подходит только $u=6$

Чистовик.

тогда $V = 9$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \Rightarrow \cancel{y^2}\, x^2=\dfrac{9}{y^2} \end{cases}$$

$$\frac{9}{y^2}+y^2=6$$

$$y^4-6y+9=0$$

$$(y^2-3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\sqrt{3};\ x=\pm\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3};\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

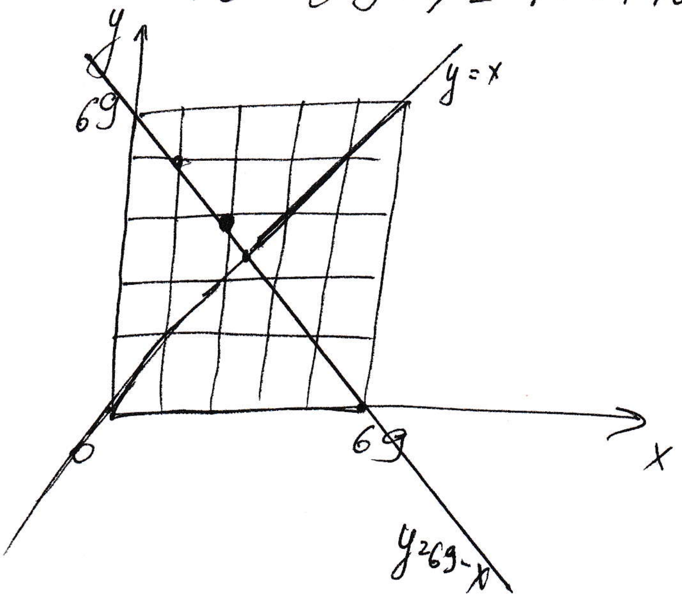
Ответ: $(\sqrt{3};+\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Чистовик.

№5.

Кол-во узлов сетки не включая границу.

$70\cdot 70 - 69\cdot 4 = \cancel{4594}\ 4624$



Заметим, что прямые $y=x$ и $y=69-x$ пересекаются не в узле.

Кол-во узлов лежащей на прямой $y=x$ равно 68, на прямой $y=69-x$ (удовл. условию) — 68.

Кол-во парных клеток для узлов на $y=x$ равно ~~4594−68=452~~ $\cancel{4594}\ 4624 - 3\cdot 67 - 66 = 4357$ (без учета ~~клеток~~ узлов, лежащих на $y=69-x$ и ~~у=~~ других ~~клеток~~ узлов на $y=x$), аналогично ~~парны~~ для узлов на $y=69-x$

3

Чистовик.

Количество ~~клеток~~ ~~пар клеток~~ клеток, которые лежат на $y=x$ или $y=x-69$ парных клеток ~~не~~ (удовл. условию) лежащей на $y=x$ равно

$\cancel{68+}$ $67+(68-2)=133$

аналогично для $y=69-x$, тогда ~~т.к.~~ ~~кол-во таких~~ ~~пар для окно~~ таких пар равно

$\frac{(2\cdot 68)\cdot 133}{2}=68\cdot 133=9044$ (~~на~~ делим на 2 т.к. каждая пара посчитано дважды).

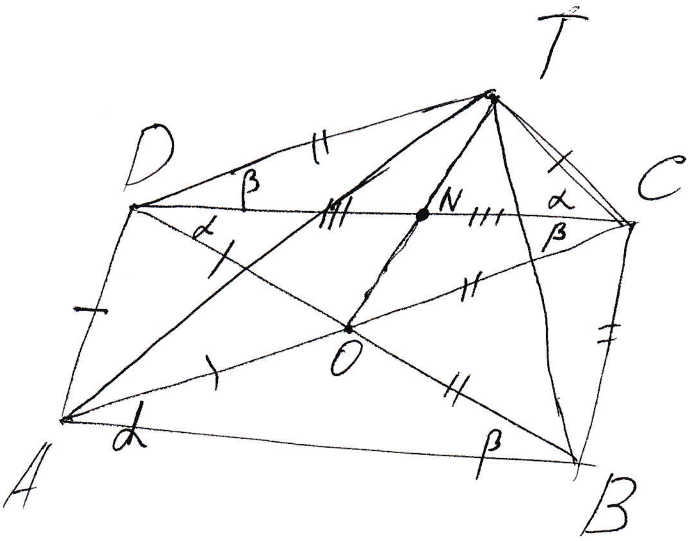
Тогда ответ:

$\cancel{4327}^{4357}\cdot(2\cdot 68)+9044=\cancel{504576}\ 601596$

Ответ: 601596.

Чистовик.

№6.



$(\angle CDO=\alpha;\ \angle OCD=\beta)$

Т.к. $\triangle ADO$ и $\triangle OCB$ – правильные, то

$\angle ADO=\angle DOA=\angle OAD=\angle COB=\angle OBC=\angle BCO=60^\circ$.

т.к. $\angle DAC=\angle ACB$, то $DA \parallel CB$, тогда

~~$\angle OAB=\angle OCD=\beta$ и $\angle OBA=\angle ODC=\alpha$ (т.к. они накрестлежащие)~~.

$\triangle AOB=\triangle DOC$ (по II признаку)

(т.к. $DO=OA$; $OB=OC$ и $\angle DOC=\angle AOB$ (т.к. они вертикальные))

тогда $\angle OAB=\angle ODC=\alpha$; $\angle OBA=\angle OCD=\beta$ и

$DC=AB$.

Чистовик.

В силу симметрии отн. N

$TD = CO$; $TC = OD$; $\angle TD\cancel{O}C = \angle OCD$

и $\angle TCD = \angle CDO$

~~Заметим, что~~

~~$\triangle ADT = \triangle TCB = \triangle$~~

По теореме о сумме углов в треугольнике:

в ~~треугольнике D~~ $\triangle DCB$

$\angle DCB + \angle CBD + \angle B\cancel{D}C = 180°$

$\alpha + \beta + 60° + 60° = 180°$;

$\alpha + \beta = 60°$

в $\triangle DOC$:

$\angle DOC = 180° - \angle ODC - \angle OCD = 180° - \alpha - \beta = 120°$.

$\angle ADT = \cancel{4}60° + \alpha + \beta = 120°$;

$\angle TCB = 60° + \alpha + \beta = 120°$.

Тогда $\triangle ADT = \triangle TCB = \triangle DOC$ (по II признаку)

(т.к. $\angle ADT = \angle TCB = \angle DOC$; $AD = TC = DO$ и $DT = CB = OC$),

тогда

$AT = TB = DC = AB \Longrightarrow \triangle ATB$ – правильный.

ч.т.д.

Чистовик.

$$\cancel{S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}}$$

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{DOC} + S_{COB} + S_{BOA} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot AD^2 + \frac{1}{2}\sin 120^\circ \cdot AD \cdot BC + \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot BC^2 + \frac{1}{2}\sin 120^\circ \cdot AD \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ (81)$$

По теореме косинусов:

$$AT = \sqrt{AD^2 + BC^2 - 2 \cdot AD \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{7^2 + 2^2 + 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{67}$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot AT^2 = \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot 67$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$.

Черновик.

$49+4+14+14=$

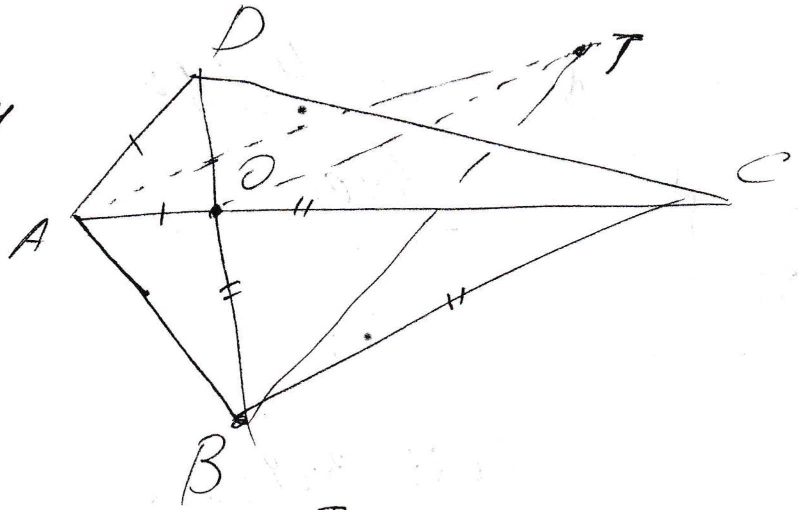
$=50+28+3=$

$=50+31=81$

$49+4+28=$

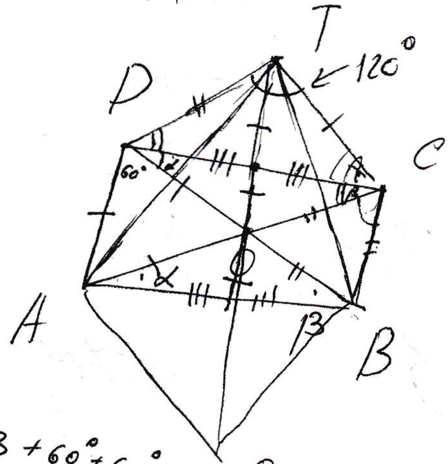
$=53+28=$

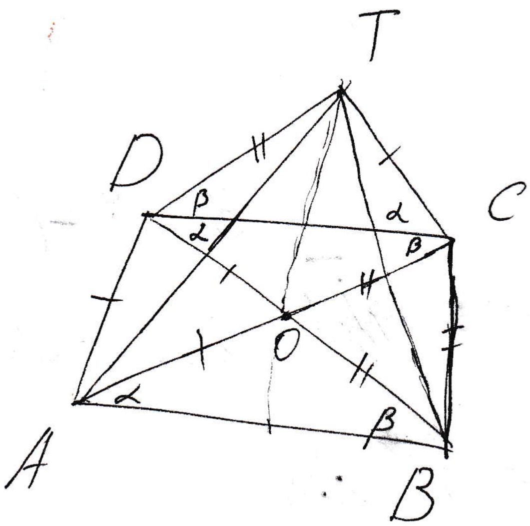
$=81$



$4900-\cancel{360}-3-140-36=$

$=4900-306=4594$





$4594-2\cdot 67-68=$

$=4594-\overset{202}{\cancel{180}}=4392$

$\alpha+\beta+60°+60°=180°$

$\alpha+\beta=60°$

$BC=2$

$AD=7$

$S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{ODC}+S_{OCB}+S_{BOA}=\frac{1}{2}\sin 60°\cdot AO\cdot OD+$

$+\frac{1}{2}\sin 120°\cdot OD\cdot OC+\frac{1}{2}\sin 60°\cdot OC\cdot OB+\frac{1}{2}\sin 120°\cdot AO\cdot OB=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(7^2+2^2+2\cdot 7+2\cdot 7\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 81$

$AT=\sqrt{7^2+2^2+2\cdot 7\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{67}$

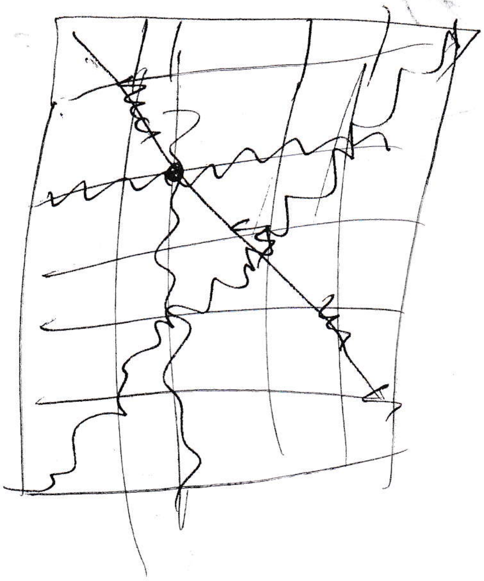
$49+4+14=53+14=67$

$\frac{67}{81}$ 53

$S_{ATB}=\frac{1}{2}\,\cancel{\cos}\sin 60°\cdot AT^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 67$

$49+4+14=67$

Черновик $4900 - 240 - 36 =$



$= 4694$

$$\begin{array}{r} 4900 \\ \hline 276 \\ 4624 \end{array}$$

$4624 - 3 \cdot 67 - 66 =$

$= 4625 - 240 - 28 =$

$$\begin{array}{r} -4625 \\ \hline 268 \\ \hline 4357 \end{array}$$

$3 \cdot 67 - (68 + 28) =$

$\cancel{45\,9 - 240 - 28 + 3 =}$

$\cancel{= 4328}$

$$\begin{array}{r} \times 8714 \\ 68 \\ \hline +69712 \\ 522840 \\ \hline 592552 \end{array}$$

$4594 - 3 \cdot 67 - \cancel{67} + 1$

$4687 - 240 - 20 =$

$= 4327$

$$\begin{array}{r} +592552 \\ 9044 \\ \hline 601596 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 8654 \\ 68 \\ \hline +69232 \\ 519240 \\ \hline 588472 \end{array}$$

$\cancel{68}$

$$\begin{array}{r} \times 133 \\ 68 \\ \hline +1064 \\ 7980 \\ \hline 9044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4327 \\ 2 \\ \hline 8654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +588472 \; \cancel{+9044} \\ 9044 \\ \hline 597516 \end{array}$$

$60 \cdot 68 = 3600 + 480 = 4080$

$\cancel{\times 4357}$

$$\begin{array}{r} \times 8714 \\ 68 \\ \hline +69712 \\ 522840 \end{array}$$

511596

Черновик.

$u = x^2 + y^2$

$v = x^2 y^2$

$\frac{6}{6} + 9$

$u^3 + 0u^2 - 31u - 30 \,|\, u+1$

$u^3 + u^2 \qquad u^2 - u - 30$

$-u^2 - 31u$

$-u^2 - u$

$-30u - 30$

$9 + 9 + 7 \cdot 9 =$

$= 9 \cdot 9$

$$\begin{cases} \frac{6}{u} + v = 10 \\ u^2 - 2v + 7v = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{u} + v = 10; \quad 6 + uv = 10u \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$$

$y^4 - 6y^2 + 9 = 0$

$\cancel{D = 36 - 4 \cdot 9}$

$(y^2 - 3)^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3} \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \\ y = -\sqrt{3} \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

133×68

1064

7980

9044

$\frac{6 \cdot 5}{u} - u^2 = 50 - 81$

$\cancel{v = 10 - \frac{12}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5} - 2}{1 \pm \sqrt{5}}}$

$u^2 - \frac{30}{u} = 31$

$u^3 - 31u - 30 = 0$

$u = -1$

34

$(u+1)(u^2 - u - 30) = 0$

$\cancel{D = 1 + 4 = 5}$

$\cancel{u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

$D = 1 + 120 = 121$

$u = \frac{1 \pm 11}{2}; \; u_1 = 6; \; u_2 = -5$

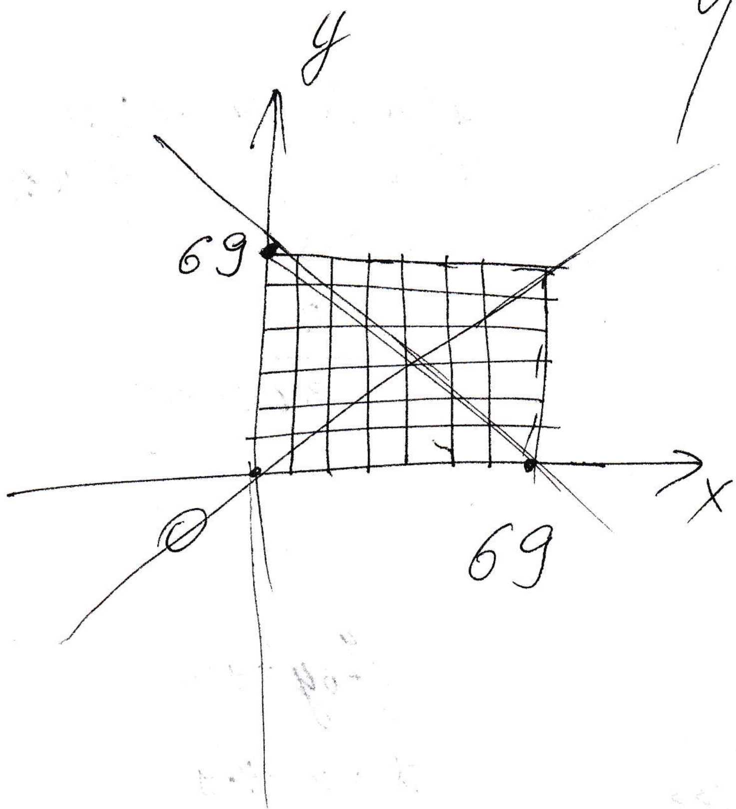
$5v = 81 - 36 = 45$

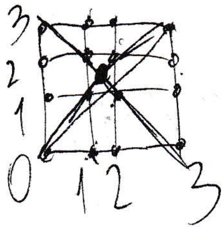
$v = 9$

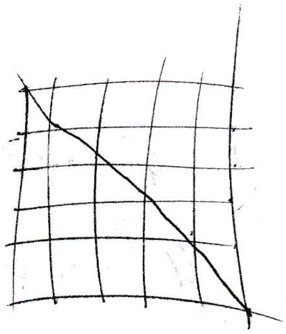
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 y^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{y^2} \end{cases}$$

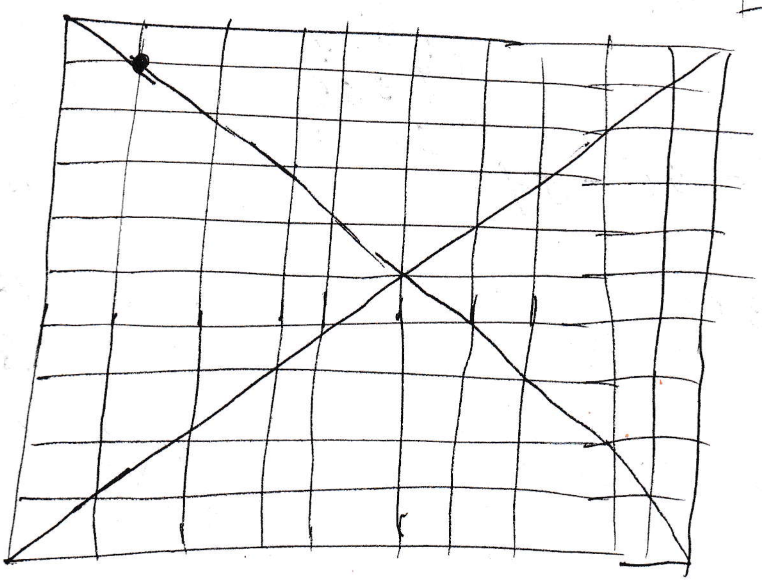
$\frac{9}{y^2} + y^2 = 6$

Черновик.









$$n = 70^2 - 70\cdot 4 + 4 = 70^2 - 69\cdot 4$$

$$2\cdot 68\cdot(n - 68^2 \cancel{\ } - 68) + 68\cdot 66 =$$

$$= 2\cdot 68(70^2 - \cancel{7}69\cdot 4 - 68\cdot 69) + 68\cdot 66 =$$

$$= \cancel{A}68(2\cdot(70^2 - 69\cdot 72) + 66) =$$